32

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSICALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

12

ZWÖLFTER BAND.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.

MÜNCHEN,
1876.

VERLAG DER K. AKADEMIE,
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Inhalt des XII. Bandes.

I. Abtheilung.

Seite

II. Abtheilung.

III. Abtheilung.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.



MÜNCHEN,

1875.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZWÖLFTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.



ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.

MÜNCHEN,
1875.

VERLAG DER K. AKADEMIE,
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Inhalt.

Die Pässe

über die

Kammlinien des Karakorúm und des Künlün

in Bálti, in Ladák und im östlichen Turkistán.

Nach unseren Beobachtungen von 1856 und 1857
und den neueren Expeditionen.

Von

Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski.

Im Entwurfe vorgelegt und darüber vorgetragen in der Classensitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

Einleitung.

Bezeichnung des Thema. — System der Transscription und Betonung. — Allgemeine Bemerkungen über Angabe und Bestimmung der Höhen, der horizontalen Entfernungen und der Temperaturen; über die Beobachtungsmanuscripte und die landschaftlichen Ansichten.

Bezeichnung des Thema.

Nachdem ich aus unserem geographischen Materiale in meinen früheren Mittheilungen der kgl. Akademie über die allgemeine topographische Gestaltung Hochasiens, über die Kartenaufnahme daselbst, sowie über die Ergebnisse der Höhenmessungen berichtet habe,[1]) werde ich versuchen, hier eine vergleichende Zusammenstellung der bis jetzt aus Indien in das östliche Turkistán sich erstreckenden geographischen Beobachtungen von Europäern zu geben, und dieser eine Schilderung unseres ersten Vordringens über die beiden nördlich vom Himálaya liegenden Hauptketten, über den Karakorúm und über den Künlǘn, anzuschliessen.

Von meiner deutschen beschreibenden Bearbeitung des Reisematerials sind 3 Bände[2]) erschienen; der vierte, mit dem ich noch beschäftigt

1) „Erläuterung der Gebiete Hochasiens". Sitzungs-Ber. der math.-phys. Cl. 1870 S. 313—327,

„Die Karte des westlichen Hochasien von H. v. SS." Sitzgs.-Ber. der math.-phys. Cl. 1872—73 S. 290—296 und

„Die wichtigsten Höhenbestimmungen in Indien, im Himálaya, in Tíbet und in Turkistán". Sitzgs.-Ber. der math.-phys. Cl. 1867 S. 479-518.

2) „Reisen in Indien und Hochasien" Jena, Herm. Costenoble 1. Bd. Indien; 1869; 2. Bd. Hochasien, I. der Himálaya von Bhután bis Kashmír; 1871; 3. Bd. Hochasien, II. Tibet; zwischen der Himálaya- und der Karakorúm-Kette; 1872. — Mit 2 ethnogr. Tafeln, 19 landschaftlichen Ansichten, 6 Tafeln topogr. Gebirgsprofile und 3 Karten.

Die Karte im 3. Bande, welche die Uebersicht sowohl von Ladák als von den Gebieten nördlich davon gibt, enthält auch die erst hier (und später im 4. Bande der „Reisen") zu besprechenden Routen.

bin, wird dieselbe zum Abschlusse bringen. Detail der Beobachtungen und der Messungen, aber auf solche allein bezogen und den Gegenständen nach geordnet, ist in den „Results“[3]) auch aus jenen nördlichen Gebieten Hochasiens gegeben.

Was ich heute vorlege, habe ich desshalb, vorgreifend, schon jetzt zur Publication ausgewählt, weil dieser Gegenstand die Gebiete behandelt, von deren Untersuchung die Entscheidung über das Gebirgs- und Fluss-System jener Region der grössten Erhebung auf unserer Erde bedingt gewesen ist.

Neuerdings haben die Aenderungen der politischen Verhältnisse in den Ländern nördlich und auch westlich vom Karakorúm-Gebirge — so das Unabhängigwerden des östlichen Turkistán von China, Handelsverträge Russlands mit Mohámmad Yákub, die Eroberung Khívas durch Russland, und jüngst Anerkennung Mohámmad Yákub's durch den Sultan und eine Freundschaft anbahnende englische Gesellschaft aus Indien nach Yárkand und Káshgar — die politische Aufmerksamkeit gleichfalls dahin gelenkt.

Die Aufstände, durch welche die gegenwärtigen Verhältnisse veranlasst wurden[4]), begannen 1857 mit Einfällen aus Kókand im Nordwesten durch Váli Khan aus der Familie der Khójas, der alte Erbansprüche geltend machte und zugleich in roher und zerstörender Weise auftrat. Dieser wurde zwar bald zurückgedrängt; aber die Erhebung gegen die Chinesen war eine sehr allgemeine geworden, es folgte deren Vertreibung aus dem Tunganenlande im Norden und Osten, dann neues Eindringen von Khójas unter nach Turkistán Búzurg Khan, den Mohámmad Yákub, der jetzige Herrscher, als Kushbégi oder Heerführer begleitete. Bald nach den Erfolgen von 1865 machte sich Mohámmad Yákub selbst zum Ober-

---

3) Bis jetzt sind publicirt, Leipzig F. A. Brockhaus, London Trübner u. Co.: Vol. I. Astronomical Determinations of Latitudes and, Longitudes and Magnetic Observations; 1861. Vol. II. General Hypsometry; 1862. Vol. III. Route-Book, and Glossary; 1863. Vol. IV. Meteorology, first Part; 1866. Vol. V. Meteorology, second Part ist vorbereitet.

4) Mittheilung darüber ist gegeben in einer Abhandlung von Oberst Heinz, Iswestija der k. Russ. Geogr.-Ges., 1866, III; deutsch von Dr. Marthe, Zeitschr. der Gesellsch. für Erdkunde, Bd. II, 1867.

haupte und gab sich den Titel Atálik Gházi[5]), „Beschützer der Krieger". Búsurg Khan musste nach Mékka pilgern und von dort nach Andiján in Verbannung gehen; Váli Khan, der seine Ansprüche nicht ganz aufzugeben schien, wurde hingerichtet. Seit December 1866 hat sich Mohámmad Yákub auch Khŏtan erobert. Auch diese Provinz war, vorher schon, von China unabhängig geworden, und stand unter Háji Habibúllah Khan; von Mohámmad Yákub wurde er zu einer Zusammenkunft an der Grenze eingeladen und verrätherisch ermordet.

Um einen allgemeinen Ueberblick über unsere Ergebnisse, sowie über jene anderer Reisen zu bieten, sind im Folgenden, schematisch angelegt, auch die „Itinerare" gegeben, in welchen in gedrängter Zusammenstellung Zeit und Ort sich anreihen.

System der Transscription und Betonung.

Die ausführliche Erläuterung habe ich gegeben in: „Results of a scientific Mission to India and High-Asia," Bd. III, S. 137—160.

Das angewandte Alphabet.

a (ā ă a̱ ã), ä; b (bh); ch (chh); d (dh); e (ē ĕ ẽ); f; g (gh); h; i (ī); j (jh); k (kh), k̲h̲; l (lh); m; n; o (ō ŏ), ö; p (ph); r (rh); s; sh; t (th); u (ū), ü; v; y; z.

Die Aussprache.

Vocale:

1) a, e, i, o, u, wie im Deutschen.
2) ä, ö, ü, wie im Deutschen.
3) Diphthongen geben den Ton der beiden nebeneinandergestellten Vocale (was z. B. im Deutschen nicht immer so ist; deutsch lautet = daütsch, frei = frai, etc.).

Consonanten:

1) b, d, f, g, h, k, l, m, n, p, r, s, t werden ausgesprochen wie im Deutschen.
2) h nach einem Consonanten lautet als hörbare Aspiration, mit Ausnahme der Combinationen ch, sh und k̲h̲.

5) Atálik, genauer transscribirt atā́līk ein „Praeceptor", ein Führer oder Beschützer; Gházi, genauer g̲h̲ā́zī, ein Eroberer, ein Held im Sinne des Kampfes gegen Ungläubige. Ersteres ist persisch, letzteres arabisch; beide sind in das Hindostáni aufgenommen. In den neuesten Berichten über Forryth's 2te Mission sehe ich meist, ohne Grund, Ataligh geschrieben.

(Vocale:)

Diärese eines Diphthongen tritt stets ein und ist dann auch so bezeichnet, wenn der Accent des Wortes auf den zweiten der beiden Vocale fällt; in den seltenen Fällen, wo Diärese in anderen Silben vorkommt, ist sie hier nicht bezeichnet.

4) ¯ über einem Vocale zeigt an, dass er lang ist. Im Allgemeinen wurde aber, um die Transscription zu vereinfachen, nur in jenen Fällen das Längezeichen speciell angegeben, in welchen die Stellung des Accentes oder die Aehnlichkeit des Wortes mit solchen anderer Bedeutung das Bezeichnen der Länge des Vocales direct nöthig machten.

Kurze Vocale sind als solche nicht speciell unterschieden.

5) ˘, das gewöhnliche Kürzezeichen, ist über solchen Vocalen „a" und „e" angebracht, welche unvollkommen tönend ausgesprochen und in den orientalischen Sprachen dann meist gar nicht geschrieben werden. Als Analogie des Lautes nenne ich aus dem Englischen das u in „but" und das e in „herd".

6) _ unter dem Vocale „a" be-

(Consonanten:)

3) ch ist gleich dem deutschen tsch.
4) j ist gleich dem deutschen dsch.
5) sh ist gleich dem deutschen sch.

Für 3, 4 und 5 wurde hier die zunächst englische Art der Anwendung dieser Buchstaben gewählt, weil dieselbe in den geographischen Namen dieser Gegenden schon jetzt grosse Verbreitung gefunden hat, und, was nicht weniger wichtig ist, weil mit der englischen Art der Transscription keine so grosse Anhäufung von Consonanten sich verbindet als mit der deutschen.

6) kh gleich dem deutschen ch.
7) v gleich dem deutschen w.
8) y gleich dem deutschen j.
9) z als weiches s, wie im englischen Worte „zero".

Accente.

Bei jedem mehrsilbigen Worte ist der Vocal, auf welchen der Accent fällt, durch solchen, in der Form des Acuts, ', bezeichnet; der Accent kann auch auf kurze, selbst unvollkommen gebildete Vocale fallen. Gerade bei ungewohnten geographischen Namen lässt sich der Accent sehr schwer errathen und ist zugleich für die richtige

(Vocale:)

zeichnet einen tiefen Laut desselben gleich a im englischen „wall".

(Consonanten:)

Aussprache, auch für das im Gedächtnisse Behalten des Wortes, von grosser Wichtigkeit.

(Wenn andere Werke oder Publicationen citirt sind, ist jene Schreibweise beibehalten, welche dort angewandt ist.)

Allgemeine Bemerkungen.

Angaben und Bestimmung der Höhen. Die Höhen sind stets in englischen Fuss angegeben, der Luftdruck in englischen Zoll. Ich wählte diese Einheiten auch hier, sowie solches für unsere Mittheilungen während der Reise und für spätere Publicationen geschah, weil fast alle Angaben in anderen Werken über die weiten Regionen zwischen Ceylon und Centralasien in ihren Originalbestimmungen in englischem Maasse vorliegen.

1000 engl. Fuss = 304 · 79 Meter = 938 · 29 par. Fuss.

In den hier zu besprechenden Gebieten sind jetzt auch einige Messungen hoher Gipfel durch die Great Trigonometrical Survey vom westlichen Tíbet aus vorgenommen worden, denen Johnson 1865, während er zwischen der Karakorúm-Kette und dem Karakásh-Flusse das Vorwärtskommen seiner Karawane etwas aufgehalten sah, gleichfalls einige neue Bestimmungen von Gipfeln beifügte. Längs der Routen sind von ihm sowie von den anderen Nachfolgern die Höhenbestimmungen mittelst der Beobachtung des Siedepunktes des Wassers ausgeführt werden.

Für die von uns erhaltenen Höhen sind die Daten über die angewandten Instrumente, über die Beobachtung und die Art der Berechnung in voller Ausführlichkeit 1862 in Band II der „Results" gegeben worden.

Für Turkistán war es mir möglich geworden zu Le unter der Aufsicht unseres Native Doctors Hărkíshen eine correspondirende Station einzurichten, mit genügend zahlreichen Beobachtungen um selbst die Curven der Luftdruck- und Temperatur-Veränderung in der ganzen Tages-

periode zu bestimmen,[6]) da 2 Gehülfen Hărkíshen's bei ihm zurückgelassen waren.

Auch hatten wir für uns correspondirende Beobachtungen zu Símla und zu Măssúri machen lassen, die gleichfalls — je nach den gleichzeitigen Witterungsverhältnissen einzeln oder beide — zur Berechnung benützt wurden.

An unseren Barometern waren mit Nonius 1/10 Millimeter abzulesen. Unsere Thermobarometer waren direct in 0·02⁰ Celsius, was 0·036⁰ Fahrh entspricht, getheilt, und 0·01 Grad Celsius konnten dabei mit Bestimmtheit angegeben werden. Der Differenz von 0·01⁰ C. entspricht in Barometerstand bei 760 Mm. Quecksilberhöhe eine Differenz von 0·27 Millimeter.

In grossen Höhen verliert die Bestimmung mit dem Barometer an Genauigkeit im Verhältnisse als dort bei gleicher Differenz der Höhe geringere Differenz zwischen den Ablesungen der Quecksilbersäule sich zeigt. Bei der Anwendung des Thermobarometers verhalten sich die Ablesungen ähnlich, aber günstig ist bei diesem, dass die relative Grösse der Differenzen des Siedepunktes langsamer mit der Höhe sich ändert als jene des Barometerstandes.

Zum Sieden wurde nur destillirtes Wasser oder das gleichfalls salzfreie Wasser aus atmosphärischen Niederschlägen und aus geschmolzenem Eise benützt; überdies war das Instrument[7]) durch Vorrichtung in der Dampfausströmung der ganzen Länge nach gleichmässig erwärmt, da sonst sehr merkliche Fehler in der resultirenden Höhe sich ergeben würden.

Die von uns selbst erhaltenen Höhen sind hier nicht näher bezeichnet; aber wo nach späteren Reiseangaben Höhen an neuen Stellen

---

6) Erläutert Vol. II, p. 44 u. 58. Für Adolph's Reise im Jahre 1857 hätten ausser Símla- und Măssúri-Beobachtungen auch jene von Hărkíshen mit dem Normal-Barometer Pistor Nr. 11 während seines Aufenthaltes an verschiedenen Stationen des westlichen Tíbet, für welche die Höhe schon bestimmt war, dienen sollen. ib., p. 20.

Le hatte Adolph 1857 umgangen, er wollte auch keinen seiner Leute jenes Jahr dort permanent aufstellen, um möglichst wenig die Aufmerksamkeit des Kashmíri Thanadár von Ladák auf sein Vordringen gegen Norden zu lenken.

7) Beschreibung unserer betreffenden Instrumente, die sich bei wiederholten directen Vergleichen mit Barometern bis zu Höhen von 19323 Fuss trefflich bewährten, ist enthalten „Results", vol. II, p. 35 u. ff.

der Wege, oder weil differirend von unseren Werthen, zu erwähnen waren, sind denselben in Abkürzungen die Namen der Reisenden welche die Beobachtung machten, beigefügt.

Mittel aus diesen und unseren Höhen glaubte ich nicht nehmen zu können, da die Differenzen zu gross, auch zu unregelmässig wechselnd sind, wie mehrmals sich zeigen wird, wo einzelne Punkte besonders zu erwähnen sein werden. Es genüge hier anzuführen, dass für die Reihe der Bestimmungen nach dem Siedepunkte des Wassers bei Johnson und Hayward von correspondirenden Stationen nicht gesprochen wird, und dass für Henderson's Höhen als correspondirende Beobachtungen nicht solche vorlagen, die in einem klimatisch ähnlichen Gebiete, und gleichzeitig, ausgeführt waren, sondern eine, überdiess sehr willkührliche, Combination von Luftdruck und Temperatur aus dem Pănjáb. Dabei waren nämlich nur „Monatsmittel" in Rechnung gezogen und zwar ist für die Mittel des Luftdrucks die Station Rúrki gewählt, für jene der Temperatur der Luft die Station Ambála, beide aus früheren Jahren.

In der Bezeichnung der Höhen aus Hayward's Abhandlung sind 2 Gruppen unterschieden, wovon die eine mit „Hay.", die andere mit „Hay-Geo." markirt ist. Letzteres bezieht sich auf Umrechnung der Werthe der zweiten Gruppe durch Staff-Commander C. George, R. N.; die meisten der besonders hohen Punkte hat Commander George unverändert gelassen, so „wie sie Hayward während des Marsches berechnet hatte", ohne jedoch Grund dafür anzugeben. Bei jenen, die er umrechnete, verfuhr er wie folgt: 1) Die von Hayward zu Le erhaltene Siedetemperatur von $191^1/_4{}^0$ F. wurde als Zahlenwerth für die untere Station angenommen — also ohne auf Veränderung des Luftdruckes Rücksicht zu nehmen, auch ohne Angabe, ob oder wie George Lufttemperatur und deren Veränderung mit in Rechnung zog. 2) Für die Höhe von Le, wo Hayward bei Dr. Cayley abgestiegen war — in jenem Hause am untern Ende der Stadt, wo auch wir unsere Barometer aufgestellt hatten — erhielt er, wie auf seiner Karte eingetragen, 11740 F.; George nahm für Le 208 F. weniger an, nemlich 11532 F.[8]): also die Zahl die sich als Resultat, aus stündlichen Mitteln für die

8) Journal R. Geogr. Society. London 1870, Vol. XL p. 165.

Monate Juli, August und September 1856 nach Măssúri und nach Símla von uns berechnet, ergeben hat,[9]) ohne jedoch unserer Beobachtungsreihe zu erwähnen.

Eine Coïncidenz auf die Einheit des Werthes hat geringe Wahrscheinlichkeit, eine zufällige zu sein; doch ist es wohl möglich, dass unsere Höhenangabe schon wiederholt bei Mittheilungen über Le genannt worden war, ohne dass gesagt wurde, worauf sich diese Zahl gründet.

Ueber die Art der Ausführung jener Beobachtungen ist zu erwähnen, dass der Siedepunkt bei Johnson und bei Hayward nur in $^1/_{10}{}^0$ F., bei Henderson nur in ganzen und halben Graden Fahrh. angegeben ist, wobei überdiess in letzterer Gruppe die halben Grade nicht direct getheilt, sondern geschätzt waren, und zwar nur ausnahmsweise, wie die relativ sehr geringe Zahl der Ablesungen zeigt, die auf $^1/_2$ Grade ausgehen.

Obwohl wir nicht versäumt hatten schon in unserem officiellen Report von 1856[10]) auf die Wichtigkeit correspondirender Stationen und auf das Errichten einer solchen zu Le aufmerksam zu machen, war doch Aehnliches während der späteren Reisen in Tíbet und jenseits des Karakorúm nicht wieder geschehen.

Da schon seit 1866 ein englischer Beamter zum Schutze des Handels in Le einen grossen Theil des Jahres zuzubringen hatte, wäre auch solche Einrichtung sehr erleichtert gewesen.

Horizontale Entfernungen. „Meile“ ohne nähere Bezeichnung ist die englische Meile = 5280 engl. Fuss; 69·04 engl. M. = 1 Aequatorialgrad, 4·60 engl. M. = 1 deutsche M.

Für die Beurtheilung krummer Linien, z. B. Längenentwicklung von Routen, Flüssen, Gebirgskämmen etc. bediente ich mich des „Scalenrädchens“. (Beschreibung desselben habe ich mitgetheilt in der k. b. Akad. d. Wiss., 10. März 1866).

Die Temperaturen sind in der 100theiligen Scala angegeben.

Beobachtungs - Manuscripte. Die mehrmals zu citirenden während der Reise geführten Manuscripte sind gegenwärtig in der Art

---

9) „Results“ vol. II. p. 58 und 59, 1862.

10) Report No. VIII, dd. Le 26th Sept. 1856. Auch abgedruckt im Journ. of the As. Society of Bengal New Ser. Vol. XXVI, 1857; der Beobachtungen Härkíshen's ist dabei erwähnt p. 115.

gruppirt, dass ihre Reihe mit den Itineraren beginnt, und dass dann die topographischen, physikalischen, geologischen, ethnographischen und naturgeschichtlichen Beobachtungen sich folgen.

Obwohl während der Reise selbst jeder von uns, ausser den speciellen Formularen für Zahlen-Tabellen, nur 1 Buch führte, war schon damals ein für die vergleichende Bearbeitung günstiges Getrennthalten nach Gegenständen, auch in den Aufschreibungen, consequent befolgt; und es war demnach möglich nach der Rückkehr das Material für die ganze Reise umzulegen und objectiv zu ordnen. So war es erleichtert für jede Frage während der Bearbeitung nachzusehen ob Daten dafür vorliegen; und es lassen sich so, auch später, ähnliche Prüfungen wiederholen, wenn Gelegenheit sich bietet, das Detail des an Ort und Stelle Niedergeschriebenen in Verbindung mit neuen Thesen auf Einzelheiten durchzusehen, zu deren Berücksichtigung etwa früher keine Veranlassung gewesen ist. Band 47, aus Adolphs Nachlass, ist des späteren Eintreffens wegen nicht mehr den Gegenständen nach repartirt worden.

Die landschaftlichen Ansichten, deren ich mehrmals von Adolph und von mir in Verbindung mit den topographischen und geologischen Verhältnissen zu erwähnen habe, sind, ähnlich wie die Manuscripte, objectiv gruppirt, nach Zone, Terrainform, Raçe der Bewohner, sich unterscheidend, und innerhalb der Gruppen folgen sie sich den Routen entlang. Mit Einschluss von Adolphs Nachlass liegen mir jetzt 751 Ansichten vor. Die hier angegebenen Zahlen sind die „General-Nummern“, welche die ganze Aufeinanderfolge durchlaufen.

I.

Chronologisch-topographische Zusammenstellung der Itinerare von Europäern.

1. Schlagintweit'sche Routen von 1856 und 1857.

Hermann und Robert von Le in Ladák nach Búshia in Khótan und Rückkehr; 24. Juli bis 12. September 1856; Kettengestaltung. — Adolph's Untersuchungen in Bálti, von Húshe zum Mustágh-Passe und nach Skárdo; 15. Juli bis 1. September 1856. (Märsche bis Yárkand.) — Adolph's Weg aus District Pangkóng durch das Changchénmo-Thal über den Chang Lang-Pass (Karakorúm) und den Kilián-Pass (Künlún), von Ladák nach Yárkand und Káshgar; 8. Juli bis 26. August 1857. — Rückkehr der Begleiter. — Adolph's Angaben über den Kilián-, den Súget-, den Kárlik-, den Yángi- oder Kókiar- und den Piriákh-Pass, sowie über den Karakásh-Thalweg.

Von Ladák nach Khótan.

Für den Sommer 1856 hatte ich beschlossen, mit meinem Bruder Robert, von Ladák aus Vordringen in das östliche Turkistán zu versuchen. Da ohnehin Beschreibung der beiden wichtigsten Strecken dieser Route besonderen Theil dieser Mittheilung bildet, habe ich hier das Itinerar in gedrängter Form gegeben und es wurden den Namen der Localitäten nur einige Nebenangaben noch beigefügt als vor allem characteristisch für die allgemeinen Terrainverhältnisse. Das damals zur Bestimmung des Luftdruckes benützte Instrument war Thermobarometer 5, von Geissler in Berlin (s. „Results“ II, p. 30).

Die Märsche vertheilten sich wie die folgende Tabelle es zeigt; die Monatstage beziehen sich, wenn nicht Anderes bemerkt ist, auf Zeit der Ankunft an betreffendem Orte:

1856. Juli 24. Aufbruch von Le, Hauptstadt von Ladák. Unteres Ende der Stadt 11,257 F.

„ 28. Pangmíg in Núbra.

August 2. Sássar-Pass, 17,753 F.

„ 3. Besteigung des Sássar-Peak bis zu 20,120 F.

„ 6. △ Púllak[11]).

„ 8. △ Dáulat Beg Úlde.

„ 9. Ueberschreiten des Karakorúm-Passes; Passhöhe 18,345 F.; Lagerplatz △ Búllu, 16,883 F.

„ 10. An Haltestelle △ Chadartásh, 16,258 F., vorüber nach der grossen Plauteau-Stufe Aktágh; Lager nahe am Ufer des Yárkand-Flusses zu △ Valikshách, Höhe des Flusses 15,104 F.

„ 11. bis 12. Ueber den Kizilkorúm-Pass, 17,762 F. nach dem Salzsee Kiúk Kiől.

„ 12. bis 14. Lager am Salzsee Kiúk Kiől, 15,460 F.

„ 16. bis 18. △ Sikándar Mokám mit Ruine.

„ 19. bis 22. Im Karakásh-Thale zu △ Súmgal, 13,215 F.

„ 23. Ueberschreiten der Künlűn-Kette; Élchi-Pass, 17,379 F.

„ 24. △ Oitásh.

„ 25. u. 26. Búshia, 9310 F.

„ 28. Rückweg über die Künlűn-Kette nach Súmgal.

„ 31. △ Súget, 12,960 F.

September. 2. Ueber Súget Daván-Pass, 17683 F. nach △ Valikshách.

„ 4. Rückweg über die Karakorúm-Kette.

„ 6. △ Sultán Chúskun.

„ 8. Sássar-Pass.

„ 10. Kársar.

„ 12. Le.

Als geographisch neu hatte sich ergeben, dass die Karakorúm-Kette als die wasserscheidende Linie entgegentritt. Nach Norden, hatte man geglaubt, sei die Grenze des indisch-tibetischen Stromgebietes erst durch die Kette des Künlűn gebildet, den übrigens damals kein Europäer, weder vom Norden noch vom Süden her, erreicht hatte.

11) Die Dreieckmarke vor den Ortsnamen bedeutet Lagerplatz, aber an unbewohntem Orte.

Bis zur Kammhöhe des Karakorúm war auch Thomson gelangt, 1848; aber er hatte den Karakorúm-Pass nicht überschritten, und betrachtete diesen Pass als eine Vorstufe zum Künlün, „der als die wasserscheidende Kette noch folge."

Unter den Strömen, deren Lauf die Künlün-Kette durchscheidet, ist der Karakáshfluss, der unterhalb Shah-id-Úllah in einer Höhe etwas niederer als 10,900 F. austritt, der mächtigste, und auf diese Stelle als trennende sich beziehend unterscheiden die Handelsleute Verkehrswege, welche über den „westlichen" und solche, die über den „östlichen" Künlün (wie unser Élchi-Pass) führen. Am meisten geschieht diess von den Khotánis, welche ihrer topographischen Lage nach am häufigsten Veranlassung finden je nach Jahreszeit, auch je nach Sicherheit der Route, zu wählen; es ist diese Bezeichnung auch in die neueren Karten aufgenommen.

Die Trennung des Künlün in diese zwei Theile ist wohl berechtigt in Beziehung auf die Form der betreffenden Theile, sie ist aber nicht mit der relativen Grösse derselben übereinstimmend, da der „östliche Künlün" der ungleich ausgedehntere ist.

Bálti bis zum Mustágh-Passe, 1856.

Adolph hatte sich in jenem Sommer das nordwestliche Gebiet von Tíbet gewählt, und hatte sich nach dem Mustágh-Passe der Karakorúm-Kette gewandt. Er erreichte damals die Kammhöhe, konnte aber nach Norden nicht vordringen, da plündernde Horden dort sich aufhielten und auch für Eingeborene den Verkehr ganz unsicher gemacht hatten.

Für die Route vom Mustágh-Passe nach der Stadt Yárkand[12]) erhielt Adolph eine Reihe von 11 Tagemärschen noch zusammengestellt, was auch mit den allgemeinen auf neuere Daten basirten Uebersichtskarten sehr wohl übereinstimmt. Terrain-Angaben von Eingebornen liegen jetzt auch für den Theil nördlich von der Hauptkette zahlreich vor; aber Bereisung des Weges vom Mustágh-Passe nach Yarkand durch Europäer ist mir noch nicht bekannt.

---

12) vergl. From Skárdo (Bálti) to Yarkand (Turkistán). A secondary route, only partially passable for horses. „Results" vol. III, p. 113.

Adolphs Itinerar im nördlichen Bálti ergibt:

1856 Juli 15. Aufbruch von Húshe, bei der Moschee 10,440 F.
„ 16. bis 19. Die Sóspor-Gletscher.
„ 21. Chorkónda, 11,136 F.
„ 24. bis 29. Die Chorkónda-Gletscher.
August 1. Háldi, 8639 F.
„ 5. Shígar
„ 8. Chutrón.
„ 12. Braháldo.
„ 14. Askóli, 9710 F.
„ 17. Shúshing.
„ 20. bis 27. Die Mustágh Gletscher und der Mustágh-Pass[13]; Passhöhe 19,019 F.
„ 29. Shóra La-Pass, 16,556 F.
„ 31. Shígar, 7537 F.
September 1. Ankunft in Skárdo, Haupstadt von Bálti; Niveau des Indus bei Méndok Kăr 7255 F.

Da über Adolph's Routen andere Erläuterungen für diesesmal nicht mehr folgen werden, seien schon hier einige Bemerkungen nach seinen Mittheilungen und Manuscripten beigefügt.

Den Mustágh-Pass nennt Adolph die erste Uebergangsstelle, die westlich vom Karakorúm-Passe über die wasserscheidende Kette führt; für den allgemeinen Handelsverkehr ist dieser Pass ein zu schwieriger.

„Der Mustágh - Pass“, meldete Adolph aus Indien[14]) „ist für Pferde ganz ungangbar, auch für unbeladene; auf der südlichen und auf der nördlichen Seite befinden sich ausgedehnte Gletscher, ungleich grösser in ihrer Ausdehnung als die bedeutendsten Gletscher der Alpen. Erst in den obersten Dörfern erfuhr ich, dass der Weg über den Mustágh schon seit 4 Jahren (seit 1852) völlig gesperrt sei, da die

---

13) Aus jener mächtigen Gletschergruppe habe ich 7 grosse Aquarelle von Adolph erhalten; Gen. Nr. des Cataloges 634—640. Eine andere Gletscheransicht Adolph's aus diesem Gebiete, jene des Chorkónda-Gletschers (Gen. Nr. 632) habe ich als Tafel 10 im Atlas zu den „Results“ gegeben.

14) Nach Mittheilung durch Alex. v. Humboldt, aus Adolph's Schreiben an S. M. den König Friedrich Wilhelm IV. d. d. Raulpíndi, 5. Decbr. 1856, in der „Zeitschrift“ der Berliner geogr Gesellschaft, Neue Folge Bd. II, S. 159 u. ff.

rohen Húnze-Stämme, welche mit Rája Guláb Singh, dem Herrscher von Kashmír, Ladák und Bálti, in beständiger Fehde sind, jenseits des Passes offen als Räuber leben, die Karawanen plündern und deren Leute als Sklaven nach Badakshán verkaufen.

Am nördlichen Fusse des Mustágh waren kurz vorher 7 Leute angekommen, welche allein von 20 Personen, die von Yárkand über den Mustágh gehen wollten, einem räuberischen Anfalle von Húnzes in Turkistán glücklich entkommen waren.

Mit vieler Mühe gelang es mir daher, an hundert der unternehmendsten Leute aus den oberen Dörfern zu bewegen, mich so weit als möglich zu begleiten. Nach acht langen Märschen, wovon vier dem grossartigen Mustágh-Gletscher entlang führten, erreichte ich die Höhe des Mustágh-Passes. Ausgedehnte Firnmeere breiten sich rings um den Pass aus. Die Gipfel in der unmittelbaren Nähe des Passes sind im Allgemeinen 21,000 bis 22,000 Fuss hoch. Ich war bis jetzt nicht im Stande, meine Winkelmessungen zu berechnen. Ein hoher Gipfel in geringer Entfernung ist sicher über 24,000 Fuss hoch. Ungefähr 10 starke Märsche (meist 11) hätten mich nach Yárkand geführt". —

Zur näheren Bezeichnung sei noch beigefügt, was sich bei Berechnung von Adolph's Höhenmessungen ergeben hat.

Der Gipfel, den er als sicher über 24000 Fuss an Ort und Stelle schätzte, ist der westliche Masheribrúm-Peak, für den ich aus Adolph's Winkelgrössen und Distanzen die Höhe von 25,626 Fuss erhielt.[15])

Am Mustágh-Passe war $11^h\ 45^m$ Vm. Barometerstand (mit Barometer Adie 6) 14.989 engl. Zoll, Lufttemperatur 3.5° C.; um $12^h\ 40^m$ Nm. zeigte sich 15.004 engl. Zoll und 2.5° C. Die Höhe, die sich ergab, 19,019 Fuss, ist berechnet nach den correspondirenden Beobachtungen zu Le, Símla und Mắssúri.

Die Fortsetzung des Weges vom Mustágh-Passe gegen Yárkand hat Adolph wie folgt verzeichnet:

△ Shaklók, auf der rechten Seite des nördlichen Mustágh-Gletschers, Halteplatz beim Passübergange jenseits der Karakorúm-Kette.

---

15) „Results" Vol. II, p. 427, 1862. Die Höhe auf Walkers neuer Karte, von 1868, differirt nur sehr wenig; es ist dort 25,676 F. für jenen Gipfel angegeben.

1. Marsch: △ Tso Kha, kleiner See an der rechten Seitenmoräne. Bis △ Párong, am unteren Ende des nördlichen Mustágh-Gletschers.
2. „ △ Chángal (wohl für jángal gemeint[16]), Niederholz reich an Brennmaterial. Uebergang über den Skam La-Pass, schneefrei.
3. „ △ Shiágs Gámbo Chu, an einem kleinen Hochgebirgs-Bache. Uebergang über den Ágir-Pass, ohne Firne oder Gletscher; Lager am Nordfusse.
4. „ △ Surukovét. (Dieser und der vorhergehende Tagemarsch sehr lang und beschwerlich).
5. „ Nach △ Dóva über den gleichnamigen Pass. Uebergang leicht, Höhe unter der Schneegrenze. Es scheint diess die Uebergangsstelle über den westlichen Künlún zu sein, (und zwar westlicher und niederer gelegen als der später zu erwähnende Piriákh-Pass; die Künlún-Kette als solche wurde dabei Adolph nicht genannt.
6. „ △ Máliksha; △ Úrdalik, in einer weiten Thalmulde.
7. „ Ueber ein zur rechten Thalseite gelegenes Hochplateau nach △ Cheróska in einer Senkung; dann über den Pass Kuíkdo, von geringer relativer Höhe nach Khalastán, dem ersten Dorfe hier gegen Norden, im Tesnáb-Thale.
8. bis 11. Marsch. Ueber Kókiar bis Kárgalik das Tesnáb-Thal herab, dann (wie Adolph's eigene Route S. 23) über Poskám nach Yárkand.

Nordwestlich vom Mustágh-Passe sind uns später noch zwei Stellen als Uebergangspunkte über die Karakorúm-Kette genannt worden. Der eine dieser beiden Pässe, gegen 30 engl. Meilen vom Mustágh-Passe entfernt, führt über die Húnze-Firne in das Shíngshal-Thal; der Name, nach der Provinz im Norden, ist Shíngshal-Pass. Ueber die Höhe desselben kenne ich keine Angaben.

Der andere, der Húnze-Pass, ist der westlichste der bis jetzt bekannten in der Karakorúm-Kette. Ueber diesen führt der Ver-

16) Dass ein Hindostáni-Wort, welches aber in Indien selbst so häufig als Ortsbezeichnung vorkömmt, so weit sich verbreitet hat, darf längs Karawanenrouten nicht befremden.

kehrsweg zwischen Ghílghit und Yárkand; von Húnze zum Kamme durch ein kleines Seitenthal. Der Pass kann mit Lastthieren überschritten werden; seine Höhe ist kaum niedrer als zu 18,000 Fuss anzunehmen. Da von Ladák gegen Bálti und nordwestlich davon die Niederschlagsmenge verhältnissmässig rasch sich mehrt, verbindet sich damit auch grössere Menge von Schneeanhäufung in den Hochregionen, welche, ihrer unregelmässigen Vertheilung wegen, bisweilen selbst im Sommer das Ueberschreiten sehr erschwert. Im Winter und im Frühlinge, welch letzterer hier der Schneemenge wegen die gefährlichste Zeit der Pässe ist, bleibt diese Uebergangsstelle Monate lang ganz unbenützt. Einige Mittheilungen über diese Route nach Angaben von Eingebornen sind auch in den Berichten über die allmählige Ausdehnung der indischen Vermessungsarbeiten gegen Nordwesten[17]) bekannt gemacht worden.

Gegenwärtig gehört Ghílghit, nominell seit Jahren schon, als „Theil des westlichen Tíbet" zum Königreiche Kashmír. Doch hat das Eindringen der Truppen des Maharája nach Ghílghit, Búnji und Yásin unerwartete Schwierigkeit gefunden, die auch jetzt noch nicht als ganz überwunden zu betrachten sind. Ich folge darin der Ansicht Dr. G. W. von Leitner's, der als der erste Europäer und wissenschaftliche Forscher 1866 jene alten Länder der Dárden durchzogen hat und dort so viel des Unerwarteten und Wichtigen entdeckte.[18])

Von Ladák nach Yárkand und Káshgar, 1857.

In diesem Jahre wählte Adolph einen anderen, weit östlich gelegenen Weg zu etwaigem Ueberschreiten der Karakorúm-Kette, indem er sich vom unteren Ende des Salzsees Tsomognalarí in das Changchénmo-Thal wandte, um dort einen Pass zu finden.

Während meiner Untersuchungen am Tsomognalarí im Jahre vorher hatte ich zwar von einem Wege daselbst aus dem Districte Pangkóng

17) Montgomerie, T. G. Captain. Memorandum on the Progress of the Kashmir Series; with Map and Observations on the late Conquest of Gilgit, and other Incidental Matter. Calcutta, 1861.

18) Leitner's umfassender Publicationen werde ich in Band IV der „Reisen", unter anderem auch wegen der ethnographischen Ergebnisse aus Dardistán, noch wiederholt zu erwähnen haben.

nach Turkistán gehört, doch konnte ich mir weder dort noch, einige Monate später zu Le, bestimmte Angaben über die Terrainverhältnisse verschaffen. Adolph gelang es, jene Stelle zu benützen. Die Höhe des Passes schätzten wir, nach den ersten Angaben, die wir von Begleitern desselben erhielten, zu 18,800 F.[19]), was dem später von Hayward erhaltenen Werthe, 18,839 F., nahezu gleichzusetzen ist.

Ueberschreiten der Hauptkette in jenem Theile hatte man 1856 zum mindesten als seit langer Zeit aufgegeben geschildert. Es schien, als ob etwa Erdstürze oder die in der Firn- und Gletscher-Region nicht seltenen Veränderungen durch Lawinen und Gletscherabbrüche jene Route Jahre lang dem Verkehr entzogen hätten. Aber Adolph fand den Uebergang unerwartet gut ausführbar.

Da mir jetzt seine Manuscripte, Terrainskizzen und Aquarelle bis zum 11. August 1857, bis 15 Tage vor seinem Tode, vorliegen, die ohne Unterbrechung bis Kárgalik, 2 Tagereisen südlich von Yárkand, reichen, werde ich in den „Results" (von Vol. V an), in gleicher Art der Durchführung wie die übrigen von uns untersuchten Theile Hochasiens, auch jene Strecke des Karakorúm-Gebirges, welche Adolph nördlich vom Salzsee Tsomognalarí durchzogen hat, und sein Vordringen über den Künlún besprechen können; hier folgt allgemeiner Ueberblick.

Nach den Angaben, die man bald nach der Kunde von Adolph's Ermordung sowohl in Indien als in Russland sammelte, schien es, etwas abweichend von dem was jetzt in seinen eigenen Aufschreibungen sich zeigt, als ob sein Uebergang über die Karakorúm-Kette nur 30 engl. Meilen südöstlich von unserem gelegen habe, aber jener über die Künlúnkette viel weiter von unserem Élchi-Passe entfernt sei, und zwar gegen Osten bei Karangotágh liegend. Doch — wie ich auch auf der Karte des westlichen Hochasiens schon eingetragen, wenn auch im III. Bande der Reisen noch nicht zu erläutern Gelegenheit hatte — es liegt Adolph's Uebergangsstelle etwas über 70 engl. Meilen noch weiter südöstlich, als ich früher annahm; jener über den Künlún dagegen liegt westlich noch und nördlich von unserem Élchi-Passe; Entfernung 62 engl. Meilen.

Ich gebe hier sein „Itinerar" in tabellarischer Form, wie die vor-

---

19) „Results" vol. I. 1861, p. 60 und 63; vol. II. 1862, p. 424.

hergehenden. In seinem Manuscriptbande von 1857 ist die Aufzählung seiner einzelnen Tagemärsche, weil sie zugleich die „Uebersicht“ für die verschiedenen Untersuchungen und Messungen bietet, als Gruppe für sich nahe am Schlusse eingetragen worden, sie bildet dort die letzten beschriebenen Blätter, Seite 170—178 jenes Bandes, des 47. der ganzen Reihe unserer „Beobachtungs-Manuscripte.“

Zu uns gelangte dieser Band 1862, am 10. Januar. Wir verdanken es vor allem den Bemühungen und der Aufmerksamkeit Lord William Hay's, obersten Civilbeamten zu Símla im nordwestlichen Himálaya, auf alles, was Nachricht über Adolph's Schicksale bringen konnte, dass so auch diese Papiere gerettet wurden, ungeachtet der geraumen Zeit, die schon seit Adolph's Tode verflossen war.

Auch persönliche, bis dahin noch nicht bekannte Mittheilungen über seine letzten Routen konnten gesammelt werden, da 1861 durch den jetzt verstorbenen Oberst Irby, Chef des 51. englischen Regimentes, Murád, ein Jude aus Bokhára, der eine Zeit lang Adolph's Begleiter gewesen war und später in Le sich niedergelassen hatte, wo Irby ihn traf, veranlasst worden war, nach dem Pănjáb zu kommen; Murád hat schliesslich sehr liberal Entschädigung für Verluste erhalten, die er, nachweisbar, während Adolph's so gefährdeter letzter Wege erlitten hatte. Seine Angaben konnten noch in den Band II der „Results“ S. 530 bis 536 aufgenommen werden; aber das Itinerar, so wie es jetzt vorliegt, ist hier zum ersten Male in dieser Bestimmtheit gegeben, da ich Ende 1868 auch genaue Zeitangaben [20]) und zwar von Abdúllah, einem Mussălmán aus Amrítsar im Pănjáb, der in Adolph's Gefolge war, mir verschaffen konnte; diese liessen für die Hauptorte zwischen Kárgalik und Káshgar noch die Tage der Ankunft entnehmen.

Für die Strecke von Yárkand nach Káshgar, sowie für die Route von Yárkand nach Élchi habe ich überdiess jüngst, durch G. v. Leitner's Gefälligkeit, eine Wegkarte erhalten, angefertigt von einem Túrki-Handelsmann Namens Alamjáh; sie bietet vorzüglich von Kárgalik an für die bewohnten Orte gute Details in ihrer Art. Einen Reisebericht Alamjáh's, von Yárkand nach Élchi, Original persisch, hatte

20) Die neuen Daten über den Tag des Todes — 26. August 1857 — gab ich in dem Sitzungsberichte der k. b. Akad. d. Wissensch. 1869, S. 183—190.

v. Leitner im Jahre 1870, 1. bis 15. Juli, in seinem Journale zu Lahór „Public Opinion and Punjab Times“ veröffentlicht. Auch dieser liegt mir jetzt vor.

Die Zusammenstellung beginne ich wieder mit dem Wege durch das nördliche Ladák. Die Höhenangaben, die ich beifügte, habe ich, wo Gelegenheit dazu sich bot, theils den Beobachtungen längs unserer ersten Turkistán-Route entnommen, so im Karakásh-Thale, theils den spätern, noch zu besprechenden Arbeiten Haywards von 1868/69[21]); Johnson, der 1867 auch eine Strecke dieses Terrains durchzogen hat, gibt gerade dort nur Mittelwerthe in runden Zahlen ohne Bezeichnung bestimmter Punkte.

Wegen der Unsicherheit längs des weiten Weges, der ihm vorlag, hatte Adolph damals sich genöthigt gesehen, Instrumente, die nicht unbemerkt gehandhabt werden konnten oder durch ungewöhnliche Form bei gewisser Grösse hätten auffallen können, zurückzulassen[22]), so auch sein feingetheiltes Thermobarometer mit besonders dazu gefertigtem Siedeapparate (für Erwärmen auch des Quecksilbers in der Röhre). Sein Normal-Barometer „Pistor 11“ hatte er gleichfalls bei der Trennung von seinem indischen Gefolge zu Sultánpur, am 31. Mai, wie Eingangs erwähnt, an den Native-Doctor Hărkíshen zu correspondirenden Beobachtungen abgegeben. Er selbst hatte ein anderes Barometer mitgenommen, das Gefässbarometer „Traughton 2“. Dieses war mit Correction für Veränderung des Niveaus im Gefässe versehen, für Ablesung ohne directe Einstellung der Scala auf den Nullpunkt; er hoffte dieses, bei den verhältnissmässig kleinen Dimensionen und einer einfachen Verpackung in einen festen Lederschlauch, in den Zeltgeräthen leicht verbergen zu können. Doch war dasselbe schon ehe er Ladák erreichte durch den Sturz eines Trägers in Unordnung gerathen.

---

21) Bezeichnet „Hay“ und „Hay-Geo.“ Vergl. oben S. 9.

22) Mit mittelgrossen Instrumenten, Chronometern, kleineren Thermometern (für Luft- und Bodentemperatur), auch mit Messinstrumenten wie Sextant, prismatischer Compass, Klinometer und Verticalkreis, war Adolph wohl versehen. Von all diesen finden sich zahlreiche Anwendung in seinem Manuscripte, von der letzteren Gruppe auch auf den Erläuterungen seiner Kartenskizzen und landschaftlichen Bilder.

Folgendes sind die wesentlichsten Daten seines Itinerares.

1857. Juni 8. Aufbruch vom unteren Ende des Tsomognalarí-Sees[23]) 14,010 F., in Pangkóng.

„ 10. Ueber den Masimík-Pass, 18,724 F. Hay.-Geo.; Lager bei △ Rímdi.

„ 11. △ Pámshalan, am Changchénmo Flusse; Lagerstätte von Hirten.

„ 14.—17. Beobachtungen im oberen Chang Lang-Thale.

„ 18. Ueber die Karakorúm-Kette viâ Changchénmo- oder Chang Lang-Pass, 18,839 F. Hay.

„ 19. △ Búrze Thang.

„ 20. △ Tso Thang, an See dieses Namens.[24])

„ 24. Lager ohne Trinkwasser zwischen grossen Salzpfuhlen.

„ 26. Ueber Seitenkamm zur Rechten des Karakásh-Thales nach Lager Búrze-lik im oberen Karakásh-Thale, unterhalb des Sees Kiúk Kiöl. (Kiúk Kiől, Höhe 15,460 F.)

„ 27. △ Ruine Sikånder Mokhám, Höhe (1856 von uns bestimmt) 13,864 F.

„ 30. Gulbashén; Niveau des Karakásh-Flusses (1856 bestimmt) 12,252 F.

Juli 1. Yáshem-Brüche.

„ 2. bis 4. Halt in △ Súget; Höhe unseres Lagers von 1856 12,960 F.

„ 5. Fort Shah-id-Úllah, auch Shádula genannt, 11,951 F. Hay.-Geo. und nach △ Kalchúskun, 14,147 F. Hay.-Geo.

„ 6. bis 9. Taikotál, am Ost-Abhange des Kirghíz-Passes.

„ 10. bis 11. Zurück nach Kalchúskun.

„ 12. bis 27. △ Mazár in einem Seitenthale südlich vom Kilián-Passe.

---

23) Diese Höhe des Tsomognalarí ist die von mir barometrisch erhaltene. In der Walker'schen Karte von 1868 ist 13,931 Fuss angegeben, ohne nähere Details. Differenz relativ gering.

24) Thang, das tibetische Wort für „Ebene, offene Fläche", kömmt häufig in zusammengesetzten Ortsnamen vor; hier für 2 sich folgende Halteplätze. Tso bedeutet „See"; Búrze ist Pflanzenname (s. S. 25). Aus Bhután, dem tibetischen Sprachgebiete am Südabhange des Himálaya, hatte ich des Namens Tsetháng, „flacher Gipfel" für einen Ort auf dem Rücken eines Vorberges zu erwähnen, u. s. w.; Glossary in „Results" III, S. 255.

Juli 28. und 29. Halt ober △ Mazár.
„ 30. / August 1. { Ueber Fluss Tógro-su; Lager daselbst.
„ 2. △ Bóstan.
„ 4. Ueber die Künlün-Kette viâ Kilián-Pass, ca. 17,200 F.; nach △ Ákhil im Kilián-Thale.
„ 5. Chisgáulik.
„ 6. Dáhni.
„ 7. Kilián.
„ 8. Bória.
„ 9. bis 11. Morgens aus Kilián-Thal über kleine secundäre Erhebung nach Kárgalik im Tesnáb-Thale; Höhe 5118 F. Hay.-Geo.
„ 14. Poskám, 4 Meilen südlich von Yárkand-Fluss.
„ 16. Ueber Yárkand-Fluss an die Wälle von Yárkand; Höhe 4384 F. Hay.-Geo.
„ 17. bis 23. Umgebungen von Yárkand; Shámla Khója, Négsar; dann über Kízili nach Yángsar oder Yang Híssar, Stadt mit Fort; Höhe 4690 F. Hay.-Geo.
„ 25. Ankunft 2 Meilen südlich von der Stadt Káshgar.
„ 26. Káshgar, 4536 Hay.-Geo.; unheilvolles Zusammentreffen mit Váli Khan.

Als Erläuterung füge ich über einige der wichtigsten Stellen topographische Angaben aus Adolph's Manuscripten und Aufnahmen bei; ebenso bleibt noch der Veranlassungen zu dem Aufenthalte auf der Südseite des Künlün-Gebirges zu erwähnen.

Pangmíg, 14,160 F., der Hauptort des Pangkóng-Districtes, war der letzte bewohnte Ort gewesen, den Adolph's Route diesseits der nördlichen Mittelstufen des Künlün in Turkistán berührte. Seine Begleiter hatten nicht versäumt ihn darauf aufmerksam zu machen, und er hatte deshalb mehrere Tage hier verweilt um für die weite Reise durch die Hochwüsten, so gut die Umstände es erlaubten, sich auszurüsten. Die Vorbereitungen waren ihm auch dadurch nicht wenig erschwert, dass er (wie oben erwähnt, S. 8), um unbemerkt zu bleiben,

Le mit seinen für jene Gebiete so wichtigen Bázars absichtlich vermieden hatte.

Der Masimík-Pass, obwohl etwas niederer als der Uebergang über die Hauptkette, hatte mehr Schwierigkeit geboten als jener. Auf der Nordseite des Masimík kömmt aus Osten, parallel der Seitenkette, in welcher der Pass gelegen ist, ein ziemlich grosses, wenn auch nicht entsprechend wasserreiches Fluss-Thal, das Changchénmo-Thal herab; Pámshalan, eine Lagerstätte der Hirten daselbst, liess sich zwar als solche erkennen, sowohl an mauerähnlich als Windschutz aufgerichteten Steingruppen, als auch an Stellen, die vorzugsweise als Feuerplätze benützt wurden; aber zur Zeit war sie noch verlassen. Diess ist nicht unerwartet, da das nahezu gleich hoch gelegene aber günstiger exponirte Kórdzok[25]), wo sogar ein festes Steingebäude vorhanden ist, doch nicht früher als in der ersten Hälfte Junis bezogen wird.

Das letzte Ansteigen zum Uebergange über die Karakorúm-Kette führt hier durch ein kleines Seitenthal zur Linken des Changchénmo-Flusses, für welches Adolph den Namen Chang Lang angegeben erhielt, der demnach auch für den Pass gebührt. Viele seiner Leute hatten ihm denselben Changchénmo-Pass genannt, da das gleichnamige Thal die in seinen Umgebungen am meisten hervortretende topographische Gestaltung bietet.

Ferner wurde Adolph dieser Pass auch Yángi Daván genannt, eine Bezeichnung, die aber bei den später folgenden Reisen nicht mehr vorkömmt; die Bedeutung des Wortes, nemlich „Neu-Pass", die an sich mit localen Verhältnissen nicht zusammenhängt, lässt sich für die Zeit des Ueberganges, den Adolph 1857 ausführte, sehr wohl mit dem Umstande verbinden, dass überhaupt Jahre lang vorher selbst von den Eingebornen keiner der Pässe daselbst, die man jetzt kennen gelernt hat, benützt worden war.

Es liegen mir 4 Aquarelle von Adolph vor, welche die Kammlinie

---

25) Kórdzok liegt im oberen Theile des Tsomoríri-Beckens, und in einiger Entfernung vom Ufer jenes Salzsees. Breite 32° 56'; Länge 78° 13' östl. von Greenwich; Höhe 15,349 engl. F. Beschrieben „Reisen", Band III, S. 148, mit Abbildung auf Taf. XVII.

und die Abdachungen des Karakorúm in den Umgebungen des Chang Lang-Passes zum Gegenstande haben.[26])

Bei der Uebergangsstelle selbst zeigen sich Formen des Terrains, welche am meisten Aehnlichkeit haben, so unerwartet bei solcher Höhe und Mächtigkeit dieser Vergleich erscheinen mag, mit den flach sich ausbreitenden Zügen eines Mittel-Gebirges, wie Thüringerwald, Vogesen oder Jura. Das Bild allerdings, das hier sich bietet, ist eine Felsenwüste ohne Spur von Grün, die Dimensionen, die vertikalen und die horizontalen sind ungleich grössere, aber die resultirende Neigung ist dieselbe, und das hier rings zu Tage tretende Gestein, grauer sedimentärer Schiefer, zeigt in diesem Theile des Karakorúm-Gebirges selbst in den kahlen Contouren nirgend schroffe Stufen.

Die Gehänge der Karakorúm-Kette zu beiden Seiten des Chang Lang-Passes sind, ebenso wie an den anderen Stellen der Kette von gleicher Höhe, vegetationsleer; und hier waren selbst bis zu 1500 und 2000 F. tiefer herab, nur ganz vereinzelt verkümmerte Vegetationsreste bemerkt worden, welche damals, obwohl schon Mitte Juni vorüber, nichts von neuen Keimen entdecken liessen. Die Stöckchen jener kleinen perennirenden Gewächse, wie die „Búrze" (Eurotia), „Tami" (Artemisia) „Yabágre" (Myricaria) — als die ersten holzbildenden Pflanzen in solchen Höhen für den Wanderer besonders wichtig — treten hier gleichfalls erst etwas tiefer auf als wir sie auf der Nordseite des Karakorúm weiter westlich zwischen Núbra u. Yárkand gefunden hatten.

Sonderbarer Weise war später von Johnson und dann auch von Shaw und Hayward unter den in den Hochregionen vorkommenden Gewächsen mit Holzfaserbildung als die vorherrschende eine „lavender-like plant" angeführt; der Beschreibung nach schien es mir als ob etwa die Myricaria gemeint sei. Henderson aber hat jetzt, nach persönlichen Mittheilungen Shaws als dieser mit ihm zugleich Forsyth's Gefährte war, mit Bestimmtheit erwähnt, dass jene „lavendelartige Pflanze" eine Eurotia ist. Species nannte er nicht.

Als bezeichnend für die systematisch leicht zu trennende Familien-

---

26) Im 4. Bande der „Reisen" werde ich die Ansicht der Turkistán-Seite gegen Déra Níshu als landschaftliche Tafel geben, und auf Tafel VIII der „Gebirgsprofile" die Contour der Kammlinien, für die sich gleichfalls ein sehr guter Standpunkt dort geboten hatte.

verschiedenheit jener 3 Genera füge ich bei, dass die Lavandula zu den Labiaten gehören würde, während Myricaria eine Tamariscinee ist, Eurotia eine Chenopodee, und zwar Salzpflanze von der Section der Salsolaceen.

Alle Exemplare unseres Herbariums sind E. ceratoides C. A. Meyer; im k. Staatsherbarium zu München, wovon mir Herr Dr. Schultes die entsprechenden Exemplare gefälligst vorlegte, ist diese Species vielfach vertreten; ich nenne aus diesem als Localitäten characteristisch für ihre weite Verbreitung: Sibirien, Dzáisang-See in der Dsúngarei, Ufer der Wolga und am Kaspischen Meere, Afghanistán, und auch noch solche aus Unteröstreich und Mähren.

Eine zweite Species des Münchner Herbariums, Eurotia ferruginea Adans, dort 1 Exemplar aus Persien und aus 1 Amerika (?), ist unter den von uns gesammelten Eurotien aus Tíbet und Turkistán nicht vorgekommen.

Die dunkle monotone Farbe des Gesteines am Chang Lang-Passe trägt auch dazu bei, das Oede jener Landschaft noch mehr hervortreten zu lassen; in den nächsten Umgebungen des Passes wird keiner der grösseren Gipfel sichtbar, die etwa, wenn auch nur aus der Ferne, wohl markirte Schneeflächen gezeigt hätten. Vereinzelte Firnlager dagegen sieht man in dem Umblicke, der sich bietet, und zwar waren diese, ihrer geringen Ausdehnung wegen, auch auf dem Nordgehänge hier, noch mehr als 1000 bis 1200 Fuss über der Passhöhe gelegen.

Im Mittel für beide Seiten und jene Stellen mit eingeschlossen, wo Muldenform das Anhäufen von Hochfirnen begünstigt, hat sich hier eine Höhe der Schneegrenze von 19,000 Fuss ergeben.

Sehr bald nach dem ersten Absteigen gegen Norden folgten nun Hochflächen, in ihren Formen ähnlich jenen, deren mehrere auch auf dem westlicheren Wege nördlich vom Karakorúm-Passe zu durchziehen sind; [27]) aber in ihren horizontalen Dimensionen sind sie hier noch bedeutend grösser. Letzteres ist es, was hier in einer Meereshöhe der Basis von 16,000 bis 17,000 Fuss den eigenthümlichen Effect des landschaftlichen Bildes um so lebhafter fühlen macht; die umgebenden Kämme

27) Beschreibung, Detail für jene Route gebend, folgt in Abschn. II.

und Gipfel zeigen vorherrschend kleine Winkelgrössen und lassen doch in ihrer Gestaltung noch bedeutende relative Höhe erkennen.[28])

Das erste dieser Plateaux, durch welches Adolph 2 Tage zu marschiren hatte, ist jenes, das ihm Língzi Thang genannt wurde, mit einer mittleren Höhe der Bodenfläche in den Umgebungen des Sees Tso Thang von 17,000 Fuss.

Dann folgte der Uebergang über einen Kamm, welcher entlang der rechten Seite des oberen Karakásh-Thales sich erhebt und dieses als Flussthal der gewöhnlichen Form von den unregelmässig sich ausdehnenden, östlicher gelegenen Plateaux trennt. Es ist diess eine Uebergangsstelle von ca. 17,500 F. Höhe; Namen hat Adolph für dieselbe nicht erhalten. Es mag solcher Stellen wohl mehrere noch in diesem Seitenkamme geben.

Der Weg bis Fort Shah-id-Úllah, das Adolph damals, 1857, unbewohnt fand, führte dem Karakásh-Thale entlang, mehrmals die Seite wechselnd, und zwar nicht wegen Schwierigkeiten des Marsches in Folge der Ufergestaltung, sondern wegen der Vertheilung mehr oder weniger günstiger Weideplätze die man als Haltestellen aufsuchen muss.

Von Shah-id-Úllah, unentschlossen noch über seine weitere Route, stieg Adolph nach △ Kalchúskun hinan, am Ost-Abhange des Kirghíz-Passes, welcher hier seitlich die Uebergangsstelle vom Gebiete des Karakáshflusses in jenes des Yárkandflusses bildet; dieser Pass wird von den Karawanen benützt, die von Yárkand aus das Thal heraufgekommen sind oder, was jetzt das gewöhnlichere ist, einen der Pässe des West-Künlű́n überschritten haben, wenn sie dann nicht den Karakorúm-Pass, sondern den Chang Lang-Pass über die Hauptkette wählen.

Obwohl in der Längendepression gelegen, die hier der Künlű́n-Kette entlang sich hinzieht, ist doch die Erhebung des Kirzhíz-Passes eine verhältnissmässig bedeutende; sie erreicht (nach Hay.) 17,092 F.

Zu △ Taikotál, seiner nächsten Haltestelle gegen Nordosten, geschah es, dass in der Nacht von 6. auf 7. Juli drei von Adolph's Yarkándi-Pferdeführern mit Pferden und verschiedenen Gepäckstücken, begünstigt durch Schneefall und Sturm, während der Nacht aus dem Lager ver-

28) Ein dem Chang Lang nahezu gleicher Pass, sagten Adolph's Leute, läge ca. 5 engl. Meilen nordwestlich. Des noch höheren Lúmkang-Passes, wird bei Johnson's Route zu erwähnen sein. (S. 34)

schwanden, da Mohámmad Amín, der sie engagirt hatte, ihnen zu viel Vertrauen schenkte und sie ganz unbeaufsichtigt gelassen hatte. Er wurde eiligst mit Murád zusammen ausgesandt, sie zu verfolgen. Acht oder zwölf Meilen vom Lagerplatze entfernt traf er 4 der schwächeren durch den Marsch sehr angestrengten Thiere, welche die Diebe zurückgelassen hatten, um schnelle Verfolgung zu verhindern. (Später, aber erst jenseits des Künlún, zu Kárgalik, gelangte Adolph auch wieder in Besitz der 7 anderen Pferde, da die Diebe dort durch die geraubten Gegenstände, die sie im Bazár verkaufen wollten, aufgefallen waren.) Die bedeutende Verminderung seiner Lastthiere, bald auch die wegen des Aufstandes in Turkistán nothwendigen Vorsichtsmassregeln hatten Adolph auf der Südseite des Kilián-Passes bis zum 4. August festgehalten.

Am 12. Juli nemlich, etwas unterhalb △ Mazár, wurde des Nachts grosses Feuer in der Nähe bemerkt, Wachen wurden aufgestellt und am Morgen des 13. zeigte sich, dass nicht weit von Adolph's Lagerplatze eine Yarkándi-Karawane ihr Lager aufgeschlagen hatte; diese selbst erwies sich zwar freundlich, gab sogar zwei Pferde zu kaufen, aber sie brachte auch die Nachricht von den Unruhen in Yárkand. Er war dies die erste Begegnung mit Menschen seit 7. Juni.

Am folgenden Tage kamen 3 berittene Leute denselben Weg herab, Badakshánis, die sich aus Sánju in Yárkand der Revolution wegen geflüchtet hatten und deren rohes Auftreten auch Vorsicht diesen selbst gegenüber nöthig machte. Am 21. entsandte Adolph Mohámmad Amín und Murád nach Norden, die in den ersten bewohnten Ort jenseits des Kammes zu gehen hatten, um dort wo möglich genaue Nachrichten über den gegenwärtigen Zustand des Landes und über die Wahl des Weges sich zu verschaffen, da das längere Verweilen in dem wüsten Steppengebiet gleichfalls von Tag zu Tag sich erschwerte. Es ergab sich, dass wenigstens das nördlich folgende Kilián Thal in Khótan noch nicht in den Aufstand hereingezogen worden war und diess gab etwas Hoffnung, Adolph könne, wenn einmal unbehindert jenseits der Grenze und der ersten Stationen, das überhaupt allein zu wählende Vordringen nach bewohnten Orten auch glücklich bis jenseits der gefährdeten Gebiete durchführen.

Ausserhalb der Stadt Yárkand, die er zu umgehen suchte, traf er mit der Truppe Dil Khans zusammen, der als Vasalle Sáyad Váli Khans hier auftrat und die in Yárkand eingeschlossenen „Katáis", die chinesische Besatzung, belagerte. Adolph gelang es durch Geschenke sich freundliche Aufnahme zu verschaffen und er hoffte baldigst seinen Marsch fortsetzen zu können. Aber ein Ausfall der Katáis, die am folgenden Tage schon Dil Khan in die Flucht schlugen, hatte Adolph genöthigt mehrere Tage noch in den Umgebungen von Yárkand sich aufzuhalten[29]), wollte er nicht mit wilden Truppen zugleich direct nach Káshgar aufbrechen. Nicht ohne Schwierigkeit war es dabei, von den Katáis unbemerkt zu bleiben. Diess gelang; aber zu Káshgar sollte ihn vor Váli Khan keine Vorsicht mehr schützen können!

Auch gegen Mohámmad Amín, Abdúllah, Murád und einen Tibeter, die als seine letzten Begleiter auf der Strecke von Yárkand nach Káshgar bei Adolph ausgeharrt hatten, wurde sogleich feindlich aufgetreten; sie wurden in einen dunklen Kerker geworfen, und Abdúllah, „weil ein Indier", wurde dann an einen Mann Namens Túzak, für 25 Rupís, als Sklave verkauft.

Sehr bald darauf, Ende September, wurde Váli Khan durch Vordringen der Chinesen aus Káshgar vertrieben und floh nach Kókand, gefolgt nicht nur von seiner ganzen Truppe, sondern auch von einer grossen Anzahl der Bewohner Káshgars, welche wegen ihrer Parteinahme für Váli Khan die Rache der Chinesen zu fürchten hatten.

Mohámmad Amín und Murád wurden von den Chinesen frei gelassen, zogen sich aber auch so bald als möglich nach Kókand zurück. Abdúllah war schon bei der Flucht der Truppen dahin mitgenommen worden.

---

29) Niáz Mohámmad, der als der erste Yarkándi nach Europa kam — im Jahre 1869 als Begleiter und auf Kosten G. W. v. Leitners — hatte von jenem Verweilen Adolph's bei Yárkand gewusst und unter anderem Leitner erzählt, dass Adolph bei seinem Vater einmal wohnte.

Niáz Mohámmad hat auch nach seiner Rückkehr nach Yárkand seine Correspondenz mit Leitner noch fortgesetzt. Wie er im Sommer 1873 schrieb, hat er vor, im Jahre 1874 wieder zu kommen, wozu für ihn die gegenwärtigen politischen Verhältnisse und Anschluss an die englische Mission, der sich bieten wird, nur günstiger noch sich gestaltet haben.

Dort traf er einen Sáyad[30]) aus Pesháur, Namens Mián Khalíl, der ihn hier um den Betrag der bezahlten 25 Rupis wieder freikaufte.

Von Kókand gelangte er auf einer gegen Westen sich ausbeugenden Route und nach wiederholtem längeren Aufenthalte an verschiedenen Stationen über Khúchand und Samarkánd nach Bokhára, dann über Balkh, Faizasbád (die Hauptstadt von Badakshán) und Kábul nach Pesháur, wo er am 15. December 1859 eintraf.

Einige Jahre später kam auch Mohámmad Amín nach Indien herab und nahm seinen bleibenden Wohnsitz im Pănjáb, da es ihm gelang, eine wenn auch untergeordnete Stelle als „Stations-Agent", und zwar als Berichterstatter für die Verhältnisse des Verkehres und der social-politischen Stimmung der Bewohner in den nordindischen Provinzen und ihren Nachbarländern, zu erhalten. Er hatte dabei bisweilen ausgedehnte Strecken der Grenzgebiete zu bereisen. Im Frühlinge 1870, als er von Le nach dem Pănjab zurückkehrte, verlor er durch einen Lawinensturz im Himálaya, nicht ferne mehr von den milden Regionen der Vorberge, sein Leben.

Die orographischen Verhältnisse des Künlün in den Umgebungen von Adolph's Route erwiesen sich als sehr wichtig für den Verkehr.

Der Kilián-Kamm, über den Adolphs Weg führte, bildet einen Theil des „westlichen Künlűn" (s. o. S. 14); er zweigt sich ab als Seitenkamm gegen Nordnordost und Nordost, wendet sich einer kurzen Strecke entlang, mit einer Senkung in welcher der Pass gelegen gelegen ist, nach Osten, dann nach Norden 20 bis 30° Osten. Es kommen in diesem Kamme noch Erhebungen über 20,000 Fuss vor, während in geringer Entfernung von der Abzweigungsstelle desselben in dem hier westöstlich gerichteten Theile der Künlűn-Kette die Senkung zur Austrittsstelle des Karakásh-Flusses gelegen ist.

Auch über andere Pässe noch im westlichen Künlűn und in dem sich

30) Sáyad, auch in der Form Said, Sáyid oder Sáiyid, ist eine eigenthümliche, dem Kastenwesen ähnliche Unterscheidung bei den sonst kastenfreien Bekennern des Islám. So bezeichnen sich nemlich jene ziemlich zahlreichen Mussălmáns, die ihre Abstammung auf Husáin, den Sohn Áli's und Enkel Mohámmad's zurückführen.

Der Mussălmán, den ich als Múnshi von Calcutta nach Europa mitgenommen hatte, war ebenfalls ein Sáyad, aber aus Bengalen. „Results" III, Glossary p. 138.

abzweigenden Kilián-Kamm, die als Karawanen-Wege benützt werden, fand ich ausführliche Angaben in Adolph's letztem Beobachtungs-Manuscripte.

Als der zunächst gelegene im Kilián-Kamme, war ihm der Sánju-Pass beschrieben worden, den dann 1865 Johnson auf seinem Rückwege aus Khótan überschritt und der auch für die Verbindung mit Yárkand in den letzten Jahren vielfach benützt wurde; dieser Pass liegt vom Kilián-Passe noch etwas östlich. Westlich folgt, gleichfalls noch im Kilián-Kamme, der Kárlik-Pass (auf Hayward's Karte später Kullik geschrieben). In der Künlün-Kette selbst liegt als der erste Pass im Westen der Yángi Daván [31]; er wurde Adolph, nach dem nächsten grossen Orte im Norden, auch Kókiar-P. (Kugiar bei Hayward) genannt. In geringer Entfernung von diesem folgt der Piriákh-Pass. Die Wege über diese beiden Pässe, die ich nach Adolph's Routenangaben schon auf meiner letzten Karte eintragen konnte, vereinen sich ziemlich bald im oberen Becken des Tisnáb-Flusses; die Fortsetzung der Route verlässt dann dieses Thal, über den Tópo-Daván in das Kókiar Seitenthal führend, und geht über Yúlarik nach Kárgalik, wodurch eine westliche Krümmung des Tisnáb-Thales abgeschnitten wird. Der Name Yángi Daván oder „Neu Pass" macht es wahrscheinlich, dass dort der Weg noch nicht sehr lange bekannt ist, oder dass er wenigstens vergessen sein mochte und erst seit dem unter Guláb Singh lebhafter gewordenen Verkehre mit Kaschmír wieder benützt wird. Piriákh [32] bedeutet „Kamm (des) Schnees", bezieht sich also wohl auf das Ueberschreiten von Schnee, wie solches für einige Monate des Jahres mit Bestimmtheit zu erwarten ist, da die Höhe jedenfalls mehr als 15000 Fuss erreicht. Auch das Vorhandensein permanenter Firnlager ist bei den noch immer sehr bedeutenden Erhebungen in den nächsten Umgebungen wohl möglich, wenn zugleich muldenförmige Gestaltung der oberen Terraintheile die

---

31) Dieser Name ist derselbe, dessen ich auch bei der Besprechung des Chang Lang zu erwähnen hatte (s. o. S. 24); nach der Bedeutung desselben (Neu Pass) ist Wiederholung nicht unerwartet. Ein dritter „Neu Pass" ist bei Johnson's Route über den Künlün anzuführen.

32) Der Name Piriákh wird von den Yarkándis im Sinne des Wortes „Alpen" häufig für den Künlün im allgemeinen gebraucht im Gegensatze zu dem östlich von Yárkand gegen das Pámir-Hochland ansteigenden Kízil Yart- oder „Roth-Fels"-Gebirge.

Anhäufung begünstigt. Für die Schneegrenze in gleicher Breite, in den Umgebungen des Élchi-Passes, hatten wir eine mittlere Höhe von 15800 F. auf der Südseite und von 15100 F. auf der Nordseite erhalten.

Die Höhe des Yángi Daván wurde von Hayward zu 16,500 Fuss geschätzt; Messung, in Verbindung etwa mit Ueberschreitung durch Europäer, liegt bis jetzt nicht vor.

Das Karakásh-Thal selbst wird von dort, wo es die Künlún-Kette durchzieht, fast niemals als Weg nach Élchi gewählt. Wie Mohámmad Amín uns sagte, der einmal diese Route gemacht hatte, ist dieselbe nur im Winter möglich, bei so niederem Wasserstande, dass die trockenen Uferränder der ganzen grossen Thalenge entlang als Pfade benützt werden können. Das Wasser drängt sich an vielen Stellen so nahe an die Felsen heran, dass in jeder anderen Jahreszeit häufiges Kreuzen des Flusses nöthig wäre, was dort, wo es weder Brücken gibt noch Fähren oder auch nur Flösse, der bedeutenden Wassermenge wegen nicht mehr auszuführen wäre.

2. Englische Reisen und officielle Sendungen von 1865 bis 1873/74.

Neue Bereisungen Turkistáns. Die Aufstellung officieller Residenten zu Le. — W. H. Johnson von Le über den Lúmkang- und über den östlichen Yángi-Pass nach Élchi in Khótan, Rückkehr über den Sánju- und den Karakorúm-Pass; 14. Juli bis 1. December 1865. — Robert Shaw und George J. W. Hayward, meist getrennt. Ueber den Chang Lang- und den Sánju-Pass nach Yárkand und Káshgar; zurück über den Sánju-Pass; dann über den Karakorúm-Pass Shaw, über den Chang Lang-Pass Hayward; Ende September 1868 bis Anfangs Juli 1869. — Erste officielle Mission des Commissioners Forsyth, mit Henderson und Shaw, bis Yárkand und zurück nach Le, den Chang Lang- und den Sánju-Pass beide Male benützend; 7. Juli bis 12. October 1870. — Forsyth's zweite officielle Mission, mit grösserer Begleitung; von Le bis Yárkand Mitte September bis 5. November, bis Káshgar 14. December 1873. — (Russische Reisende im Thian Shan, auch in Káshgar.)

W. H. Johnson; nach Élchi in Khótan.

Das Vordringen über den Karakorúm und den Künlún wurde 1865, von Johnson, Civilbeamten der indischen Landesvermessung, wieder begonnen.

Gegenwärtig ist Johnson „Joint Commissioner“ zu Le. Wegen der vielfachen Verbindung dieser Stellung mit den folgenden Reisen seien schon hier die Daten über die Aufgabe und die Entstehung dieses indischen Beamtenpostens mitgetheilt.

Englische Zollcontrolle kam nach Ladák in Folge von Handelsverträgen zwischen Englisch-Indien und Kashmír, zu dem Ladák als Provinz gehört. Erste Veranlassung zu diesen Verträgen waren die gründlichen Daten[33]) gewesen, welche Mr. Davies, Secretär der Regierung im Pănjáb gesammelt, und 1862 officiell publicirt hatte.

Das Abschliessen der Handelsverträge[34]) war aber erst 1866 zu Stande gekommen, durch Mr. F. D. Forsyth, (auch Leiter der später zu erwähnenden Missionen von 1870 und 1873/74). Damals war derselbe als Chief Commissioner der Trans Sutlej Provinces in Srinágger gewesen; im Jahre 1868 war er dann nach Le gekommen, um die Regelung der Handelsverhältnisse zu inspiciren.

Es war ein Beamter zu Le aufgestellt worden, und als erster kam dahin 1867 Dr. Cayley; er hatte für Ladák die vereinbarte Zollreduction für Transitgüter zu überwachen und Daten über den Zustand und die Wahl der Wege sich zu verschaffen. Zwischen Dr. Cayley und Johnson hatte Robert Shaw (nach seiner Reise von 1868/69[35]) einige Zeit die Stelle zu Le erhalten.

Der englische „Resident" zu Srinágger, dessen Posten schon länger bestand, wurde nun „Commissioner", und jener zu Le ist diesem als „Joint-Commissioner" beigegeben. Zur Zeit unserer Reisen gab es einen Residenten für Politik und Handel nur in Srinágger und auch dort beschränkte sich sein Aufenthalt meist auf die Sommermonate. In den letzten Jahren ist dagegen die entsprechende Stelle selbst zu Le auch während des Winters besetzt geblieben.

---

33) The Trade and Resources of the Countries on the North-western Boundary of British India. By R. H. Davies Secrty. to Govt. Punjab. 1. July 1862 Lahore: Printed at the Government Press. With. 6 fol. Maps.

Officieller Brief mit sehr sorgfältiger vergleichender Zusammenstellung nach Gebieten und Handelsobjecten, von S. 6—90, und über 500 Seiten tabellarischer und statistischer Tabellen. M. Davies hat auch unserer Routen von 1856 und 1857 sowie der Angaben unseres Führers Mohámmad Amín mehrmals sehr eingehend erwähnt, S. 29, Appendix. IV A, S. XXII a bis o und App. XXIX A, S. CCCXII bis S. CCCLXXII sowie auf Karte IV.

34) Es wurde dabei mit dem Rája von Káshmir ein Durchgangszoll auf den Waaren-Verkehr zwischen Indien und Turkistán von nicht mehr als 5 Procent des Werthes vereinbart; früher war der Zoll ungleich höher, und zwar vom Werthe unabhängig noch Pferdeladungen, und nach der Grösse der durchzogenen Strecken erhoben.

35) Bericht darüber s. S. 37 und ff.

Johnson's Veranlassung zu seiner Reise nach Khótan war unmittelbare Aufforderung Habíb Úllah's, des damaligen Herrschers, der sich wohl eben wegen seiner Vertreibung der Chinesen, etwa auch wegen des erfolgreichen Auftreten Mohámmad Yákub's in Káshgar und Yárkand die Freundschaft seiner Nachbarländer im Süden sichern wollte.

Johnson's Routen von Le aus, das er 1865 am 14. Juli verliess und am 1. December wieder erreichte, gebe ich hier in einer allgemeinen Uebersicht; eine detaillirte Zusammenstellung, nach Tagen und mit genauer Angabe der Vertheilung seiner Märsche, lässt sich seinem officiellen Berichte [36]) nicht entnehmen:

Er überschritt gegen Norden die Karakorúm-Kette am Lúmkang-Passe, 19,533 F. Johns., ungefähr 15 engl. Meilen weiter südöstlich gelegen und 700 Fuss höher als der Chang Lang-Pass. Sein Uebergang über den östlichen Künlün war der Yángi- oder „Neu-Pass" [37]); Höhe 19,500 F. Johns.; (1857 wurde uns ein „Pass nach Yurungkásh" dort angegeben.) Dann führte der Weg noch über einen Seitenkamm der gegen Norden vorliegt; die zweite Uebergangsstelle ist der Náia Khan-Pass, 18,660 F. Johns.; sie wurde gewählt, um die dort sehr bedeutende Krümmung und steile Verengung des Thales abzuschneiden. Johnson war dabei von Eingebornen geführt, welche Habíb Úllah ihm in sein Lager am Karakásh-Flusse entgegengeschickt hatte; eine zahlreiche officielle Gesandtschaft empfing ihn zu △ Brínjga, der ersten Haltestelle nördlich vom Náia Khan-Passe.

Dieser Weg, der für den gewöhnlichen Verkehr bis dahin nicht benützt worden war und der wohl, wegen grösserer Höhen und selbst grösserer Marschroute, auch jetzt wieder aufgegeben ist, wurde, wie man Johnson sagte, erst das Jahr vorher von einem Khotáni-Emissär bei seiner Rückkehr aufgefunden und benützt, weil diesem der normale Weg über den Sánju-Pass damals wegen des Aufstandes in Yárkand zu

36) Sein Original-Bericht ist enthalten als Brief No. 102, p. 1—18 in Appendix zu „General Report of the great Trigonometrical Survey of India for 1865—1866." By Lt. Col. J. T. Walker, Superintendant G. T. S. Dehra Doon, 1866; auch aufgenommen in das Journal of the R. Geogr. Soc. of London, Vol. 37, 1867.

37) Vergl. Karte in „Reisen" Band III; Adolph's Chang Lang-Pass hatte ich, da mir das von ihm gesammelte Detail noch nicht so wie jetzt durchgearbeitet vorlag, von Johnson's Lúmkang-Uebergangsstelle nicht getrennt gehalten.

unsicher war. Dabei liegt aber doch der von mir benützte Élchi-Pass Höhe 17,379 F. — ungleich günstiger als dieser letztere Weg — ebenfalls noch im östlichen Künlún, und ist nur 20 Meilen südöstlich vom Yángi Daván entfernt; es dürfte nicht unwahrscheinlich sein, dass Johnson von seinen Begleitern absichtlich den schwierigeren Weg geführt worden sei. — Auch der Lúmkang-Pass scheint unter ähnlichen Verhältnissen statt des Chang Lang-Passes benützt worden zu sein, da überdiess Johnson mit dem letzteren gar nicht bekannt wurde. Unser Élchi-Pass war ihm wenigstens gezeigt worden; die Uebergangsstelle nemlich, welche auf Johnsons Karte als „Hindotagh" angegeben ist, lässt sich aus der Terraingestaltung deutlich als jener erkennen.

Noch eines anderen, weiter östlich gelegenen Verkehrsweges, von Rúdok nach Khótan führend, erwähnt Johnson, aber in so unbestimmter Weise, dass sich derselbe nicht wohl beurtheilen lässt. Johnson spricht nemlich nur von 1 Uebergange, der auf Rúdok folgt, sehr flach ansteigt und selbst mit „wheeled conveyances", mit Räderfuhrwerk, befahren werden könne; diesen nennt er Pólū-Pass. — Solcher würde aber erst das Ueberschreiten der Karakorúm-Kette bieten, für welche allerdings eine selbst sehr flache Abdachung des Kammes nicht unwahrscheinlich ist; aber des Weges über die, in verhältnissmässig so geringer Entfernung gegen Osten, gewiss noch sehr mächtige Künlún-Kette ist dabei gar nicht gedacht.

In Élchi, wo Johnson sehr gute Aufnahme fand, verweilte er 16 Wochen.

Zur Rückkehr aus Khótan, angetreten am 4. October, wählte Johnson den Sánju-Pass (auch Valagót- oder Grim-Pass), den ich unter Adolph's Pässen im westlichen Künlún angeführt habe. „Sánju-Pass" wird diese Uebergangsstelle am häufigsten genannt, nach den nächsten der am Nordrande des Künlún gelegenen grösseren Orte. Die Höhe des Passes, die ich nach der späteren Bestimmung Hayward's zu 16,612 engl. F. annehme, erhielt Johnson, verhältnissmässig wenig differirend, gleich 16,760 Fuss. Dieser Pass bleibt in ungünstiger Jahreszeit der allein hier für Khótan direct zu gebrauchende, während der Kilián-Pass, wenn auch nur an 400 Fuss höher, wegen der Firnlager und des zu beiden Seiten steileren Ansteigens nur als Sommerpass benützt wird.

Ueber die Karakorúm-Kette kam Johnson bei seiner Rückkehr, längs unserer 1856 von Le aus gewählten Route, über den Karakorúm-Pass; dieser war später nochmals von Shaw bei der Rückkehr von Forsyth's erster officieller Reise und dann von Forsyth selbst, bei seiner gegenwärtigen Mission, wieder überschritten worden.

Vom Karakorúm-Passe bis Le war Johnson's Weg ungeachtet der vorgerückten Jahreszeit gleichfalls jener über den Sássar-Pass, den er erst am 25. November überschritt, und über Kárdong und den Laóche-Pass; über letzteren kam er am 1. Dezember.

Er folgte auch durch Núbra der vor uns eingeschlagenen Route mit Ausnahme der kleinen Strecke von △ Sássar wo er im Thale am Shayók-Flusse blieb, während wir auch auf dem Rückwege den Seitenkamm, der das Dápsang-Plateau im Süden begrenzt, überschritten und in direkter Richtung über △ Murgái nach △ Sássar kamen.

Als Höhe des Karakorúm-Passes erhielt Johnson 18,317 F., was als coïncidirend mit unserem Mittelwerthe von 18,345 F., basirt auf Höhenbestimmung bei zweimaligem Ueberschreiten und auf Berechnung nach Le, Símla und Măssúri[38]) — zu betrachten ist.

Es ist wohl möglich, dass er mit einigen der in der Nähe gelegenen, gegenwärtig trigonometrisch fixirten Gipfeln hier Winkelverbindung finden konnte. Für mehrere seiner anderen Höhenbestimmungen aber, für Pässe sowie für tiefer gelegene Punkte in Thälern, die mittelst eines Siedeapparates bestimmt wurden, ist die Differenz so gross, dass ich desshalb, wie Eingangs erläutert, Johnsons Höhenangaben, da nähere Details über die Ausführung der einzelnen Messungen nicht vorliegen, zur Berechnung von Mitteln nicht wohl benützen konnte.

Als Beispiele ziemlich grosser Differenzen an Stellen wo überdiess etwaige Verschiedenheit in der Wahl des Aufstellungsplatzes selbst ganz unwahrscheinlich ist, sei hier erwähnt

des Súget Daván-Passes: 18,227 F. Johns.; 17,683 F. Schlgtwt. diff. — 544 F.;

des △ Chíbra: 16,489 F. Johns.; 16,900 Schlgtwt. diff. + 411 F., u. A.

38) Details der Ablesungen und der einzelnen resultirenden Werthe sind gegeben: „Results“ vol. II, p. 426.

R. Shaw und G. Hayward; nach Yárkand und Káshgar, 1868/69.

Robert Shaw, der mehrere Jahre lang im Kángra-Thale sich niedergelassen und an der Theekultur daselbst sich betheiligt hatte, unternahm eine Reise nach Turkistán [39]) mit Thee und anderen Waaren, „dem britischen Handel auch nach jener Richtung Wege anbahnend", worauf Sir Henry Rawlinson im betreffenden Jahresberichte der geographischen Gesellschaft zu London besonders hingewiesen hat. [40])

Le hatte Shaw schon im Sommer 1867 besucht und er hatte damals gehofft ähnlich wie Johnson nach Khótan zu gelangen; doch schon ehe er Le erreichte, hatte er durch Karawanen die Ermordung Hábib Úllah's und die Besetzung auch Khótans durch Mohámmad Yákub erfahren.

Im Sommer 1868 schien es unerwartet günstig für Shaw sich zu gestalten; er war zu Le mit einem Emissär des Atálik Gházi zusammengetroffen, der in Kashmír gewesen war und auf dem Rückwege nach Yárkand schon einige Wochen zu Le verweilt hatte, um auch mit Dr. Cayley zu verhandeln. Mit Cayley war Shaw gleichzeitig angekommen; sie hatten sich schon einige Tage vorher begegnet, als Cayley von einer Bereisung der Route über den Chang Lang-Pass bis zu den Steinbrüchen bei Gulbashén zurückkehrte, wobei er demnach noch südlich vom Künlún-Kamme und von den bewohnten Gebieten Turkistáns geblieben war. (Publication darüber von Cayley ist mir nicht bekannt.)

Der Emissär zögerte nicht, Hoffnung zu machen, er werde Shaw baldigst Erlaubniss zu ungehindertem Bereisen Turkistáns verschaffen können. Doch musste nicht nur Shaw's Abreise von Le von Anfang August bis 20. September verschoben werden, was schlimme Zeit für die hohen Pässe bedingte, auch während des Marsches noch ward Shaw durch langes Harren auf bestimmte Zusagen aufgehalten; und als er die grösseren bewohnten Orte im flachen Gebiete Turkistáns erreichte,

39) Visits to High Tartary, Yârkand and Kâshgar, formerly Chinese Tartary and Return Journey over the Karakoram Pass. London, Murray, 1871. Autorisirte vollständige Ausgabe für Deutschland (mit Zusätzen) von J. E. A. Martin. Jena, H. Costenoble, 1872.

40) Proceedings R. Geogr. Soc. vol. XIV, p. 136.

zeigten sich neue Schwierigkeiten durch das misstrauische Auftreten Mohámmad Yákub's und seiner Behörden.

Als Route über die Karakorúm-Kette wählte Shaw den von Adolph eingeschlagenen Weg über den Chang Lang-Pass. Unter anderem hatte er längs dieses Marsches noch kleine Steinconstructionen für das leichtere Ansteigen der Pferde in einer Bergschlucht vorgefunden, wie sie Adolph 1857 hatte zusammenstellen lassen[41]); er erwähnt dabei, ebenso bei vielen anderen Gelegenheiten, freundlichst unseres Bruders.

Am Südgehänge der Karakorúm-Kette, im Changchénmo-Thale, wo Shaw mehrere Wochen sich aufhalten musste, hatte noch ein anderer Europäer, G. H Hayward, sein Lager bei ihm aufgeschlagen, der gleichfalls von Le längs dieser Route herangekommen war.

Hayward war von der Londoner geographischen Gesellschaft zur Erforschung Turkistáns ausgesandt worden. Ihre Begegnung war keine ganz unerwartete; sie hatten schon aus Kashmír und Ladák unter sich correspondirt, wobei Hayward den Vorschlag gemeinschaftlichen Reisens gemacht hatte. Doch Shaw, wie er selbst erläutert[42]), betrachtete solches als ungünstig, besonders deshalb, weil der Yarkándi-Emissär nur beauftragt gewesen war von einem Engländer zu sprechen, und weil demnach das Anschliessen eines Reisegefährten nur zu leicht von den stets zum Verdacht geneigten Asiaten schlimm gedeutet werden könnte. Obwohl nun Trennung während mehrerer Wochen eintrat, berührten sich doch noch ein zweitesmal auf dem Hinwege nach Turkistán Shaws und Hayward's Routen, am 20. November zu Shah-id-Úllah[43]), als Shaw eben mit den von Atálik Gházi ihm entgegengeschickten Beamten zu unterhandeln hatte. Der letztere Umstand hatte ihm um so weniger gestattet auf Hayward's Wünsche einzugehen.

Hayward wurde es aber dennoch möglich, seine Reise nach Ost-Turkisán fortzusetzen, und er lieferte trefflichen Bericht.[44])

41) Shaw, deutsche Ausgabe, S. 70.

42) Shaw, l. c. S. 63.

43) ib S. 104 u. ff.

44) „Journey from Leh to Yarkand and Kashgar, and Exploration of the sources of the Yarkand River". Journal of the R. Geogr. Soc. of London Vol. 40, 1870. p. 33 bis 166.

Aug. Petermann, der in seinen „Mittheilungen", 1871 S. 257 bis 273, Ost-Turkistán und seine Grenzgebiete sehr gründlich schilderte, hatte für die zum erstenmale dort gegebene kartographische Uebersicht der Höhenverhältnisse Hayward's Reisekarte als Basis gewählt.

Unter den topographischen Resultaten für das Hochgebirge aus Hayward's Reise ist ausser den Höhenbestimmungen seine genaue Angabe der Quelle des Yárkand-Flusses hervorzuheben, sowie die richtige Bestimmung des Laufes des oberen Karakásh-Flusses von der Quelle bis zur Veränderung der Flussrichtung längs des Künlún-Gebirges. In meiner Karte zum 3. Bande der „Reisen" ist noch die Quelle des Karakásh-Flusses, wie bei Johnson, zu weit nördlich gelegt, so als wäre sie vom Karakorúm-Kamme durch einen bedeutenden Theil des Turkistán-Plateau getrennt.

Die Haupt-Kämme sind auf Hayward's Karte, ebenso wie bei uns sogleich nach der Rückkehr geschah, in der Art dargestellt, dass der Karakorúm nordwestlich vom Mustágh, da wo der Hindukúsh endet, beginnt und als die Wasserscheide gegen Südosten sich fortsetzt; dabei lässt Hayward allerdings das Wort „Karakoram-Mountains" westlich vom obersten Karakásh-Thale enden, aber ohne ein anderes für die deutlich dargestellte Fortsetzung zu geben. Auf Shaw's Karte ist der Karakorúm als Hauptkette gar nicht angegeben und dort ist der Künlún als „Thian Shan Range" bezeichnet, wobei dieser Name dem westlichen und dem östlichen Theil des Künlún daselbst entlang gezogen ist.

Um vergleichende Uebersicht zu bieten, habe ich die beiden Itinerare zusammengestellt und die Angabe mehrerer der entscheidenden Ereignisse direct damit verbunden. Es war dabei nicht ohne Schwierigkeit, fortlaufend die genaue Angabe der Tage einzuhalten, da dieselbe bisweilen aus den beschreibenden Berichten und deren gegenseitigen Beziehungen combinirt werden musste; förderlich waren mir darin Hayward's numerische Tabellen über Verkehrslinien sowie über seine meteorologischen und hypsometrischen Beobachtungen.

Wo Höhen nach Hayward's Beobachtungen beigefügt sind, habe ich jene, welche von Commander George umgerechnet sind, durch die Bezeichnung „Hay-Geo." unterschieden.[45])

45) Erläutert in den Vorbemerkungen; s. o. S. 9.

a) Daten und Route aus Robert Shaw.

1868. September 20. Aufbruch von Le.

„ 23. Ueber Chang La-Pass nach Dúrgu, an Zufluss des Shayók.

„ 26. bis 29. Aufenthalt in Chágra, einem der letzten bewohnten Orte mit Vorsteher oder „Góba“; Nothwendigkeit mit Lastthieren, Pferden und Yaks, sich zu versehen.

„ 30. Ueber Masimík-Pass; dann Aufenthalt von 17 Tagen im Changchénmo-Thale.

October 14. Eintreffen Hayward's ober Kiám im Changchénmo-Thale; kurzes Zusammenbleiben.

„ 18. Ueber den Chang Lang-Pass. Shaw nennt den Pass nicht, gibt auch als Höhe nur in runder Zahl „über 19,000 Fuss“. Dass aber er (ebenso wie Hayward) über diesen Pass gegangen, nemlich über den gleichen wie Adolph, lässt sich auch an der Form der „Routen“ auf ihren Karten erkennen.

„ 19. Ueber den secundären Kamm Kála Bahár, von geringer relativer Höhe, welcher den nördlichen Rand der Língzi Thang-Ebene bildet.

„ 26. △ Tháldat-See (nach Hayward; Shaw schreibt Turldut)[46].

„ 31. Erstes Lager am Karakásh-Flusse, Uebergangsstelle unbestimmt.

November 6. Am Fusse der „Yáshem- oder Jade-Brüche“ (in der Nähe von Gulbashén).

„ 10. bis 24. in Shah-id-Úllah; damals wieder von Turkistánis bezogen; Unterhandlung mit Yarkándi-Beamten. Von 1863 bis 1866 war Shah-id-Úllah von Kashmír-Truppen besetzt; so fand es auch Johnson. Im Herbste 1866 waren diese vertrieben worden. (Eintreffen Hayward's am 20. November; vergl. S. 38.)

---

46) Auch bei andern Namen, wo Shaw und Hayward differiren, folgte ich Hayward's Schreibweise.

November 25. Lager am Fusse des Sánju-Passes, auf Weideplatz, der zur Zeit von Túrki-Hirten mit Akúis (oder Filzzelten) bezogen war.

„ 26. Ueber den Sánju-Pass; dann 1 Tag Halt am Fusse des Passes.

„ 28. bis „erste Tage Dezembers" (Angaben unbestimmt) über Sánju und Kárgalik nach Yárkand. Halt daselbst im Fort.

1869. Januar 4. Aufbrechen von Yárkand; Dorf Kízil erreicht.

„ 7. Yang Híssār, Stadt mit Fort; Aufenthalt 8. und 9. Januar.

„ 10. Dorf Yépchang.

„ 11. Káshgar erreicht; im Fort Yang Shahr einquartirt.

„ 12. Erster Empfang bei dem Atálik Gházi. Gute Aufnahme, aber der Aufenthalt bleibt doch fast ganz auf das Fort beschränkt.

„ 28. Nächtlicher starker Schneefall mit weisser Decke der Ebene des Morgens.

April 5. und 6. Zweiter und dritter officieller Empfang.

„ 9. Aufbruch von Káshgar nach Yépchang.

„ 12. Officieller Abschiedsbesuch bei dem Atálik Gházi zu Yang Híssār und Abreise nach Tóblok.

„ 13., 14. und 15. Aklángar, Kokhrabát und Yárkand.

Mai 30. Aufbruch von Yárkand[47]) nach Otánchi; Vereinigung mit Hayward gestattet.

Juni 2. Kárgalik. Aufenthalt bis 6. Nachmittags; kleiner Marsch nach Bécharik.

„ 7., 8. und 10. Nach Bórah, über Oitogrók und Kóshtok nach Sánju.

„ 12. bis 14. Von Sánju über Kízil Aghíl, Mázar, und dann erst über den Chúchu-Pass unterhalb Tām wieder in das Sánju-Thal, ein Seitenweg, der wegen Austretens des Sánju-Flusses gewählt wurde.

---

47) Der Aufbruch war so lange verschoben, weil 1869 die Reste des Winterschnees selbst am Sánju-Passe sonst gefährlich, zum mindesten sehr beschwerlich hätten sein können.

Juni 18. Ueber Sánju-Pass. Ungeachtet noch bedeutender Menge Winterschnee wurde bis zur Passhöhe geritten. Unglücksfälle kamen nicht vor; Lager auf Abhang.

„ 21. Shah-id-Úllah.

„ 24., 25. Súget Pass; nach Chíbra, nach Chadartásh.

„ 26. Trennung von Hayward; über kleinen Kamm Kiziltágh.

„ 27. und 28. Lagerung 5 Meilen nach Kiziltágh; Halt, weil ein Pferd und ein Maulthier flüchtig geworden waren, die aber erst bei Shah-id-Úllah von nachziehendem Train eingefangen wurden.

„ 29. Aufbruch über Karakorúm-Pass und Sássar-Pass nach Núbra und Ladák.

„Anfangs Juli." Eintreffen in Le (Zeit nicht näher zu bestimmen).

b) Daten und Routen von G. J. W. Hayward.

1868. September 29. Abends Aufbruch von Le und Marsch nach Tíksi am Indus[48]).

October 1. Sákti, am Fuss des Chang La-Passes 13,697 F. Hay-Geo.

„ 2. Ueber Chang La-Pass 18,368 Hay nach Siprâli 16,230 F. Hay-Geo.

„ 7. Ueber Masimík Pass 17,656 F. Hay-Geo nach △ Pámshalan 15,077 F. Hay-Geo. (Hayward schreibt Pumsul; vorstehendes ist Adolph's Bezeichnung.)

„ 14. Zusammentreffen mit Shaw; dann, jenen vorausziehen lassend (October 18.), machte er zweiwöchentlichen Aufenthalt südlich von der Karakorúm-Kette.

„ 28. Ueber Chang Lang-Pass 18,839 F. Hay. in das Língzi Thang-Plateau; Höhe des ersten Lagers 17,164 F. Hay-Geo.

„ 31. △ Tháldat an Salzsee gleichen Namens.

---

48) Angekommen war Hayward zu Le am 21. September, einen Tag nach Shaw's Abreise.

November 5. Ueber Kízil-Pass nach Kízil Jílga, Höhe 16,546 F. Hay.-Geo.

„ 13. Mándalik; an der Stelle, wo der Karakásh-Fluss in die der Künlün-Kette parallel streichende Depression eintritt.

„ 20. Shah-id-Úllah; gleichzeitig mit Shaw's Aufenthalt daselbst, aber nicht mit Shaw gesprochen.

„ 25. Nach Kalchúskun.

„ 26. Ueber den Kirgíz-Pass 17,092 F. Hay. aus dem Karakásh-Flussgebiet in das Yárkand-Flussgebiet, und dann am Yárkand-Flusse bis 12 Meilen unter Kulanúlde.

Dezember 2. bis 6. Zurück nach Kirgíz Jángel; dann über Kufelóng 14,765 F. Hay.-Geo. an die Quelle des Yárkand-Flusses; 2 Tage Aufenthalt.

„ 11. Kufelóng wieder erreicht.

„ 13. △ Aktágh 15,402 F. Hay.-Geo., bei Valiksháh (Hayward schreibt Muliksha).

„ 15. Ueber Súget Pass.

„ 18. Ueber Sánju Pass.

„ 20. Sánju 4868 F. Hay.-Geo.

„ 25. Kárgalik.

„ 27. Yárkand. Im Fort, aber weder Zusammenkunft noch Correspondenz mit Shaw gewährt.

1869. Februar 23. Aufbruch von Yárkand „zum Atálik Ghází" gestattet; (sieben Wochen nach Shaw's Abreise).

„ 26. Yang Híssār; 5 Tage Aufenthalt.

März 5. Káshgar. Vier Wochen Aufenthalt.

April 13. Aufbruch von Káshgar. Von den Umgebungen der Stadt aus war die Schneekette des Thían Shan, in etwa 70 Meilen Entfernung, sichtbar.

„ 14. Yang Híssār; aufgehalten bis zum 27. durch den Atálik Ghází, bei welchem Hayward nochmals Audienz haben sollte; doch wurde ihm nicht früher ein Tag hiezu bestimmt.

April 30. Ankunft in Yárkand. Dort, ebenso wie Shaw, verweilt bis Ende Mai; beide waren eingeschlossen und getrennt gehalten.

Mai 30. bis Juni 25. Aufbruch von Yárkand; Otánchi, Vereinigung mit Shaw. Dann bis Halteplatz Chadartásh gemeinschaftliche Route mit Shaw.

Die Höhenbestimmungen Hayward's längs dieses Weges sind folgende:

Juni 12. bis 14. Kízil Aghíl 7255 F. Hay.-Geo.; △ Mazár Hay-Geo.; 8615 F. Hay.-Geo.; Chíchu-Pass 11,847 F. Hay. △ Tām 8855 F. Hay-Geo.

„ 16. bis 25: Kichikyúlak 11,852 F. Hay-Geo.; Haltestelle in Súget-Thal nördlich vom Passe 13,746 F. Súget-Pass 18,237 F. Hay. △ Chíbra 17,133 F. Hay-Geo; △ Chadartásh 16,515 F. Hay-Geo.

Ohne auf Daten zur Beurtheilung der Differenzen eingehen zu können, muss ich doch erwähnen, dass die von uns bestimmten Punkte in der letzteren Gruppe sämmtlich etwas niederer sind. Wir hatten erhalten, nach den gleichzeitigen correspondirenden Beobachtungen zu Le, und für △ Chadartásh nach Simla und Mǎssúri berechnet, für den Súget-Pass 17,683 F., für △ Chíbra 16,900 F., für △ Chadartásh, dort allerdings im Niveau des Yarkánd-Flusses aufgestellt, 16,250 F. Dabei war es der Monat September, in welchen unsere hier angeführten Beobachtungen fielen, also eine Periode, welche als eine viel günstigere zu betrachten ist als der Frühling in den grossen Gebirgen.

1869. Juni 28. Ueber Karatágh-Pass 17,953 F. Hay. in das obere Karakásh-Thal, südlich von unserer Route über den Kizilkorúm Pass, 17,762 F. Die secundäre Kette, über welche dieser Weg nahe ihrem südlichen Beginne führte, wurde Hayward Karatágh-Kette genannt; sie ist die gleiche, welche wir Kizilkorúm-Kette genannt erhalten hatten.

„ 30. Aus dem oberen Karakásh-Thale über den Kiziltágh Pass, 17,859 F. Hay in das Língzi Thang-Plateau; Lager bei △ Káram, an einem kleinen See, 17,655 F. Hay. (17,950 F. Hay-Geo.)

Juli 5. Ueberschreiten des Chang Lang-Passes in das Changchénmo Thal. Von dort an den Pangkóng See und weiter nach Ladák längs derselben Route, die auf dem Hinwege zum Chang Lang-Passe schon angegeben wurde. Einige Tage später Ankunft zu Le.

Diesen Weg zwischen Chang Lang-Pass und Aktágh bezeichnet Hayward (l. c. S. 117) zugleich als den günstigsten nach Yárkand, „da man den verhältnissmässig leichten Chang Lang-Pass über die Hauptkette, den Karakorúm, hat und da über den Künlün von Aktágh der im westlichen Künlün liegende Kókiar- oder Yángi Daván-Pass (s. o. S. 31) benützt werden kann."

Zur Zeit ihres Aufbruches von Yárkand, scheint es, war Shaw und Hayward eine Wahl ihres Weges nicht gestattet gewesen; am wenigsten wohl die Ueberschreitung des Künlün an einer für sie neuen Stelle. —

In seinen Unternehmungen des folgenden Jahres, wie ich leider noch beizufügen habe, ist Hayward ein Opfer seiner eifrigen Forschungen geworden. Er hatte sich gegen Ghílgit und Yassín gewandt und hatte vor, die Quellengebiete des Oxus und die Hochregionen von Pámir zu bereisen. Doch schon in Chitrál, westlich von Ghílgit und Yassín wurde er im Sommer 1870 von Mir Váli, dem Nephen des Häuptlings Amán Málik, ermordet.

Den ausführlichsten Aufschluss über jenes Land, das Hayward bei seiner zweiten Reise besuchte, und wo er gefallen war, gibt G. W. von Leitner in seinem Werke „Results of a tour in Dardistan, Kashmir, Little Tibet and Ladak. Lahore 1867—70, und zwar über die topographischen Verhältnisse in Part. III. Er hatte jene Gebiete schon 3 Jahre vor Hayward durchzogen und aus seinen Berichten mussten alle schöpfen, auch Montgomerie und Walker in ihren bis jetzt vorgelegten Kartenarbeiten da es gegenwärtig anderes Material noch nicht gibt, auch keinen Nachlass aus Hayward's letzter Reise.

T. D. Forsyth's erste Sendung; nach Yárkand, 1870.

Die beiden officiellen Missionen erfolgten unter der Führung des Chief-Commissioners Mr. Forsyth, den ich schon bei dem Abschliessen der Handelsverträge für den Verkehr aus Turkistán durch Kashmír zu nennen hatte.

Die erste fand statt 1870; Aufbruch von Le am 7. Juli, Rückkehr dahin am 12. October. Forsyth's Begleiter waren Dr. Henderson, der als Arzt, zugleich als eifriger Sammler in Botanik und Zoologie, theilnahm, sowie Robert Shaw. Dieser war zwar erst im Sommer 1869 von seiner vorausgehenden Reise aus Turkistán nach Indien zurückgekehrt und befand sich zur Zeit als die Aufforderung, sich anzuschliessen, an ihn kam, auf Urlaub in London, doch war er am 3. Juli, ganz rechtzeitig noch, in Le wieder eingetroffen.

Von Publikationen liegen vor Mr. Forsyth's[49]) Mittheilungen an das Parlament, die schon im Frühling 1871 zur Vertheilung kamen, und Dr. Henderson's[50]) „Lahore to Yarkand", welches 1873 erschien.

Henderson's Werk enthält ausser seinem eigenen beschreibenden Referate und seiner sorgfältigen Untersuchung des botanischen Materiales auch detaillirte Bearbeitung der zahlreichen zoologischen Gegenstände S. 153—305, welche Mr. Hume übernommen hatte.

Unter den Tafeln sind nebst den naturhistorischen auch landschaftliche Photographieen gegeben, die ungeachtet der bedeutenden Höhen während der Reise wiederholt ausgeführt wurden, und die unmittelbar auf Stein übertragen und davon abgedruckt vorliegen. Der lithographischen Vervielfältigung hatte sich allerdings eine eigenthümliche Schwierigkeit geboten. Da sich nemlich das Collodium auf den Glasplatten, bis die Negativen nach Europa kamen, sehr zersprungen zeigte, wurde die freie Fläche der Collodiumhaut vor dem Abziehen vom Glase mit einer Firnisslage bedeckt. Diess ermöglichte zwar das Abnehmen, aber es musste nun, um nicht durch den Firniss an Schärfe zu verlieren, die auf dem Glase befindliche Fläche auch auf den Stein gelegt werden, und es entstanden nun bei dem lithographischen Andrücken „Spiegelbilder", was mir sogleich in der Erinnerung, noch mehr bei

---

49) Copy of Extracts of Correspondence relating to the Mission of Mr. Douglas Forsyth to Yarkand. Ordered, by the House of Commons, to the printed, 28 February 1871. London.

50) Lahore to Yarkand. Incidents of the Route and Natural History of the countries traversed by the Expedition of 1870 under T. D. Forsyth, Esq., C. B. By Geo. Henderson, M. D. etc., Medical officer of the Expedition, officiating Superintendant of the Botanic Gardens, Calcutta; and Allen O. Hume, Esq. C. B., Secretary to the Government of India, for the Department of Agriculture, Revenue and Commerce. London, L. Rave Co., 1873.

den Gegenständen, für welche mir Aquarelle von Adolph und mir vorliegen, in eigenthümlicher Weise auffiel, ehe ich die Erläuterung dazu in der Vorrede aufgefunden hatte.

Recht deutlich lassen Henderson's Photographieen erkennen, was auch auf unseren landschaftlichen Aufnahmen sich findet, die ich zum Theil schon im Atlas zu den „Results" gegeben habe, dass der Charakter der Plateaux in jenen Höhen vorzüglich durch die geringen Winkelhöhen der Umgebungen sich markirt; doch ist gerade bei diesen Gegenständen der Gegensatz zwischen schneebedeckten und felsigen Gehängen in der Photographie etwas silhouettenartig geworden, da das Grau in Grau der Felsengehänge in der Photographie sich nicht mehr erkennen lässt, weil „zu dunkel" und die Nuançen der blauen Firnschatten nicht, weil der Farbe wegen „zu hell." Dem Auge dagegen bleiben in solchen Höhen jene Unterschiede um so länger erkennbar, je mehr die allgemeinen Verhältnisse die Durchsichtigkeit bei vermindertem Luftdrucke begünstigen.

Vermittelt wurde die Mission durch Mírza Shádi, der kurz vorher von Petersburg zurückgekommen war, und nun an den Vicekönig von Indien, damals Lord Mayo, abgesandt wurde. Nach Lahór kam er Ende 1869, und er verweilte schon dort mehrere Wochen.

In Calcutta meldete er Lord Mayo unter anderem den Wunsch, es möge an seinen Atálik Ghází, von ihm begleitet, ein brittischer Beamter als Zeichen freundlicher Gesinnung entsandt werden.

Forsyth, der dazu von Lord Mayo bestimmt wurde, sollte in seinem officiellen Auftreten auf keine politischen und militärischen Fragen irgend welcher Art sich einlassen und vor Allem zu Frieden auffordern.

Ungeachtet des so günstig erscheinenden Beginnes war der Erfolg kein befriedigender. Forsyth blieb in Yárkand in strenger Ueberwachung und er erhielt nicht einmal persönliche Conferenz mit dem Atálik Ghází.

Bei Aufbruch von Le hatte er ein Gefolge, die Träger mitgezählt, von 60 Personen, und die Zahl der Packpferde war 130. Die Leute des Yarkándi-Gesandten mögen nahezu ebenso viele gewesen sein; die Zahl seiner Lastthiere, darunter auch für jene Gegend ungewöhnlich viele Maulthiere, war noch bedeutend grösser.

Die Zusammenstellung des „Itinerars“ habe ich aus Forsyth und Henderson combinirt. Da die Routen grossen Strecken entlang die gleichen sind, welche ich schon bei den bisher gegebenen Itineraren zu besprechen. hatte, werde ich hier nur dann die Einzelheiten anführen, wenn neue Strecken sich bieten oder neue Erläuterungen mit den Stationen zu verbinden sind.

Die topographischen Namen sind auch in den folgenden Verzeichnissen so geschrieben, wie sie aus unseren eigenen Aufschreibungen — „Routebook“ sowie „Glossary“ in Vol. III der Results — mir vorlagen, oder ich folgte, wo solches fehlte, Hayward's Auffassung der Namen, die ich meist mit der von mir verstandenen Form derselben übereinstimmen fand. Hayward's Transscription dagegen hatte ich, um in der von mir gewählten Art der Wiedergabe consequent zu bleiben, einigemale zu ändern, da ich bei ihm z. B. kurzes a mit a und u, langes i mit ee und doch auch wieder mit i, u. s. w. gefunden habe.

Wege bei Forsyth's erster Mission.

1870. Juli 7. bis 17. Aufbruch von Le über den Chang La- und den Masimík-Pass in das Changchénmo-Thal. Ankunft in △ Gógra.

19. Ueberschreiten der Karakorúm-Kette zur Haltestelle gNichú „über den Changchénmo- oder Chang Lang La-Pass“, nach Forsyth, womit die Lage des Weges auch auf Henderson's Karte stimmt. Benannt ist der Pass bei Henderson „Cayley Pass“ und, wie er erläutert, hat er diesen Namen Dr. Cayley [51]) zu Ehren gewählt und den Pass desshalb als solchen unterschieden, „weil Cayley diese Uebergangsstelle 1868 benützt habe und weil sie früher Yángi Daván oder Neu-Pass genannt gewesen sei; dieser Pass sei östlich von jenem Changchénmo-Passe gelegen, den z. B. Shaw 1868 benützte“ [52]).

Dass Forsyth und seine Gefährten gerade hier beim ersten Ansteigen zur höchsten Uebergangsstelle sich getrennt haben, ohne dessen zu erwähnen, ist auch nicht wahrscheinlich.

---

51) Dr. Cayley's gleichzeitige Stellung zu Le s. o. S. 37.

52) „Lahore to Yarkand“ p. 74.

Als Höhe bekam Henderson, und zwar bei Angabe von nur einer Uebergangsstelle, auf welche auch auf seiner Karte die Zahlen zu beziehen sind, am 19. Juni 19,695 F., am 5. October bei Rückweg 18,844 F.; Johnson hat für seinen Lúmkang-Pass Höhe von 19,533 F. erhalten, Hayward für den Chang Lang-Pass, allerdings mit wenig Abweichung von Henderson's October-Angabe, 18,839 F. Entscheidend aber ist diess nicht, da sich bei Henderson z. B. für den Chang La-Pass zwischen Le und dem Orte Dúrgu am 10. Juli 18,123 F., am 11. October 17,516 F. ergab;[53]) nach Hayward, 1. October, 18,368 F.

Im Allgemeinen scheinen bei Henderson's Rückweg im Herbste seine Höhen weniger abweichend von den von uns, von Johnson und von Hayward erhaltenen Werthen, als jene die er im Sommer bestimmte. Es lässt sich dies sehr wohl mit dem Umstande verbinden, dass im Herbste die Veränderung der klimatischen Verhältnisse, auch des Luftdruckes und der Temperatur, zwischen Indien und Hochasien mit Breite und Höhe eine regelmässigere ist als in jeder anderen Jahreszeit.

Juli 20. bis 25. Ueber den Lak Tsung-Kamm an den See Tháldat. Hier verlässt Forsyth's Route jene von Hayward; sie führt nun — topographisch besser gewählt indem sich weniger Krümmung und geringere Höhendifferenzen zeigen — gegen Norden an einen Brángsa oder eine „Haltestelle" in einem Seitenthale gelegen, welches nahe bei Mándalik einmündet, wo die Richtung des Karakásh-Flusses die Wendung macht. Die neuen Stationen waren:

26. Von Tháldat-See über secundären Kamm nach Pátsalung; dort zwei kleine Seen. Einen Tag Lager daselbst.

---

53) Aehnliche bedeutende Differenzen wiederholen sich bei seiner Art correspondirende Werthe zur Berechnung zu wählen (s. o. S. 9) sehr häufig. Ich führe an, nach Henderson, als entsprechende Fälle, in welchen Höhen zu verschiedenen Zeiten bestimmt wurden, unter anderem: Le, Cayley's Garten 6. Juli 11,980 F., 13. Oct. 11,525 F.; Diff. — 455 F. △ Pámshalan 17. Juli 15,618 F., 6. Oct. 14,714 F.; Diff. — 904 F. Yárkand Fort 26. August 3798 F., 30. Aug. 4328; Diff. + 530 F.

Die Haltestelle gNichú nördlich vom Passe liegt nach Bestimmung vom 20. Juni 18,847 F. hoch, 3 Fuss höher als der Pass nach Bestimmung vom 5. October.

Für den Salzsee Tso Tháldat erhielt Henderson am 25. Juli 16,763 F., am 28. Juli 16,199 F. (Hayward 15,896 F.), u. s. w.

1870 Juli 28. bis 29. Ueber Soda-Ebene nach dem Bráŋgsa ober Mándalik.
30. Erstes Lager im Karakásh-Thale unter Mándalik.

August 1. bis 9. Weg über Gulbashén, Shah-id-Úllah und Sánju-Pass in das obere Sánju-Thal (wie Shaw 1868).

Das Fort Shah-id-Úllah fand Forsyth leer, wie Adolph; Shaw und Hayward 1868 hatten dort Turkistánis, oder Móghuls wie sie gerne sich nennen, als Besatzung des Atálik Gházi getroffen[54]). Dessenungeachtet betrachtete Forsyth Shah-id-Úllah als diesseits Turkistáns gelegen. Johnson allerdings, den er aber dabei nicht erwähnt, sah es 1865 von Kashmíris besetzt, doch war diess nur vorübergehend. Auch 1856, als Ost-Turkistán noch Provinz von China war, wurde uns stets, selbst im Kashmír-Gebiete, die so bedeutend südlicher gelegene Karakorúm-Kette als die Nord-Grenze des westlichen Tibet, und somit der Area des Königreiches Kashmír, angegeben.

10. bis 16. Seitlich vom Sánju-Thal über Chúchu-Pass durch das Árpalak-Thal, wie Shaw und Hayward im Rückwege, nach Sánju.

17. bis 23. Nach Yárkand.

In Yárkand waren Forsyth und seine Gefährten auf das Fort beschränkt und es war ihnen ungeachtet steter Unterhandlung weder Weiterreise nach Káshgar, auch damals vorherrschend Aufenthaltsort des Atálik Ghâzi, gestattet, noch sonst Gelegenheit geboten, etwa durch Entgegenkommen desselben an eine Zwischenstation, ihn zu sehen und zu sprechen.

September 5. bis 27. Aufbruch von Yárkand. Rückweg wieder über Sánju-Pass nach Shah-id-Úllah; dann über Súget-Pass und Karatágh-Pass nach Kízil Jílga, wie Hayward 1869. Nun aber statt über den Kízil-Pass in das Língzi Thang-Plateau zu gehen, folgten Forsyth und seine Begleiter dem Karakásh-Flusse beinahe bis zu seiner Quelle.[55])

---

54) Hayward sah als Besatzung am 20. November 1868 einen Unterofficier oder „Pánjabáshi" mit einigen Dutzend Mann. „Journey" l. c. p. 48.

55) In Petermanns schöner Karte der „Höhenverhältnisse", s. o. S. 38, ist Forsyth's in diesem Theile neue Route noch nicht als solche eingetragen. Doch lässt sich auch ohne graphisch angegebene Richtung derselben in Petermann's deutlicher Terraindarstellung sehr leicht die Lage erkennen, und es bestätigt die Wahl dieser Route der Auszug aus Forsyth's Bericht, den Petermann a. a. O. S. 272 gegeben hat.

September 30. An jene Stelle, wo das erste Seitenthal von Südosten mit dem in seinem oberen Theile nach N. N. O. gerichteten Karakásh-Thale sich vereint, an den hohen „Súmdo“ [56]) wie die Tibeter sie nannten; von dort führte Forsyth's Weg den Seitenkamm zur Rechten des Thales hinan, zum Língzi Thang-Plateau.

October 1. Uebergang über den Súmdo-Pass. Die Höhe des Passes, 18,226 F. nach Henderson's Bestimmung, welcher hier die Jahreszeit wohl günstig war [57]), scheint von jener des Karatágh wenig verschieden zu sein. (Höhe des Karatágh nach Henderson 18,164 F.; nach Hayward 17,953 F., letzterer Werth von George nicht corrigirt.)

2. bis 12. Forsyth und Henderson gingen über den Chang Lang-Pass, über den Masimík- und den Chang La-Pass, auf der schon früher gewählten Route nach Le zurück; am 12. Ankunft in Le.

Shaw hatte sich im Língzi Thang-Plateau von Forsyth und Henderson getrennt und wollte den obersten Theil des Shayók-Thales untersuchen. Er bekam sehr bald ein heftiges rheumatisches Fieber, das ihn fast das Leben gekostet hätte. [58])

Dass Forsyth im Jahre 1870 ungeachtet der officiellen Sendung keine günstige Aufnahme gefunden hat, vor allem, dass er nicht zu persönlicher Besprechung mit dem Atálik Gházi gelangen konnte, wurde in den Kreisen der Beamten der Nordwestprovinzen und des Pănjáb, in jenen indischen Nachbargebieten, wo die Verhältnisse Kashmírs wohl am besten beurtheilt sein mögen, in nicht geringem Grade auch feindlich gesinnten Intriguen Rámbir Singhs, des jetzigen Herrschers von Kashmír, zugeschrieben. Er mag auch zu den Beschränkungen, mit denen man die Reise von Shaw und Hayward erschwerte, beigetragen haben.

---

56) Bedeutet „Drei-ort“ und ist allgemeine Bezeichnung in Tíbet, analog dem lateinischen Trivium, für die Stelle wo „zwei Thäler oder zwei Flüsse zu einem dritten sich vereinen.“ Erläutert „Res.“ vol. III, p. 188 und 248.

57) Vergl. oben S. 49.

58) Henderson „Lahore to Yarkand“ p. 150.

Da der Handelsverkehr zwischen Yárkand und dem Süden, auch jetzt noch, zum grössten Theile direct durch die Hände der Verwaltung des Rája von Kashmir geht, wobei der letzteren grosser Einfluss auf die Bestimmung der Preise bleibt, sucht sie die Preise stets hoch zu halten, damit auch der Durchgangszoll[59]) möglichst hoch sich ergebe; sie bedenkt dabei nicht, dass solche Umstände auf den Verkehr als solchen nur lähmend einwirken können. Es ist charakteristisch für all die Staaten auf solcher Entwicklungsstufe, dass in denselben Hebung des Gewinnes auch für den Staat oder, richtiger dort, für den Beherrscher, durch Vermehrung von Verkehr sowie von Kultur stets sehr spät begriffen wird, dass dagegen desto willkührlicher in Erhöhung, selbst in unbilliger Vertheilung der Zölle, die erhoben werden können, verfahren wird, und dass man möglichst lange dabei zu verharren sucht.

Unter der dem Atálik Ghází vorausgegangenen Herrschaft der Chinesen in Turkistán hat sehr wahrscheinlich solche Art des Sympathisirens zwischen beiden Ländern gleichfalls bestanden, um beiderseits den Gewinn am Verkehre möglichst gross zu haben; es lässt sich erwarten, dass auch der damalige Kashmír-Maharája Guláb Singh in dieser Absicht China gegenüber „nachgebend" sich gezeigt habe, also zum mindesten durch indirectes Erschweren des Vordringens von Europäern auch seinerseits. Ohne unser vorsichtiges Voraussenden der in den Le-Bazárs engagirten Turkistánis aus Yárkand, mit denen wir später unterwegs wie zufällig zusammen trafen, wäre wohl auch uns noch nicht die erste Reise dahin im Jahre 1856 gelungen. — Gegenüber den aufständischen Wirren, wie sie im folgenden Jahre während Adolph's Reise in Turkistán ausbrachen, war Kashmír und seine Politik in jeder Beziehung machtlos.

Für die ganze Strecke des Verkehres von Turkistán bis herab nach Jåmu am Rande des Himálaya im Chináb-Gebiete, Höhe 1324 F. („Res. II, p. 398) — und zwar für Weg über Le, wo zur Zeit fast jede der gewählten Linien durchführt — gebe ich, nach Henderson, eine Uebersicht der Entfernungen in Meilen und der je nach der Terrainschwierigkeit dazu nöthigen Zeit des Marschirens.

---

59) Ueber gegenwärtige Bestimmung des Durchgangszolles nach Werth s. o. S. 33.

Von Jămu bis Yárkand rechnet er eine Entfernung von 1012 engl. Miles (4·60 Miles = 1 geogr. Meile); Zahl der Marschtage 69. Dabei sind als einzelne Strecken noch besonders anzuführen: Entfernung von Chágra, letztem bewohnten Orte nördlich vom See Tsomognalarí (über das Karakorúm-Gebirge) nach „Kafr durrach“ [60]) (Káfir Déra) im Karakásh-Thale 185 Miles in 11 Tagereisen. Von Káfir Déra über die Künlún-Kette bis Sánju 180 Miles in 14 Tagereisen. Von Sánju, wo der Rand des Gebirges erreicht ist, bis Yárkand 116 Miles in 6 Tagereisen. Dabei sind aber die für die beladenen Thiere [61]) nöthigen Unterbrechungen nicht mit inbegriffen. An grösseren bewohnten Orten, und wegen der Stärkung durch Futter von Zeit zu Zeit auch in gut bewachsenen Thalmulden, wird mehrmals Tage lang Halt gemacht; am längsten zu Le, wo jede Karawane ein Paar Wochen liegen bleibt. Dabei ist der Verkehr fast immer so eingetheilt, dass nur 1 mal des Jahres der Weg zurückgelegt wird und zwar so, dass der Winter und ein Theil des Frühjahres von den Yarkándis im Pănjáb zugebracht wird.

F. D. Forsyth's zweite Sendung; nach Yárkand und nach Káshgar, 1873/74.

Die Veranlassung zu Forsyth's zweiter officieller Mission bildeten ungewöhnlich günstige Verhältnisse; sie fand auch, wie zu erwarten, in formeller Weise die beste Aufnahme in Turkistán, während dessenungeachtet wiederholt über unerwartete Verzögerungen, auch über Beschränkung freier Bewegung an Orten, wo längerer Aufenthalt nöthig geworden war, zu klagen blieb. Mohámmad Yákub, der Atálik Ghází, beschloss bald nachdem er auf Handelsverträge mit Russland einzugehen gehabt hatte, und durch Russlands Eroberung West-Turkistáns wohl gleichfalls hiezu veranlasst, an den Sultán um Bestätigung seiner Stellung als Herrscher sich zu wenden; Lord Northbrooke, dem Vicekönige

---

60) Káfir Déra, Lagerplatz auf einer Terrainstufe des breiten Karakásh Thales, auf der rechten Seite des Flusses; Höhe 14,420 F. „Res.“ II, p. 453.

61) Die Belastung eines normalen, mittelgrossen Túrki-Pferdes fand ich als Maximum selten 250 Pfund übertreffen; gewöhnlich ist sie beim Aufbrechen 30 bis 40 Pfund geringer, da man auch auf die Gefahr einzelne der Packpferde zu verlieren Rücksicht nehmen muss. Die tibetischen Ponies, obwohl sehr widerstandsfähig gegen rauhes Klima, selbst gegen schlechte Ernährung, sind zu klein um eben so viel leisten zu können; in Síkkim und in Bhután fand ich diese Raçe verhältnissmässig am kräftigsten noch.

und General-Gouverneur in Indien, erschien diess nur günstig und er säumte nicht den Erfolg zu fördern.

Mohámmad Yákub wurde nun vom Sultán als Herrscher anerkannt, der nur der Pforte noch als Vasalle untergeordnet sei, und erhielt als solcher die Titel Amír oder „edler Herr" (in Europa meist „Emir") und Khan oder „Fürst", womit die Art, wie er zur Herrschaft gelangt war, als vergessen zu betrachten ist. Und das Epitheton Atálik Ghászi, das er selbst sich gegeben hatte, hat er jetzt abgelegt.

Auch England wurde nun von Amír Mohámmad Yakúb Khan um officielle Anerkennung gebeten, und die Mission unter Forsyth's Führung war es, die ihm einen Brief der Beglückwünschung von Seiten der Königin von England und Irland und Kaiserin von Indien überbrachte.

Als Begleiter Forsyth's sind zu nennen: Oberst Gordon, als zweiter Vertreter, Capitain Biddulph, Dr. Stoliczka, ein Deutscher und seit mehreren Jahren eifriger Beamter der Geological Survey, Ingenieur-Capitain Trotter und der Arzt Dr. Bellew. Dr. Bellew hatte im Jahre vorher die Gebiete von Beluchistán bis Irán bereist, und hatte darüber, kurz vor dem Beginne seiner neuen Reise nach Turkistán, eingehenden Bericht veröffentlicht[62]), welcher für die auch hier in den Vordergrund tretenden Verhältnisse des Verkehres und der gegenwärtigen politischen Stellung der Nachbarstaaten viel des Neuen und Interessanten geboten hat.

In Le vereinten sich die Mitglieder, die von Calcutta und vom Pănjáb herangekommen waren, im Sommer 1873. Die Karawane bestand im September, als der Aufbruch begann, aus 350 Personen und 550 Lastthieren. Einige Wochen später folgte ihr der Ingenieur Chapman, von dem jetzt bis zur Zeit der Ankunft der Karawane in Káshgar, Nachricht über die Ausführung von 30 Breite- und 5 Länge-Bestimmungen vorliegen. Möge auch für sorgfältige Höhenbestimmungen durch Triangulation und durch Beobachtung des Luftdruckes, vor allem für letztere durch Errichtung einer correspondirenden Station zu Le, gesorgt sein.

---

62) „From the Indus to the Tigris. A narrative of a journey through the countries of Beloochistan, Afghanistan, and Iran in 1872".

(Der bis jetzt erschienenen Höhenangaben der Pässe werde ich am Schlusse (S. 59) noch zu erwähnen haben.)

Von Le aus, sowie auch später in verschiedenen Zwischenräumen, trennte sich die Karawane in mehrere Theile, die jedoch meist der gleichen Route folgten; bei dem Ueberschreiten der Kammlinie der Hauptkette aber waren auch die beiden eingeschlagenen Wege ganz verschiedene.

Forsyth, welcher mit der grösseren Gruppe der Karawane den Weg durch Núbra wählte, brach auf am 29. September. Er kam über den Laóche- oder Kárdong-Pass, dann über den Sássar-Pass, wo auf Veranlassung Johnson's, als Joint Commissioner zu Le[63]), Vorkehrungen, welche den Uebergang erleichterten, getroffen worden waren; nördlich vom Sássar-Passe ging Forsyth dem stark sich krümmenden Shayók-Thale entlang (wie Johnson 1865) über △ Gápshan nach △ Dáulat Beg Úlde, während die Träger und die Lastthiere dem kürzeren und etwas besseren Wege über △ Murgái und über den südlichen Theil des Dápsang-Plateau's (wie wir in unserer Route von 1856), entlang zogen. Zu Dáulat Beg Úlde vereinten sie sich wieder. Ueber den Karakorúm-Pass kam Forsyth am 12. October 1873; nach Aktágh am 13. October Abends.

Dr. Stoliczka und Capitain Biddulph waren mit einem anderen Theile der Karawane als Vorhut den Changchénmo-Weg vorausgeschickt worden. Von Tánktse, wo sie gelagert hatten, brachen sie auf am 17. September, und gingen am Chang Lang-Passe über die Hauptkette des Karakorúm; dann die Route einhaltend, längs welcher Hayward Ende Juni 1869 von Norden her gekommen war, überschritten sie den Kiziltágh-Pass und den Karatágh-Pass und gelangten nun nördlich von diesem gleichfalls auf die über den Karakorúm-Pass führende Route, aber schon im Norden vom Passe und unterhalb der Haltestelle Aktágh. Ungeachtet des bedeutend grösseren Weges, den sie zurückzulegen hatten, waren sie, weil zeitig genug aufgebrochen, schon vor Forsyth angekommen, wie solches auch beabsichtigt war.

Am 14. und am 15. October begann neuer Marsch in zwei Theilen,

---

63) s. o. S. 33.

aber jetzt auf gleichem Wege, über den Súget-Pass nach Shah-id-Úllah; erreicht am 17. October.

24. bis 29. October Marsch der Hauptgruppe über Sánju-Pass (über diesen am 27.) bis Tam, dem ersten bewohnten Orte, aus 8 Hütten bestehend; (Höhe 8855 F. nach Hay-Geo.).

30. October nach Sánju.

2. bis 8 November über Kárgalik nach Yárkand auf der schon früher bei Adolph's, sowie bei Shaw und Hayward's Routen (S. 23 und 41) besprochenen allgemeinen Verkehrsstrasse längs des Gebirgsrandes. Zu Yárkand sah sich die Gesandtschaft gegen ihre Absicht unerwartet lange aufgehalten.

Nach den englischen Berichten, die (in sehr sorgfältiger Correspondenz, „signirt mit der Marke /\") in der Cotta'schen Allgemeinen Zeitung zusammengestellt sind, war den Mitgliedern der Mission freie und ungehinderte Bewegung gestattet; „sie besuchten die Stadt und die Bázars und belustigten sich in den Umgebungen mit der Jagd." Aber nach Privatmittheilung von Dr. Stoliczka, welche die „Neue freie Presse" aus Wien brachte, waren sie während ihres Aufenthaltes von mehr als 20 Tagen zu Yárkand, wenn auch in grosse Gebäude einquartirt, in deren Wände eingeschlossen geblieben; „freie Bewegung, hiess es, könne ihnen erst gestattet werden nachdem sie den König gesehen."

Am 27. November erfolgte Forbyth's Aufbruch von Yárkand.

Die Mittheilung davon, wie hier noch erwähnt sei, brachten die Londoner Times am 27. Januar 1874, als Telegramm des 26. Januar von Calcutta. Da bestimmt auch nach Calcutta diese Nachricht telegraphirt wurde, sobald sie die Telegraphenlinie im Nordwesten, etwa bei Gujrát oder Lahór, erreicht hatte, so bleibt für das Ueberbringen dorthin eine Zeit von 58 bis 60 Tagen. Es ist dies eine für die Jahreszeit noch immer sehr rasche Beförderung; hat einmal der Winter begonnen, so bieten die Pässe und die oberen Thäler auf der Südseite des Himálaya nicht weniger Schwierigkeiten als die unbewohnten Hochwüsten des Künlün- und des Karakorúm-Gebietes, in welchen, in jeder Jahreszeit allerdings als besonderes Moment beschränkend wirkt,

dass die Dákvālas oder Postboten[64]) sich über weite Strecken nicht ablösen können.

Am 3. December erreichte Forsyth Fort Yang Shar nebst Residenz Altisháhr bei Káshgar, 5 engl. Meilen von der Stadt entfernt. Am 3. Dec. noch erhielt er Privataudienz, am 11. fand feierlicher Empfang bei Amír Mohámmad Yákub Khan statt, mit Uebergabe der officiellen Briefe und Geschenke.

Am 26. Dezember — früher nicht — war Besuch der Stadt Káshgar und der Bazárs daselbst gestattet.

Am 2. Februar ist Abschluss des Handelsvertrages zwischen Britisch-Indien und Amír Mohámmad Yákub (als „Ruler", oder Herrscher von Turkistán) zu Stande gekommen, in welchem, unter anderem, beiden Contrahenten Aufstellen eines Residenten, zu Káshgar und zu Calcutta, sowie das Niederlassen von Agenten an den wichtigsten, selbst zu wählenden Handelsorten gestattet ist.

Diess sind zugleich die letzten auch jener Nachrichten, die bis jetzt über Indien auf telegraphischem Wege nach Europa gelangt sind; (jene des Januar und des Februar habe ich erst während des Druckes noch beigefügt.[65])

Die klimatischen Verhältnisse in so später Jahreszeit hatten viel dazu beigetragen, das Ueberschreiten dieser höchsten Gebirgsregion der Erde bedeutend zu erschweren. Der Handelsverkehr in jenen Gebieten ist zwar selbst während des Winters nicht ganz unterbrochen, und es begegneten auch Forsyth's Zuge, bei seinem Uebergange über den Sánju-Pass, an einem der schlimmsten Tage, zwei von einander unabhängige Karawanen, die von Yárkand her kamen und noch die

64) Die Art des Brief-Transportes ist in Kashmír selbst, sowie in seinem tibetischen Gebiete, und jetzt auch in Turkistán, dieselbe, wie sie in Indien seit sehr langer Zeit schon besteht. „Reisen" Bd. I, S. 260.

65) Die Januar-Mail aus Turkistán ist sogar ungeachtet der vorgerückten Winterszeit noch rascher nach Indien gelangt als die vorhergegangene; dabei war der Transport in Dras auf der Nordseite des Tsóji La-Passes, der nach Kahsmír führt, obwohl die Passöhe nicht mehr als 11,498 F. beträgt („Res." II, p. 395) durch grosse Schneemassen in der ersten Hälfte des Februar 16 Tage aufgehalten gewesen. Die letzten brieflichen Nachrichten, welche diese Sendung aus Yárkand brachte, waren vom 10. Januar 1874. Bis nach der indischen Hauptstation Jámu hatten sie nur 49 Tage, bis 1. März, gebraucht; nach wenigen Märschen später konnte dann telegraphirt werden.

Karakorúm-Kette des Hochgebirges vor sich hatten. Gerade solche Möglichkeit des Ueberschreitens in dieser Jahreszeit ist hier characteristisch für die Terraingestaltung in Verbindung mit der noch immer ziemlich südlichen Lage. Allerdings bei solcher Grösse wandernder Gruppen wie die officielle Mission sie bedingte, mehren sich auch in unverhältnissmässiger Weise die Schwierigkeiten, im Schutze gegen die Kälte [66]) ebenso wie in der Wahl der Pfade für Menschen und Thiere.

Dass der schon Adolph bekannte, westlicher gelegene Kókiar- oder Yángi Daván-Pass, der auch in Hayward's Bericht sehr empfohlen ist, nicht benützt, selbst nicht versucht wurde, konnte seinen Grund in indirecter Verhinderung von Seite der Turkistánis haben, in der Art ausgeführt, dass vom Kókiar-Passe nicht gesprochen und sogleich über den Sánju-Pass aufgebrochen wurde. Sonderbarer Weise ist in den Berichten der zweiten Mission des leichteren Passes gar nicht erwähnt.

Die Höhenangaben, wie sie in den bis jetzt gelieferten Berichten der Mission sich finden, sind nicht Angaben früherer Bestimmungen und sind auch nicht als Schätzungen, in runden Zahlen etwa, gegeben sondern erscheinen als Resultat neuer Bestimmung. An den bisher bekannten Stellen aber weichen sie in überraschender Weise von den früher erhaltenen Resultaten ab, und zwar zeigen sich die neuen Zahlen alle bedeutend niederer, meist um 400 bis 500 Fuss. [67]) Da während des Marsches ohnehin correspondirende Beobachtungen noch nicht Berücktichtigung hätten finden können, ist wohl zu erwarten, dass, ungeachtet der schon jetzt in definitiver Form gegebenen Werthe, später Umrechnung folgen wird, jedenfalls nach Himálaya-Stationen

---

66) Als Wärmeminimum, für das mir bis jetzt Aufschreibung auf Reisen daselbst bekannt ist, sei Hayward's Beobachtung zu Aktágh im Winter 1868 angeführt. Er hatte dort bei 15,402 F. Höhe (Hay-Geo) am 15. Dezember 8 Uhr Morgens — $18^1/_2{}^0$ F. = — 28^0 C. gehabt.

67) Ich gebe zum Vergleiche die folgende Zusammenstellung von Höhenbestimmungen der Pässe, wobei die neuen Angaben mit „O. M.“ („Officielle Mission“ von 1873) bezeichnet sind.
Laóche- oder Kárdong-Pass: 16,757 F. O. M.; 17,911 F. Schlgtwt. (nemlich nach Le 17,866 F., nach Símla 17,919 F., nach Mässúri 17,948 F.); 17,574 Hayward, auf Karte; ca. 18,000 Johnson, Report p. 13. — Sássar-Pass 17,277 F. O. M.; 17,753 F. Schlgwt. — Karakorúm-Pass 17,739 F. O. M.; 18,345 F. Schlgtwt.; 18,317 F. Johns. — Súget-Pass 16,937 F. O. M.; 17,683 F. Schlgtwt.; 17,835 Hay-Geo. — Sánju-Pass 16,000 F. O. M.; 16,612 F. Hayw.

ausführbar, wenn auch in Le, selbst dieses mal wieder, eine correspondirende Station beim Joint Commissioner nicht sollte eingerichtet worden sein.

Die Untersuchung des Thián Shan durch russische Reisende hatte schon vor dem Beginne der auf uns folgenden englischen Expeditionen vom Norden her nach dem östlichen Turkistán geführt. Im nächsten Jahre nach Adolph's Ermordung zu Káshgar, 1858/59, erreichte dasselbe Valikhanoff, dessen Vater, ein Kirghízi-Shah, an den russischen Kaiser gegen pecuniäre Entschädigung seine unabhängige Stellung abgegeben hatte und seinen Sohn in die russische Armee eintreten liess. Auf seiner sehr erfolgreichen Reise nach Káshgar gelang es Valikhanoff wieder als Eingeborner aufzutreten, und so für sich die dem Fremden anderer Raçe sich bietenden Hindernisse, sowie etwaige Voraussetzung politisch feindlicher Gesinnung ganz zu beseitigen. Bei seiner Rückkehr nach St. Petersburg hat er in seinen Berichten an die k. geogr. Gesellschaft auch der Ermordung eines Europäers zu Káshgar erwähnt, ohne jedoch unseres Bruders Namen dort erfahren zu haben.

Die darauf folgenden Expeditionen in den Thián Shan waren, 1867, die Reisen Baron Osten-Sacken's und, von 1868 bis 1871, die Reisen von Buniakoffsky und Reinthal, dann jene von Fedtschenko in Begleitung seiner Gattin nach dem südlichen Grenzgebirge von Kókand und die von Baron von Kaulbars ausgeführten Untersuchungen in den westlichen Theilen des Thián Shan. [68])

Nach Káshgar war Reinthal gelangt 1868, als Europäer auftretend, ebenso Baron von Kaulbars 1871, und schon im Frühjahre 1872 erfolgte Handelsvertrag Yákub Khan's mit Russland, welcher sich auch in den folgenden Jahren gegenüber seinem mächtigen nordischen Nachbar sehr nachgebend gezeigt hat, Bazárs für die russischen Karawanen errichten liess und schüchtern stets zu Entschädigung sich bereit erklärte, wenn deren Handelszüge gefährdet worden waren.

---

68) P. S. Ausführliche, sehr gründliche Mittheilung „Ueber die Erforschung des Thián Shan" hat jüngst Friedrich von Hellwald, am 13. März, in der Münchner geographischen Gesellschaft vorgetragen. Seine Abhandlung ist Bruchstück eines grösseren Werkes über Central-Asien, welches v. Hellwald noch in diesem Jahre erscheinen lassen dürfte.

II.

Schilderung des Ueberganges von Núbra in das obere Turkistán über die Karakorúm-Kette.

Verhältnisse in der Provinz Núbra: Wege zum Karakorúm-Passe. — Von Le bis Déra Sássar im Winter und im Sommer. — Die Schneegrenze in Núbra. — Die obere Gabelung der Karakorúm-Routen.

Der Marsch nach Dĕra Búllu in Yárkand: Der Laóche-Pass. — Das Chéra- oder Núbra-Thal. Wohnsitze und Vegetation. Heisse Quellen. — Die vorausgesandten Yarkándis; Kleider, Waffen und Instrumente für Turkistán. — Der Sássar-Pass. Bergbesteigung; Effect der verdünnten Luft. — Die östliche oder „Kiziláb-Route". — Der Dápsang-Peak; Panorama Nr. 15. — Der Ritt über den Karakorúm-Pass.

Verhältnisse in der Provinz Núbra.

Núbra, ein Theil des einstigen Reiches Ladák, ist in seinem oberen Gebiete der ganzen Ausdehnung nach von der Kette des Karakorúm umgeben, mit einer so grossen Kammhöhe, dass nirgend Pässe unter 18,000 Fuss sich gezeigt haben.

Die bedeutende Krümmung, welche die Karakorúm-Kette Núbra entlang annimmt, mag dazu beigetragen haben, dass man etwas zögerte, „diese Kette auch hier als die weit nach Osten sich fortziehende Hauptkette", wie wir zuerst sie definirten [69]), anzunehmen, und nach unserem Vorschlage auf diese neue Kette im Allgemeinen den Namen des Passes „Karakorúm" zu übertragen.

---

69) Dargestellt auf Karte 1 zu „Res." I, 1861. Aus meiner „Erläuterung der Gebiete Hochasiens", mitgetheilt in den Sitzungsberichten der k. b. Akademie der Wissenschaften d. d. 5. Nov. 1870 (S. 313 bis 327), sei auch hier noch beigefügt:

Die Karakorúm-Kette, die früher auf den Karten ganz fehlte, ergab sich bei unserem Ueberschreiten des Hochgebirges als die höchste und die wasserscheidende der 3 Kammlinien. Zugleich zeigte sich, dass der Karakorúm es ist, der nach Westen in den Hindukúsh sich fortsetzt, während man bisher den Künlŭ́n für die entsprechende an den Hindukúsh sich anschliessende Kette gehalten hatte. (S. 315.)

Doch auf Colonel Walkers „Karte von Turkistán und den umgebenden Gebieten“ — vollendet August 1868 — also in der ersten Arbeit der Great Trigonometrical Survey über diese Terrains, wurde ebenfalls die Karakorúm-Kette soweit die Karte gegen Osten reicht, im Gegensatze zum Himálaya und zum Künlün, als die Hauptkette gegeben, sowie der Name „Karakorúmgebirge“ beibehalten.

Die Bodengestaltung der Provinz Núbra lässt einen unteren und einen oberen Theil unterscheiden. Den unteren durchzieht der Shayók, dessen Wendung nach Nordwesten nahe am Beginne des unteren Núbra liegt, und der nun eine Strecke weit ziemlich parallel dem Industhale fliesst; bewohnte Orte reichen noch bis 13,000 F. hinan; die mittlere Höhe des Shayók-Niveaus in diesem Theile ist 10,000 F.

Der obere Theil von Núbra ist südöstlich gerichtet und wird durch den Sássarkamm in zwei Theile von gleicher Lage, aber mit Thalsohlen von sehr ungleicher Breite getheilt.

Das Thal westlich vom Sássarkamme ist nach seinem Flusse „Chéra-Thal“ genannt; häufig wird ihm als „Núbra-Thal“ der Provinzname gegeben. Der Chérafluss mündet in den Shayókfluss (45 Meilen unterhalb dessen Hauptkrümmung) — in einem Winkel von 120 Grad entgegenfliessend.

In Gebirgen mit Hebungsverhältnissen, welche, wie hier, einen gewissen Parallelismus in den Kammlinien bedingen, sind so grosse Winkel der sich begegnenden Thalrichtungen nicht selten; meist zeigt sich aber, ehe die Flüsse selbst sich verbinden, ein Kleinerwerden des Winkels, den die Flussbette bilden, dann nämlich, wenn die Thalsohlen breit sind und Erosion in alluvialem Schutte solches begünstigt.

Das Chéra-Thal ist das kleinere der beiden Thäler des oberen Núbra. Das „Shayók-Thal“, längs des östlichen Randes des trennenden Sássarkammes sich hinziehend, hat hier ziemlich die gleiche Richtung; seine Thalsohle ist bedeutend breiter, aber doch verhältnissmässig weniger culturfähig.

Die Mächtigkeit des Stromes — welche durch unregelmässige Schwankungen in der Menge des Firn- und Gletscherwassers noch gefährlicher wird, als wenn die gleiche Wassermenge regelmässig vertheilt abflösse — veranlasst sehr häufig Ueberschwemmungen, die nicht nur Sand sondern

auch Geröllablagerungen zurücklassen und an vielen Stellen die ganze Thalsohle unfruchtbar machen. Am zerstörendsten wirkt der Durchbruch von Gletscherseen, von Wassermengen, die sich als Ausfluss eines höheren Gletschers hinter einem tieferen angesammelt haben, bis der Druck des Wassers den Widerstand des Gletschereises überwindet. Auch seitliches Aufstauen von Wasser durch Reibung des Eises gegen die Wände ist häufig. Das Vorkommen solcher Seen, aus den Alpen lange bekannt, zeigt sich in allen ausgedehnten Gletschergebieten.

Unter den Uebergangsstellen von Núbra nach Turkistan ist der Karakorúm-Pass jene, die am meisten als Karawanenroute benützt wird; denn der tibetische Ausgangspunkt des Hauptverkehres ist Le.

Obwohl der Karakorúm-Pass der höchste Punkt der Route ist, bleibt er das ganze Jahr offen, aber die Wege dahin ändern sich je nach der Jahreszeit; es git beinahe der ganzen Strecke entlang einen Sommerweg und einen Winterweg. Von den Karawanen werden dieselben in gleichem Sinne Zamistáni rah und Tabistáni rah genannt; persische Wörter, die auch in das Hindostáni aufgenommen sind und mit dem allgemeinen Verkehre weit nach Centralasien sich verbreitet haben.

In dem Kamme zwischen Núbra und Ladák in der Nähe von Le, auf dem Wege zum Karakorúm-Passe, sind die Schwierigkeiten im Verhältnisse zur Höhe sehr gross, und nur zwei Uebergänge sind für Karawanen möglich. Die eine Stelle ist der Dígar-Pass, die andere der Laóche- oder Kárdong-Pass. Wenigstens kann von diesen beiden der Dígar-Pass als Weg auch für Winterkarawanen von Le aus gewählt werden. Jenseits des Dígar-Passes führt dann der Winterweg im Shayók-Thale fort über Dungiélak und Mándalik, thalaufwärts zum Karakorúm-Passe.

G ü n s t i g ist der Route über den Dígar-Pass, dass dabei das Ueberschreiten des stark schneebedeckten Sássar-Passes, der in den Wintermonaten ganz unzugänglich wäre, vermieden ist; sehr u n g ü n s t i g ist es aber auf diesem Winterwege, dass, ungeachtet der im Winter sehr niederen Temperatur, der Shayókfluss, wenn auch offen doch sehr kalt, nicht nur von Reitern, sondern auch von beladenen Kameelen und Lastpferden, selbst von lasttragenden Menschen mehrmals gekreuzt werden

muss; es veranlasst dazu sowohl die Vertheilung der wenigen bewohnten Orte, als auch die Lage jener Haltstellen, die des localen Schutzes wegen zu wählen sind.

Die Länge der hier besprochenen Route, die den Sássar-Pass umgeht, ist merklich grösser, als jener, die den Sássar-Pass benützt. Ich finde mit dem „Scalenrädchen" [70], dass der Weg über den Dígar-Pass, und dann dem Shayók entlang bis zum Déra- (oder Lagerplatze) Sássar am östlichen Fusse des Passes, 119 engl. Meilen beträgt, während sich für den Weg dahin über den Laóche- und den Sássar-Pass nur 79 Meilen ergibt.

Dessenungeachtet bleibt der Shayókweg nicht einmal das ganze Jahr zu benützen. Er ist nur möglich während jenes Theiles des Jahres, in welchem die Wassermenge des Shayók noch nicht ihre mittlere Grösse erreicht hat, nämlich vom Spätherbste bis gegen Ende des Frühlings. Mitte September 1856 z. B. fanden wir es noch zu früh, als wir, damals auf dem Rückwege, versuchten, wegen der sehr bedeutenden Gepäckmenge, die sich angehäuft hatte, den Sássar-Pass zu vermeiden. Eine Strecke weit kamen wir thalabwärts, dann aber mussten wir des hohen Wasserstandes wegen wieder nach dem Sássar-Passe uns zurückwenden. Es hatte uns dieses Hin- und Herziehen mehrere Tage harter und vergeblicher Arbeit gekostet.

Der S o m m e r w e g der Karawanen wird gewöhnlich so gewählt, dass man von Le aus in der vorherrschend nördlichen Richtung nach Kárdong über den Laóche-Pass geht und dann den Sássar-Pass überschreitet. Bei jedem dieser Pässe sind steile Gehänge bei der Beladung zu berücksichtigen.

Will man auch im Sommer über den Dígar-Pass statt über den Laóche-Pass gehen, weil allerdings am Laóche-Pass viel von Geröll und Felsblöcken zu überschreiten ist, so muss man einen Umweg von mehr als 20 Meilen machen, um in nordwestlicher Richtung bei Dískit auf den Weg über die Sássar-Gruppe zu gelangen.

Im Winter und Frühling ist der Laóche-Pass, Höhe 17,911 Fuss,

---

70) Beschrieben in CR. der Par. Akad., 17. Aug. 1873; „Sitzungsberichte der k. b. Akad.", 10. März 1866. — Verlag des Instrumentchen's Th. Ackermann'sche Buchhandlung, München.

meist an vier Monate, oft länger noch, durch Schnee und glatte Eisflächen auf den Felsen geschlossen; im November bleibt er regelmässig zu überschreiten. Der Sássar-Pass ist in gleichen Jahren noch etwas länger unzugänglich als der Laóche-Pass.

Im Ansteigen von Le aus, auf der nach Süden exponirten Seite des Laóche-Passes, begannen schneebedeckte Stellen auf den Abhängen gegen Ost und West sich zu zeigen, aber erst wenige Fuss unter dem Passe selbst; als Höhe der südlichen Schneegrenze ist hier und in den Umgebungen im Mittel 17,900 Fuss anzunehmen. Auf der Nordseite dagegen reicht sie im Verhältnisse sehr tief herab. In Tibet nämlich ist nicht mehr, wie im Himálaya, auf den Nordhängen allein eine exceptionelle Erhöhung das Vorherrschende,[71]) sondern hier ist die Erhöhung eine allgemeine und die Exposotion macht sehr deutlich jene Unterschiede zwischen Nord und Süd hervortreten, welche einer in der nördlichen Erdhälfte gelegenen Gebirgskette entsprechen. So hatte am Laóche-Pass die Schneegrenze auf der Nordseite eine um 1500 Fuss geringere Höhe als auf der Südseite.

Aehnlich ist die Schneegrenze auch in den Umgebungen des Sássar-Passes, Höhe des Passes 17,753 Fuss; erst weiter gegen das Innere, wo die Trockenheit stetig und sehr bedeutend zunimmt, wird die Lage der Schneegrenze noch um Vieles höher, wie die nächsten Umgebungen der Hauptkette es zeigen werden.

Als Veränderung der Schneegrenze liess sich aus dem Unterschiede zwischen Ende Juli und Mitte September für den Laóche-Pass sowie für den Sássar-Pass eine sehr merkliche Ausdehnung der Schneeregion, ein Sinken der Schneegrenze nach abwärts erkennen, während die Tieffirne in jeder Exposition auch im September noch im Stadium der Verkleinerung durch Abschmelzen sich befanden.

Am östlichen Fusse des Sássar-Passes, in Déra-Sássar, ist es, wo die Winter- und Sommer-Route sich berühren. Zur Zeit unserer Märsche war diese Stelle nur ein freier Halteplatz, bei 15,339 F.; jetzt ist ein Haus aus losen Steinen zum Schutze gegen Sturm und Kälte dort errichtet.

---

71) Erläuternde Zusammenstellung habe ich gegeben in „Results“ vol. IV, p. 566.

Vom Dḗra Sássar an trennen sich, nach dem Karakorúm-Passe zu, die Winter- und die Sommer-Route sogleich aufs neue. Der Winterweg folgt, hier oben von niederem Wasserstande im Winter begünstigt, den Ufern des Shayókflusses bis zum Kamme des Passes hinan. Die Stationen wurden schon 1825 nach Ízzet Úllah im „Quarterly Oriental Magazine" gegeben. Die in Klammern gesetzten Namen sind in Ízzet Úllah's Weise geschrieben, von mir sind für die Namen die Formen, wie Mohámmad Amín sie uns angab, beibehalten. Alle die hier genannten Orte sind unbewohnte Haltestellen, in der Reihe wie folgt bis zum Passe: Dḗra Sássar — Chongtásh (Chung Tash) — Karatásh — Khumdán (Khamdan) — Gyápshan (Yapchan) — ein Brángsa oder „Halteplatz".

Gegen 3 Meilen unterhalb Khumdán hatte sich zur Zeit von Shaw's Reise, anfangs Juli 1869, ausnahmsweise ein Gletscher der rechten Thalseite so weit vorgeschoben, dass er den Shayók aufstaute. Es verband sich damit unregelmässiges, heftiges Durchbrechen von Wasser, wodurch einmal Shaw's Lage sehr gefährdet wurde, da er zur Zeit im Ueberschreiten des Flusses begriffen war. [72])

Ober Gyápshan mündet ein starker seitlicher Zufluss ein, und der Weg führt nahe am unteren Ende eines gegen Westen liegenden Gletschers vorüber. Er ist der grösste in diesem Gebiete und wird Shayók-Gletscher genannt. Shaw bezeichnet dessen Ausfluss als den Beginn des Shayókflusses; doch nach den neuen Daten der trig. Vermessung, die auf Hayward's Karte von 1870 eingetragen sind, wird ebenso, wie unsere Turkistán-Begleiter es uns angegeben hatten, jener Fluss, welcher bei Dáulat Beg Úlde und von dort nach Gyápshan herabkömmt, als der obere Theil des Shayók bezeichnet

Für den letzten Halteplatz, dem auf dieser Route der Pass folgt, ist kein besonderer Name im Gebrauche.

Der Sommerweg vom Dḗra Sássar bis zum Karakorúm-Passe ist jener, dessen Haltstellen oben (S. 13) in meinem Itinerare gegeben sind.

Der Marsch nach Dḗra Búllu in Yárkand.

Um die Absicht weiteren Vordringens möglichst zu verbergen, bestand unser Gefolge als wir Le (am 24. Juli) verliessen aus fast all

72) Shaw's Reise, deutsche Ausgabe S. 371.

jenen Leuten, die schon bis Le von Indien und von den südlichen tibetischen Provinzen mit uns gekommen waren; nur Hărkíshen, und zwei seiner Gehülfen waren, wie schon Eingangs erwähnt, bei den aufgestellten Instrumenten zu correspondirenden Beobachtungen in Le zurückgelassen, ebenso einige Sammler (für zoologisches und botanisches Material). Bald sollte auch die Dienergruppe zu Le wieder recht zahlreich werden.

Wir hatten dem Sommerwege zu folgen, der über den Sássar-Pass führt und waren von Le aus über den Laóche-Pass gegangen.

Die Höhe des Laóche Passes, wie erwähnt, ist 17,911 Fuss; der Name, den ich gebe, ist jener, den wir von den Tibetern der Umgegend südlich und nördlich, als solchen mitgetheilt erhielten; von den Karawanen wird auch, wie auf Walker's Karten bezeichnet, der Name Kárdong-Pass gebraucht.

Am Nordabhange des Laóche-Passes zeigte sich ein mittelgrosser Gletscher mit einem Gletschersee an der Seite; Höhe des Sees 16,076 F. An seinen Ufern findet sich die oberste Grenze der Vegetation.

Der erste bewohnte Ort, der sich jenseits des Laóche-Passes in Núbra darbot, war „Kárdong“, wie es jetzt als Station der Karawanen-Route uns genannt wurde; genauer ist die Form des Namens m Khar-g dung = Festungs-Platz.

Kárdong liegt am linken Ufer des Nángtse, eines Zuflusses des Shayók. Als mittlere Höhe des Dorfes ergab sich 12,878 Fuss. Obwohl der Nángtse-Fluss von der Kammlinie im Süden bis zu seiner Mündung in den Shayók nicht ganz 20 engl. Meilen Länge hat, und Kárdong noch oberhalb der Mitte seines Laufes gelegen ist, so ist doch die Erosion daselbst eine sehr tiefe; allerdings sind es nicht feste Gesteine, sondern durch Erdstürze im Thalgrunde angehäufte Verwitterungsproducte, welche zu erodiren waren. Die Höhendifferenz zwischen dem gegenwärtigen Flussbette und der Lage von Kárdong fand sich gleich 930 Fuss; der Standpunkt, den ich zu meinem Aquarelle (Gen. No. 553) wählte, liess sehr deutlich die Thalbildung und die Wirkung der Erosion in den angehäuften Schuttmassen überblicken.

Dískit, auf der linken Seite des Shayókflusses, folgt in geringer Entfernung und ist leicht zu erreichen. Dort aber beginnen neue

Schwierigkeiten, welche das Ueberschreiten des Shayókflusses bietet; Höhe des Flusses 9968 Fuss. Die Thalsohle ist flach und das Gefälle ist so gering, dass sich der Fluss, je nach der Wasserhöhe, in 10 bis 12 Arme theilt, mit einer totalen Breite von nahezu 3 englischen Meilen (oder 15,840 F.) Dabei gibt es weder Boot noch Floss, nur die Hilfe erfahrener Führer macht die sehr schwierige und viele Stunden währende Ueberschreitung möglich.

Die Stelle, die man zu wählen hat, liegt nur wenig oberhalb des Einströmens des Chéra- oder Núbra-Flusses. Nun folgten wir dem Chéra-Thale am linken Ufer bis zum Fusse des Sássar-Passes. Es findet sich dieser Linie entlang ein nur mässig geneigter Thalgrund, sowie auch eine ziemliche Anzahl von Ortschaften mit gutem Ackerbau, unter welchen Kyagár auf dem Delta eines kleinen Seitenflusses bei 11,180 F. gelegen (gegen 700 Fuss über dem Chéra- oder Núbra-Flusse), eine der grösseren ist. Etwas weiter aufwärts im Thale folgt Dríshna und Pangmíg; Höhe bei Dríshna 10,492 Fuss. Höhe des nahe gelegene dominirenden Gipfels im Sássar-Kamme; südlich noch vom Passe, 25,183 Fuss.

Zu Pangmíg ist der Sitz eines Góba oder Vorstandes. Sein Haus liegt etwas isolirt, in einer schönen, gut bewässerten Culturfläche.

Wegen der charakteristischen Form, die sich bot, machte ich davon eine Bleistiftskizze mit Farbentönen (Gen. No. 350). Dieses Haus, im Gegensatz zu jenem in Kórdzog[73]), veranschaulicht die umfangreichere und anmuthigere Wohnung eines grossen Grundbesitzers in Tibet.

Die flache Construction des Daches ist die gleiche, wie jene im Kórdzog-Bilde; und — mit Ausnahme monumentaler Hindú-Architectur in den grossen Bráhmansitzen oder der einfachsten Rohr- und Holzgebäude — findet man diese Dächer vom tropischen Indien bis weit in die Steppen des centralen Asien. Man ersieht daraus, dass die Anwendung flacher Dächer eine der primitivsten Formen der Hausarchitectur ist, sowohl wenn mit horizontalen Tragbalken und Flechtwerk rohe Steine, oder

---

73) Kórdzog „das Haus der Hirten" am Tsomoríri-Salzsee im westlichen Tibet, ist Gegenstand der Tafel XVII in Band III der „Reisen", erläutert S. 149. Die Ansicht des hier besprochenen Pangmíg-Hauses werde ich in den ethnographischen Blättern des Atlas zu den „Results" geben.

getrocknete Thonstücke mit weichem Thon als Bindemittel, angewendet sind, als auch in jenen besseren Häusern, in welchen behauene Steine, Ziegel und Kalk als Material benützt sind. Selbst in den indischen Palästen der Mussălmáns, in welchen Sculptur in ornamentalen Formen auftritt, wiederholt sich dieses Princip mit Ausnahme der wenigen sphärisch-conischen Kuppeln der Moscheen und der Minarets.

Das Gebäude des Góba von Núbra zu Pangmíg hat einen Haupttheil und zwei Flügel; diese nebst Hof und Garten sind von einer Mauer umschlossen. Auf dem Dache des einen Flügels befindet sich, angelehnt an den Oberbau des Haupttheiles, eine Veranda, wo man Schutz vor der Sonne sucht. Die Steinmauern des ganzen Gebäudes sind aussen mit einem Mörtelanwurfe versehen und dieser ist an den Kanten des Hauses, ebenso wie an den Umrahmungen der Fenster, mit rother Farbe bemalt. Wie zu erwarten, sind Gebetflaggen und Fähnchen verschiedenster Art an vielen Stellen angebracht, die schon aus grosser Entfernung sich bemerkbar machen.

Unter den Bäumen des Gartens, der das Haus umgibt, treten am meisten hervor einige Gruppen von mittelhohen Pappeln, nebst Weiden von ähnlicher Stärke; auch schöner, grossgipfeliger Aprikosenbäume ist zu erwähnen.

Ueberhaupt bietet dieser Theil von Núbra, das Chéra-Thal, an vielen, aber isolirten Stellen, die bewässert und bewachsen sind, eine für Tibet sehr günstige Flora.[74]) Die besten Lagen sind nicht unmittelbar am Flusse selbst zu finden, sondern da, wo seitlich Schutt am Fusse der Abhänge sich anhäuft, wenn damit etwas constanter Wasserzu-

---

74) Nach der systematischen Bearbeitung des entsprechenden Theiles unseres Herbariums durch E. F. Meissner (in den Annales des Sciences naturelles Band VI) sind z. B. die Species der Familie der tibetischen Polygoneen im Chéra-Thale sehr reichlich vertreten. Von den Pappelarten und ihren Varietäten, welche A. Wesmaël im Bulletin der belgischen botanischen Gesellschaft (Bd. VII) erläuterte, fanden sich in unserem Herbarium 5 Species, wovon 1 Species 3 Varietäten zeigte, 2 andere Species je 2 Varietäten, die alle in Tíbet vorkamen, mit Ausnahme von Populus nigra, varietas pyramidalis. Die Pappeln zeigen grosse Resistenzfähigkeit gegen Aenderung der klimatischen Verhältnisse; in Tíbet lässt sich jedoch deutlich erkennen, dass sie etwas zahlreicher sind in Bálti, dem relativ feuchteren Gebiete, als in den übrigen. Die Populus balsamifera fand sich als Strauch in Tíbet (in Gnári-Khórsum höchster Stand) in Höhen von 14,800 bis 15,300 Fuss. Zugleich kommt sie vor in Pănjáb, in einem Gebiete der Wärmeextreme und, wie Wesmaël beifügte, „auch in Neufundland."

fluss sich verbindet; die günstigste Exposition ist jene auf der linken Thalseite, jene gegen Westen. Auf dieser Seite finden sich desshalb all die bewohnten Orte und die sie umgebenden Culturen.

Bei Pangmíg zeigte sich — gleichfalls sehr belehrend in der Reihe der Objecte, die während der Route durch Núbra sich beobachten liessen — eine ungewöhnlich schöne Gruppe von Chúruns oder heissen Quellen; niederste bei 10,538 Fuss.[75]) Von deren Existenz war uns schon in Le gesprochen worden; doch waren sie damals als Heilquellen nur äusserst selten benützt, ungeachtet des im trockenen Tíbet und überhaupt bei der turanischen Raçe so häufigen Leidens an Gicht und Rheumatismus. Nach den neuesten Berichten dieses Jahres ist jetzt bei Pangmíg, etwas oberhalb der Hauptquelle, ein Badehaus erbaut und diese Thermen sollen nun sehr vielfache Anwendung finden.

Bei Chang- (oder Chong-) lúng war der Halteplatz des nächsten Tages. Chang oder Chong bedeutet „Enge“ lung „Bach“. Es lässt sich diess auf den Bach vom Sássar-Passe herab beziehen.

Auch hier fanden sich auf der gleichen Thalseite wie bei Pangmíg, auf der linken, nochmals heisse Quellen, in der Art des Ausströmens ganz ähnlich jenen zu Pangmíg.

Von der höchsten, zugleich der wärmsten dieser Quellen entwarf ich ein Aquarell (Gen. No. 592). Hier ist hervorzuheben, dass der ockerbedeckte Conus, der jetzt die Stelle des Ausfliessens ist, am unteren Ende einer engen dunkeln Spaltung im Granitschutte sich befindet. Diese Quelle liegt etwas mehr als tausend Fuss höher als jene bei Pangmíg, nämlich bei 11,890 Fuss; Temperatur 74·3° C. Was diese Stelle zierte, war eine üppige strauchähnliche Graspflanze, welche sich in lebhaft hellem Grün von den Felsen abhob. Dieselbe Grasart, deren schon Thomson als einer „Melica“ erwähnt, kommt in Núbra im Allgemeinen häufig vor und erinnert im Kleinen, bei 6 bis 8 Fuss Höhe, an die indischen Bambusgruppen.

---

75) Diese Quellen, zugleich mit Kochsalzquellen, die noch im Karakorúm auf seiner Nordseite sich finden, werde ich besprechen, in Verbindung mit den gleichfalls dort vorkommenden Seen, im II. Theile der Untersuchungen über die Salzseen im westlichen Tibet und in Turkistán“. — (Theil I „Rúpchu und Pangkóng, das Gebiet der Salzseen im westlichen Tibet“ ist in den Denkschriften der k. b. Akademie der Wissenschaften, II. Cl. XI. Bd. S. 103 bis 174 erschienen).

Grosse erhärtete Incrustationen des Bodens bildeten bei der oberen Changlúng-Quelle die schiefe Ebene des Abflusses; sie waren, wo nackte Fläche sich bot, von der Farbe hellen Ockers; an vielen Stellen sah man auch die grünlichen Algendecken.

Als Vegetationserscheinung unerwartet für die Höhe von Changlúng ist eine Hippophaë conferta Benth. zu erwähnen; solche gehört in die grosse Gruppe der Laurineen, enger begrenzt in die Familie der Eläagneen, und ist unserem Sanddorn, H. rhamnoides L., sehr nahe verwandt. (Meine Abbildung ist Gen. No. 248). Hier zeigte sich diese Hippophaë als ein frei stehendes stämmiges Bäumchen von 18 engl. Fuss Höhe. Der Name der Tibeter ist Sía; gewöhnlich kommt sie schon in viel tieferen Lagen nur in Strauchform vor.

Changlúng, obwohl unbewohnt, ist als Halteplatz ein wichtiger Punkt längs der Verkehrslinie nach Turkistán, weil an dieser Stelle das Chéra- oder Núbra-Thal verlassen wird, um über die Sássarkette nach dem jenseitigen Theile von Núbra, dem oberen Shayók-Thale, zu gelangen. Die Karawanenroute gegen den Sássar-Pass steht rechtwinkelig auf der Richtung, welche uns dem Chéra-Thale entlang heraufgeführt hatte. Die Ecke ist desshalb auch auf der Karte („Reisen“ Bd. III) sogleich zu erkennen. Den Namen Changlúng konnte ich, um das Terrain deutlich zu lassen, nicht anbringen.

Für uns war Changlúng um so bedeutungsvoller; weil wir hier jene zu Le in unsere Dienste genommenen Yarkándis, „wie zufällig“, lagern finden sollten, von denen als Führern und Gehilfen auf der neuen Route weiter gegen Norden so vieles nun abhing.

Wir fanden sie, unser harrend. Und sie waren klug genug, unseren indischen und tibetischen Begleitern aus Le durch keine Miene zu verrathen, was der Gegenstand unserer Pläne war.

Unsere Ladáki-Begleitung wurde hier einfach beordert, wieder langsam, als ob uns vorausmarschirend, nach Ladák zurückzukehren. Wir selbst, hiess es dabei, würden „wohl ziemlich bald“ nach Le folgen. Dass wir hier, wo einige Bergexcursionen in der Nähe uns reizen konnten, noch etwas verweilen wollten, und dass uns dabei die neue, besser kundige Gruppe der Turkistánis führe, war nicht auffallend. Es erregte diess um so weniger Zweifel als bei weitem der grösste Theil

unseres Gepäckes ohnehin durch die Ladákis und die indischen Diener zurückgeschafft wurde. Wir hatten uns von Le aus absichtlich mit mehr als nöthiger Menge von Zeltmaterial und ähnlichen schweren Gegenständen versehen, um auch beim Zurücksenden nicht zu wenig bieten zu müssen. Dass wir Messinstrumente und Jagdzeug behielten, war nicht störend; es war, „was stets geschah", wenn wir von Halteplätzen aus auf Seitengebiete uns begaben. Die für unsere Verkleidung bestimmten Materialien dagegen waren schon zu Le den vorausgesandten Yarkándis anvertraut worden.

Die Leute, die jetzt mit uns zogen, waren ausser Máni von Milum [76]), dem einzigen darunter, der von Le her mit uns kam, — der Yarkándi Mohámmad Amín als eigentlicher Führer — Makshút, ein Mussălmán aus Délhi, früher im Gefolge Moorcrofts, den wir am Wege nach Ladák gefunden hatten — und sechs Yarkándis als gewöhnliche Diener, die in den Bazárs von Le verweilt hatten.

Mohámmad Amín, obwohl schon etwas bejahrt, war durch seine allgemeinen Kenntnisse des Landes, sowohl uns bei dieser Reise, als auch Adolph im folgenden Jahre, sehr wichtig geworden. — Von Thieren hatten wir bei uns 6 Reitpferde, 13 Packpferde und eine kleine Heerde von Schafen und Ziegen, 15 Stück. Was Bekleidung betrifft, galt es sich ganz einfach einzurichten, nicht nur wegen der sonst grössern Schwierigkeit des Transportes, sondern auch desshalb, um so wenig als möglich durch die Menge oder die Art der Ausstattung aufzufallen. Wir hatten für uns einen mittelstarken Anzug und einen Pelzrock als schlafrockähnlichen Ueberrock, wie dort gewöhnlich, der oft genug auch des Nachts uns Schutz im Lagern auf einer Filzdecke bieten musste; die Kopfbedeckung waren runde Pelzmützen, vom Kopfe cylindrisch, ohne Augenschutz, einige Zoll aufsteigend und oben kugelförmig geschlossen — oder sehr eigenthümliche Weise Hüte aus weichem Filze, die nach vorne eine weit vorstehende Krämpe bildeten, hinten aufgeschlagen waren;

---

76) Máni, ein Bhot-Rajpút aus einer einflussreichen Familie in Johár (Theil des nördlichen Kămáon), war schon im Jahre vorher von Adolph und Robert engagirt gewesen und hatte damals bei dem Vordringen nach Gnári-Khórsum im centralen Tíbet wichtige Dienste geleistet. Er ist bald nach unserer Abreise Patvári oder Vorstand des Districtes Johár geworden.

sie waren leicht und boten doch dichten Schutz gegen die unter Tags oft sehr intensive Besonnung.

Unsere festen Bergschuhe, die wir am wenigsten hätten entbehren können, wurden beibehalten. Es war nicht sehr schwierig, sie durch Belegen mit Filzlappen, die den Gamaschen der Túrkis ähnlich, noch die Hälfte des Unterschenkels bedeckten, zu verbergen. Die Schuhe, welche unsere Yarkándis trugen, waren zwar etwas besser als die tibetischen Schuhe, da nicht Wolle allein, sondern auch Leder angewandt war, dessenungeachtet waren sie sowohl im richtigen Anpassen an den Fuss, als auch in der Widerstandsfähigkeit der Sohle und der Seitenleder noch immer sehr unvollkommen.

Die neue Bekleidung legten wir erst jenseits des Sássar-Passes an, da wir hier noch ganz ungefährdet waren, und da die zunächst bevorstehende Anstrengung, welche uns der Plan einiger Untersuchungen in grösserer Höhe erwarten liess, möglichste Erleichterung in der Ausrüstung dazu nöthig machte.

Waffen waren ganz nothwendig, sie werden selbst von den gewöhnlichen Karawanenleuten stets geführt. Auch zu zeigen, dass wir sämmtlich genügend mit Waffen versehen waren, konnte in allen Fällen nur günstig sein; nur musste, in Verbindung mit der für uns so nöthigen Verkleidung, auch der europäische Charakter der Waffen möglichst verborgen bleiben. Von Säbeln und Dolchmessern war es leicht, zu Le die in Turkistán gewöhnlichen Formen zu erhalten, von Yarkándi-Schusswaffen auch; aber diese konnten für unsern eigenen Gebrauch nicht genügen; mit solchen wurden unsere Führer und Diener versehen. Es waren dies Kugelflinten sehr engen Kalibers. Viele Flinten aus Turkistán hatten russischen Stempel. Die Abfeuerung geschah mit der Lunte, und nahe dem vorderen Ende des Laufes befand sich, verbunden mit dem langen Holze, auf dem der Lauf ruht, ein Gestelle, ähnlich einer schmalen Gabel mit zwei Zähnen. Bei gewöhnlichem Gebrauche stand die Gabelung über den Lauf hinausragend nach vorne, war nutzlos, aber störte auch nicht im Zielen, da der vordere Theil etwas nach abwärts gekrümmt ist. Bei Benützung aus dem Hinterhalte jedoch werden diese Gabelspitzen angewandt. Sie werden nemlich umgeklappt und auf den Boden aufgesetzt, und sie bieten dann als feste Unterlage

grössere Sicherheit im Zielen, da sich auch der Schütze, um sich möglichst zu verbergen, hinter der Flinte zu Boden legt. Die Schafte sind stark gekrümmt, wie bei den orientalischen Flinten älterer Form allgemein, und werden stets so gehandhabt, dass die Krümmung des Schaftes unterhalb der Achselhöhle anliegt. Für uns selbst hatten wir starke Doppelflinten (von Morton) für Schrot und Kugeln brauchbar, mit Kapselfeuer, wie sie damals in Indien die am meisten benützten waren. Wenn nicht in Gebrauch zur Jagd und wenn keine Gefahr zu erwarten war, hatten auch wir unsere Flintenschlösser, ebenso wie es bei den so unvollkommenen Luntenflinten des Schutzes wegen geschieht, mit Wollstreifen umwickelt. Schon dies genügte, sie ungleich weniger auffallend zu machen. Unsere Revolver stacken während des Marsches in der Satteltasche, aber bei Begegnung und Besprechung hatten wir sie im Tuchgürtel, der stets mit dem Kaftán zugleich getragen wird.

Schwieriger noch als die Ausrüstung mit Waffen war das Mitführen von wissenschaftlichen Instrumenten, deren Benützung jedoch auf einer ganz neuen Route uns vor allem als Ehrenpflicht erschien. Unsere eingeborenen Leiter der Expedition, Mohámmad Amín, Makshút und Máni wussten ohnehin von unseren Absichten und wussten auch sehr wohl, dass sie nur gewinnen konnten, wenn sie unsere Arbeiten stets förderten; bei den sechs Trainleuten hatten wir allerdings etwas mehr Vorsicht nöthig und am meisten bei Begegnung fremder Karawanen. Es liessen sich jedoch fast stets für die nöthigen Beobachtungen seitliche Stellungen bei der Benützung der Instrumente finden, die uns zu operiren erlaubten.

Entsprechend hatte sich auch unser gefallener Bruder Adolph eingerichtet. Nicht das Mitführen seiner Instrumente oder unvorsichtige Anwendung derselben war es ja, was sein Schicksal bedingte, sondern der Aufruhr und dessen Führer, der räuberische und barbarische Váli Khan.

Während des Transportes hatten wir jene unserer Instrumente, die man nicht, wie die gewöhnlichen Thermometer, die Sextanten, prismatischen Compasse, Cyanometer, Senklothe u. s. w. in den eigenen Kleidern oder in jenen der Begleiter unterbringen konnte, in Waarenballen, die leicht zu öffnen waren, verborgen.

Unter den letzteren unserer Instrumente auf der Turkistáni-Reise

sind zu nennen, ausser den schon Eingangs erwähnten Hypsometern: Theodolit Nr. 2 von Jones, nebst Deklinationsnadel; Inclinations-Apparat Nr. 2; Vibrations-Apparat mit Nadel B. 5 zur Bestimmung der horizontalen Intensität; 1 Chronometer von Parkinson und Frodsham, signirt Nr. 3 — diese erläutert, mit der Erklärung der magnetischen Beobachtungen, „Results“, Vol. I.

Von Changlúng, bei 12,000 Fuss, brachen wir auf am 31. Juli Morgens. Der Weg konnte nicht so gewählt werden, dass man unmittelbar dem Seitenthale, auf das der Name sich bezieht (s. o. S. 69) und seinem vom Sássarkamme herabfliessenden, hier in den Chéra- oder Núbra-Fluss mündenden Gletscherbache folgte; ehe man wieder in die Thalsohle des letzteren gelangte, musste der Changlúng-Pass, 15,322 F., der über einen Seitenkamm führt, überschritten werden. Wenigstens war die Höhendifferenz jenseits dieses Kammes keine sehr bedeutende; die nächste Haltestelle im Changlúng-Thale, Pangtángsa, ist nur 678 Fuss unter dem Passe. Der ganze obere Theil der Pangtángsa-Mulde ist durch weite Firnlager ausgefüllt; ein Gletscher zieht sich bis in die Thalsohle herab und bot ein interessantes Bild (Gen. Nr. 644). Der Bach, der ihm entströmt, macht oft sehr bedeutende Schwierigkeiten.

Die Haltestelle befindet sich am linken Ufer des Gletscherausflusses. Dort sind zwei sehr niedere Hirtenhäuser aus geschichtetem Schutt construirt (Zeichnung Gen. Nr. 351). Sie lehnen sich unmittelbar an eine alte Moräne an, deren Höhe und Mächtigkeit durch diese bescheidenen Zufluchtsstätten gegen Sturm und Kälte an malerischem Effecte gewinnt. Das eine dieser Steingebäude, obwohl dasselbe schon Zerfall zeigte, hatte ein niederes, sehr flach abfallendes Dach; das andere war eine einfache, oben offene Hürde, aber wenigstens mit vier Wänden und deutlichem, nicht zu weitem Eingange.

Der letzte Lagerplatz vor der diesseitigen Gletschermasse des Sássar-Passes ist Déra Skyangbóche oder Tóte Áulik, unmittelbar am Eisthore des westlichen Sássar-Gletschers; Höhe 15,659 Fuss. Von da steigt der Weg anfangs an der Seitenmoräne des Gletschers hinan, wobei mehrere Gletscherseen vorkommen. Hier sind dieselben Aufstauungen von

Wasser aus Nebenmulden durch dichte Berührung der seitlichen Eismasse mit den Felsenabhängen [77]).

Sobald der Weg auf das Eis selbst führt, beginnt die Zerspaltung des Gletschereises viele Schwierigkeiten zu bieten. Die Passhöhe fanden wir = 17,753 Fuss; der Weg nach der östlichen Seite bis zur Haltestelle Déra Sássar am Ostfusse des Passes ist noch schwieriger als jener auf den westlichen Gehängen. Für den Gütertransport durch Pferde, die dennoch regelmässig hier angewandt werden, gilt dieser Uebergang als einer der schlimmsten längs der ganzen Turkistánroute in Núbra. Dazu kommt, dass die horizontale Entfernung zwischen Tóte Áulik und Déra-Sássar, die allein als die letzten Haltestellen für Karawanen zu wählen sind, eine sehr beträchtliche ist. Hier war es zum erstenmale uns bemerkbar geworden, dass das Vorkommen von Pferdeskeletten zugleich die Richtung des Ueberganges bezeichnete. Und nur zu rasch mehrten sich nun die Reste der gefallenen Thiere.

Wir selbst hatten uns etwas verschieden von dem Ueberschreiten durch Karawanen eingerichtet; wir verweilten auf der Passhöhe. Am 2. August um 10 Uhr Morgens hatten wir die Höhe der Uebergangsstelle erreicht und liessen nun unsere Zelte hier aufschlagen, um mehrere Tage mit topographischen Untersuchungen der Umgegend, mit einem Panorama-Aquarelle (Gen. No. 625, Atlastafel der „Results“ No. 7) und mit Beobachtungen über den Einfluss der Höhe zuzubringen. Wir verliessen das Lager erst gegen Mittag des 4. August.

Am Passe fiel mir sogleich die Form der Gletscher auf, jener Eisströme, welche als Marken der Ortsveränderung ihrer Masse mit Steinmoränen bedeckt, oder — wo sie aus Firnmulden austreten, in denen die trennenden Kämme nicht bis an die Oberfläche reichen, — durch eingelagerte Firnmassen, „Firnmoränen“, wie ich auch in den Alpen schon sie gesehen hatte [78]), geschieden sind. Da nämlich der Pass auf der Chéra-Seite gegen Westen fällt und fast in gleicher Linie jenseits, auf der Shayók-Seite, gegen Osten, so liesse sich, den gewöhn-

---

77) Der verschiedenen Formen von Gletscherseen im Allgemeinen hatte ich schon bei den hydrographischen Verhältnissen (S. 62) zu erwähnen.

78) Zuerst beschrieben in „Untersuchungen über die physikalische Geographie der Alpen“ Leipzig 1850, S. 68.

lichen Verhältnissen der Hochregionen entsprechend, erwarten, dass zu beiden Seiten der Uebergangsstelle die Firnmulde mit einem etwa nach der Mitte sich einsenkenden Kamme dazwischen, sich fänden. Hier aber ist die ganze Haupterhebungsmasse, sowohl längs der östlichen, als längs der westlichen Abdachung seitlich gelegen, im Süden. Dort erhebt sich der 25,183 Fuss hohe Changlúng-Gipfel. Es wurde von der Trigonometrical-Survey aus ziemlicher Entfernung, aber unter den in die allgemeine Triangulation eingeschlossenen Gipfeln, auch dieser gemessen, und als K_{25} angegeben.

Vom diesem Hauptstocke ziehen sich gegen den Pass 2 Gletscher fast parallel herab, die erst kurz ober dem Passe zu divergiren beginnen; der eine geht in das Chéra-, der andere in das Shayók-Thal. Der Kamm, der weiter oben sichtbar ist und deutlich zwischen den Firnen der beiden Gletscher sich emporhebt, mag sich nur wenig unterhalb der Oberfläche heranziehen; am Passe ist er bedeckt und nur durch die resultirende Veränderung in der Richtung der beiden Gletscherkörper, aber daran ganz deutlich, zu erkennen; eine eigenthümliche, bei Gletschern von solcher Grösse sehr seltene Terrainform.

Die Schneegrenze hat hier eine mittlere Höhe von 18,600 Fuss. Südlich vom Passe begünstigt die Form des Gebirges durch Masse sowie durch Erhebung eine scharfe Gestaltung der Schneegrenze. Dagegen trat Anfangs August, also ganz in der Zeit, wo die Verhältnisse schon sehr deutlich sich zeigen müssen, nirgend eine Stelle bestimmter Schneegrenze in der dem Passe von Norden her zugewandten, niederen Gruppe auf; vereinzelte Firnausfüllungen von tiefen, unregelmässigen Felsenklüften sah man am häufigsten und an einer Stelle nur tritt aus einer kleinen Mulde, deren rückwärts gelegener, erweiterter Theil hier durch Felsen verdeckt ist, auf dem Abfall gegen Westen ein secundärer Gletscher hervor, der aber nicht bis zum Hauptkörper des westlichen Sássar-Gletschers herabreicht.

Kalk-Gesteine stehen an hier oben, aber vorherrschend sind krystallinische geschichtete Gesteine, und der Kalk hat keine Wahrscheinlichkeit sedimentär zu sein. —

Da von uns — ausser der Bergbesteigung auf dem nahe dem Passe gelegenen Sássar-Peak, worüber Detail sogleich folgen wird —

eine genügende Zahl von Stunden hier in körperlicher Ruhe, wenn auch stets zeichnend und malend oder schreibend, zugebracht wurde, und da die Yarkándi-Begleiter noch weniger sich anstrengten, kann ich hier bestimmter, als an vielen anderen Punkten über die von uns und unseren Leuten gefühlten Wirkungen des verminderten Luftdruckes berichten.

Der Barometerstand am Lagerplatze war 15·66 engl. Zoll, was sich also, die mittlere Barometerhöhe am Meeresufer = 30 engl. Zoll angenommen, der Hälfte des Luftdruckes nähert. Genauer entspricht dem halben Luftdrucke die Höhenregion von 18,600 bis 18,800 Fuss.

Aehnlich wie hier am Sássar-Passe hatte Adolph das Jahr vorher, 1855, den Luftdruck auf dem Traill's-Passe gehabt, nämlich 15·776 engl. Zoll; Höhe 17,770 Fuss. Am Íbi-Gámin-Gipfel, 19. August 1855, war die von Adolph und Robert erreichte Höhe, die grösste überhaupt bei den bis jetzt bekannten Bergbesteigungen, 22,259 engl. Fuss; am Íbi-Gámin-Passe den 22. August, war die Höhe 20,459 Fuss. Barometerstände: 19. August = 13·364 Zoll — auf nahe 2/5 des ganzen Luftdruckes reducirt; 22. August = 14·193 Zoll.

Die Höhenpunkte am Íbi-Gámin und in seinen Umgebungen liessen den Einfluss des verminderten Luftdruckes als solchen nicht ganz rein beurtheilen, da stets sehr starke Stürme dabei auftraten. Am Traills-Pass machte sich ungeachtet der Anstrengung des Ansteigens der Einfluss der Luftverdünnung erst verhältnissmässig spät fühlbar; er steigerte sich aber bei längerem Verweilen, zumeist für die Eingeborenen, wozu auch bei ihrer ungenügenden Bekleidung die sehr niedere Lufttemperatur viel beitragen mochte. Das Athmen in kalter Luft, so lange man nicht selbst dabei friert, belästigt nicht wesentlich.

Hier am Sássar-Passe, bei Windstille und bei Ruhe des Körpers, war Störung nicht sehr fühlbar; doch liess sie sich an steter Abgeschlagenheit, bei genauer Beobachtung an ungewöhnlicher Kälte der Hände und selbst an der Hautfarbe erkennen. Diese war sehr blass und solches zeigte an unseren Leuten — ungeachtet dunkleren Teints — wenigstens die Farbe ihrer Lippen. Dass die Bindehaut des Auges

---

79) „Reisen" Bd. II, S. 325—26.

geröthet war, dass bisweilen selbst deutliche locale Entzündung dort eintrat, hatte seinen Grund in dem Reizen des Auges durch grell blendende Schnee- und Firnflächen.

Die Blässe des Gesichts und der Lippen lässt schliessen, dass eine venöse Ueberfüllung in der Blutcirculation stattfindet. Das Athmen war etwas kurz, doch begann diess erst dann störend und drückend fühlbar zu werden, wenn Bewegung des Körpers oder, in gleichem Sinne wirkend, Bewegung der Atmosphäre, Wind, eintrat.

Ausser der Affection der Brust und auch des Magens, dessen Mitleidenschaft, so viel ich weiss, früher nicht direct diagnosticirt wurde, ist Kopfweh sehr allgemein.

Blutspucken kam bisweilen vor, dabei war stets individuelle Disposition des Betreffenden Hauptbedingung.

Wind hatten wir am Sássar-Passe und in seinen Umgebungen nie heftig; ja während unseres Aufenthaltes am Passe war es beinahe stets so ruhig, dass sich kaum an der Bewegung von Rauch eine bestimmte Richtung erkennen liess; nur in den Nachmittagsstunden war einmal mässige Windströmung aus WSW. eingetreten; sogleich nach Beginn des Windes fühlten wir leichtes Kopfweh, auch schwaches Nasenbluten trat bei Mehreren ein. Da wir diese Eigenthümlichkeit von anderen Reisenden nicht erwähnt fanden, waren wir darauf, sobald wir sie bemerkten, besonders aufmerksam.

Ueber starken Wind bekamen wir bald darauf in hohen Lagern Turkistáns die bestimmtesten Beobachtungen zu machen, dann nämlich wenn der Wind des Nachts eintrat, wobei die Ruhe die sonst günstigsten Bedingungen bot. Sobald etwas starker Wind sich erhob, machte er, selbst im Zelte, dem Schlafenden den Eindruck einer Belastung der Brust; unwillkürlich wurden die Decken abgestreift und sogleich erfolgte nun bei Allen Erwachen, durch das eintretende Kältegefühl veranlasst. Auch mehr oder weniger starke Uebelkeit, Seekrankheit ähnlich — mit Erbrechen bei einigen unserer Leute — zeigte sich dann.

Die absolute Menge der Feuchtigkeit in der Luft nimmt, analog der Verdünnung der Luft, mit der Höhe ab, und Sättigung sowie Nebelbildung tritt oben bei ungleich geringerer Wassermenge in einem gegebenen Volumen Luft ein, als bei hohem Barometerstande. Am

Íbi Gámin und Umgebungen war damals keine fühlbare Wirkung davon zu erwarten, weil, wenigstens verhältnissmässig, die Wassermenge genügte, indem die relative Feuchtigkeit der Sättigung stets nahe blieb, auch Nebelbildung vorkam.

Am Sássar-Passe war die relative Feuchtigkeit am Tage unserer Besteigung des Sássar-Berges 16 Procent, später, an manchen hohen Stellen in Turkistán, noch viel geringer, nahe 0; doch auch davon fühlten wir keine directe Affection, ebenso wenig wie in den etwas tiefer liegenden, sehr trockenen Regionen Tíbets und Turkistáns.

Von unseren Thieren litten hier oben entschieden die Pferde; sie nahmen des Morgens nichts von dem mitgeführten Futter, das ihnen geboten wurde, und waren sehr matt und abgeschlagen. Gleiches bemerkten wir später an den baktrischen Kameelen in solchen Höhen.

Am 3. August machten wir vom Sássar-Passe aus auch eine Bergbesteigung. Unsere Leute entschlossen sich sehr ungerne dazu. Am meisten fürchteten sie die „Risse", die Firnspalten; das gegenseitige Verbinden durch Stricke, das wir vornahmen, war ihnen unbekannt. Ueberhaupt war hier, wie ja zu Saussures Zeit noch in Europa, eine Besteigung grosser Höhe als solche nie vorgekommen.

Bis zum Errichten des Flaggenstockes auf einer schönen, freien Schneerundung bei Barometerstand von 14·98 engl. Zoll, 0·88 Zoll niederer als im Lager, hatte sich die Verminderung des Luftdruckes unerwartet stark fühlbar gemacht; die bis dort anzusteigende Höhe, wozu wir von 10 Uhr Morgens bis 12½ Uhr Nachmittags brauchten, war 1436 Fuss. Was nun folgte, war noch anstrengender, ein Anklimmen über kantige, meist schneefreie Felsen; doch kamen wir 930 Fuss noch höher, bis 20,120 Fuss (wie mit dem bei der Fahne aufgestellten und später auch vom Lagerplatze aus benützten Theodoliten sich ergab). Schon eine lange Strecke vorher war allgemeine Athmungsbeschwerde und Uebermüdung eingetreten, die mit einer Apathie, ähnlich wie jene bei nahender Gefahr des Erfrierens, verbunden war. Wir selbst konnten sie nur mit grösster Mühe überwinden und hatten dabei noch wiederholt unsere Leute anzufassen und zu beleben, die gegen alle Muskelbewegung abgestumpft waren, und nicht aufwärts, selbst nicht abwärts mehr gehen wollten.

Die Temperatur hatte dabei keinen störenden Einfluss, sie war vielmehr an diesem Tage eine sehr günstige. An jenem Platze, wo der Theodolit und die Flagge aufgestellt wurden, war sie um 12^h 30′ p. m. 13·8 C.; auf dem zuletzt erreichten Punkte hatte sie zwischen 10 und 11^0 C. geschwankt. Auch war die Luft an diesem Tage bis oben sehr ruhig. An die höchste Stelle gelangten wir um 2½ Uhr.

Das Lagern von nahezu einer Stunde daselbst brachte uns durch Ruhe etwas Erleichterung. Der entsprechende Barometerstand ergibt sich, aus den Barometerformeln in Verbindung mit der trigonometrisch ermittelten Höhe entwickelt, für die oberste Stelle = 14·44 Zoll.

Ungeachtet der Arbeit des Ansteigens war doch bei Niemanden eine etwa durch Röthung indicirte arterielle Blutcongestion eingetreten.

Meist folgte nach dem Herabsteigen aus hoher Region sehr bald vollkommenes Wohlbefinden. Selbst eine Art von Gewöhnung trat ein, z. B. für Höhen von 17,000 bis 18,000 Fuss; für mehr als wochenlanges Verweilen allerdings wären gefährliche Folgen zu befürchten gewesen.

Noch ist des Aufsteigens in Luftballons vergleichend zu erwähnen. Dieses ist dadurch sehr verschieden, dass sich Muskelanstrengung nicht damit verbindet; auch der Umstand kann nur günstig sein, dass man bis jetzt nur mit dem Winde fliegt, dessen Einfluss dadurch sehr vermindert wird. Ungünstig dagegen ist die grössere Schnelligkeit der Veränderung des Druckes. Die grösste im Ballon von Glaisher und Coxwell erreichte Höhe war „mindestens 32,000 engl. Fuss"; am 5. September 1862. Der Ballon war gelenkt von Coxwell. In solcher Höhe allerdings waren nun der Beobachter und der Führer des Ballons kaum mehr ihrer Sinne mächtig. Bis 23,020 Fuss war, schon 1805, Gay Lussac gelangt, der von Paris aufstieg.[80])

Als wir am 4. August vom Sássar-Passe gegen Osten in das Shayók-Thal herabstiegen, boten sich viele Schwierigkeiten durch die Zerklüftung

80) Andere unserer Untersuchungen an vereinzelten Localitäten, mit Hinzuziehung der wichtigen experimentablen Arbeiten von Hofrath G. v. Liebig zu Reichenhall, sowie der sehr sorgfältig durchgeführten Beobachtungen Dr. Lortet's bei zwei Montblanc-Besteigungen 1869 werde ich im fünften Bande der „Results" in Verbindung mit der allgemeinen Behandlung des Luftdruckes folgen lassen.

des Gletschereises. Meist hat man dem äussern Rande der rechts liegenden Seitenmoräne zu folgen. Wo Wasser sich angesammelt hat, oder wo die festen Gesteine des Abhanges zu steil sind, muss man wieder die Moräne hinanklettern und auf dem Eise sich forthelfen. Wenigstens sind hier die seitlichen Wasseransammlungen nicht so bedeutend als jene auf der Westseite des Sássar-Kammes. Wir selbst konnten uns mit den guten Schuhen, fest besohlt und stark benagelt, ungleich besser bewegen als unsere Leute. Auffallend ist, dass der Gebrauch von Steigeisen, der vor allem bei so ungenügender Fussbekleidung von grossem Vortheile wäre, nirgend in Hochasien bekannt ist. Wir erklärten den Leuten den Gebrauch und es wurden ihnen auch nach unserer Angabe der Formen, allerdings erst zu Le nach der Rückkehr, beim Hufschmiede die zwei verschiedenen Arten von Steigeisen, jene mit fester Eisenbasis und jene, in denen die vordere und die hintere Hälfte durch ein Gelenk verbunden sind, angefertigt; doch ich glaube nicht, dass dieselben weitere Verbreitung gefunden haben. Die Art der Beschuhung erschwert auch gar sehr das richtige Befestigen solcher Eisen.

Mit den stets von uns benützten europäischen Schuhen hatten wir selbst Steigeisen nie angewandt, auch in den Alpen nicht. Dagegen werden sie in den Alpen, ungeachtet der guten Schuhe, von allen benützt, die, sei es auf der Jagd oder in Verbindung mit der Alpenwirthschaft und dem Verkehre, als Träger arbeiten.

Schneereife waren in Tíbet und Turkistán gleichfalls unbekannt; diese allerdings sind entbehrlich, da die mittlere Höhe des Schneefalles stets eine geringe ist, und da nur an vereinzelten Stellen etwa ein belästigendes Einsinken zu befürchten wäre, an jenen, wo frischer Schnee durch wirbelnde Brechung des Windes längs der Felsen angehäuft wird. Solche lassen sich umgehen. In den Alpen, noch allgemeiner in Norwegen, werden aber Schutzmittel gegen das Eintreten gebraucht; sie bestehen aus einem Netzwerke von Stricken, das in einem Reife befestigt ist.

Am schlimmsten ist der Weg vom Sássar-Passe herab für die beladenen Pferde; zu reiten war grosse Strecken entlang gar nicht möglich. In Folge des häufigen Stürzens und der damit verbundenen

heftigen Stösse und Reibungen durch die Belastung kamen die meisten der Pferde äusserst erschöpft am Lagerplatze im Shayók-Thale an. Wir hatten von der Passhöhe bis zum Fusse des Passes von 1 Uhr bis $6^1/_2$ Uhr des Abends gebraucht.

Ungleich anstrengender noch, wie man sogleich sieht, sind die Verhältnisse für die gewöhnlichen Karawanen, die nicht eingerichtet sind, auf dem Passe Halt zu machen, sondern die ganze Strecke aufwärts und abwärts in einem Tage zurücklegen.

Etwas Erleichterung bietet den Pferden ein gutes, nicht zu schweres Beschläge, das im westlichen Tíbet, noch allgemeiner in Turkistán angewandt wird. Die Karawanen haben stets Eisen und Nägel zu sofortiger Aushülfe bei sich und die Pferdeführer sind meist der während des Marsches nöthigen Schmiedearbeit kundig; auch von unsern sechs Yarkándis für die Packpferde waren drei ganz gute Pferdebeschläger.

Kameele kann man nur in der Art schützen, dass sie einen Ledersack an jeden ihrer Füsse angebracht erhalten. Es wird dabei der Fuss auf die Mitte eines kreisförmigen Lederstückes, mit Oesen nahe an der Peripherie, gesetzt (construirt wie die Ledergeldbeutel älterer Form in Europa) und dann wird der Rand zusammengezogen und zugleich an den Fussgelenken festgebunden. Solches schützt die weiche Sohle ohne den Fuss zu drücken, aber es wird auch ziemlich rasch die Lederschicht durchgerieben.

Der Name des ersten Halteplatzes im Shayókthale ist Déra Sássar, Höhe 15,339 Fuss. Es befand sich dort 1856 eine runde Mauer aus aufgeschichteten Steinblöcken; in den letzten Jahren ist eines kleinen Hauses, auf Forsyth's Veranlassung dort gebaut, erwähnt.

Hier war es, wo wir zuerst unsere Túrki-Bekleidung anlegten, da wir nun, so weit vorgeschritten, bei etwaiger Begegnung mit Turkistáni-Karawanen nicht als Europäer auffallen wollten. Dabei bekamen wir auch den Kopf geschoren; wir zogen vor, diess mit einer Scheere in der Art ausführen zu lassen, als hätte das Rasiren mit dem Messer schon einige Zeit vorher stattgefunden. Es hatte dies kein Bedenken, da das Rasiren gewöhnlich in Zwischenräumen von 6 bis 8 Wochen geschieht; solches ist stets auch den Eingeborenen ein peinliches Verfahren, da die Hände nicht sehr zart arbeiten und, was das Schlimmste

ist, da jene Messer, deren allein die Eingeborenen sich zu bedienen wissen, ziemlich grobes Material sind.

Vor dem Aufbrechen zeigten wir hier dem Leiter unseres Zuges, Mohámmad Amín, für den Fall unerwartet eintretender Schwierigkeiten, unsere officiellen Papiere, da er ohnehin schon von der Möglichkeit, russischer Papiere zu bedürfen, gesprochen hatte. Allerdings boten jene, die wir mit uns hatten, keine Wahrscheinlichkeit, hier uns zu nützen. Das eine war ein indischer Părvána, wie wir ihn stets mit Erfolg in Indien und dessen Dependenzen mit uns führten, um in dringenden Fällen officiell auftreten zu können. Auch unsere europäischen Pässe aus Bayern und aus Preussen zeigten wir. Es überraschte uns, dass er doch, ohne natürlich die Lettern zu meinen, den preussischen von einem etwa russischen Passe zu unterscheiden wusste. Denn indem er die Pässe uns wiedergab, nachdem er sie — nach orientalischer Sitte — geküsst hatte, erwähnte er, dass diese nicht die ganz richtigen Papiere seien, „da unser Vogel nur einen Kopf habe“.

Das erste, was wir nun am nächsten Tage, am 5. August, vorzunehmen hatten, war das Ueberschreiten des Shayók-Flusses, um in das seitlich gelegene Kiziláb-Thal zu gelangen und den grössten Theil des Shayók-Thales, von hier bis zum Dápsang-Plateau, auf der linken Uferseite zu umgehen; der Shayók-Fluss selbst ist im Sommer so wassererfüllt, dass ihm eine Karawane zum mindesten von Mitte Juli bis Ende September nicht folgen könnte. Auch hier noch bei einer Gesammtbreite der etwas tiefen Theile von mehr als 800 Fuss, war der Uebergang von eigenthümlicher Schwierigkeit begleitet. Es konnten zwar die Pferde beladen oder geritten schreiten, während in den schlimmsten Fällen die Reiter auf schwimmenden Pferden sich forthelfen müssen und die schweren Gepäcke auf Menschen vertheilt und von diesen hinübergeschleppt werden, wobei die Pferde frei schwimmend folgen; aber diess war hier sehr hemmend, dass an mehreren Stellen lose bewegliche Sandanhäufungen, „Quicksands“, in dem sehr ruhig fliessenden Wasser abgelagert waren, die nicht ganz zur Oberfläche reichten, also auch nicht sogleich erkannt und umgangen werden konnten. Menschenfüsse werden meist, ihrer breiteren Fläche wegen, noch getragen; auch die Kameele arbeiten sich noch besser durch als die Pferde.

In solche Quicksands kamen wir Reiter nicht, wir hatten vor uns die Lastpferde und die neben ihnen watenden Trainleute durchziehen lassen, was uns sehr erleichterte, die unangenehmen Stellen zu bemerken und zu vermeiden. Dagegen fühlten wir, gesteigert vielleicht durch das Ruhen der Füsse in den Bügeln statt des Betretens des Bodens, einen mir unerwarteten, ganz verwirrenden Eindruck, den die Wasserbewegung auf der Fläche des Flusses hervorbrachte. Diese Bewegung ist nämlich, je nach Tiefe und damit verändertem Widerstande eine sehr ungleiche; nun reitet man ohnehin durch einen Fluss von solcher Breite nicht einfach rechtwinkelig auf die Richtung des Strömens hinüber, sondern man muss, um an Widerstandsfähigkeit zu gewinnen, den Kopf des Pferdes etwas stromaufwärts richten, wobei dasselbe seitlich schreitet; an Stellen, wo die Strömung etwas lebhaft ist, macht das Pferd einen ziemlich spitzen Winkel (statt etwa eines 90-gradigen) mit der Flussrichtung, und es ist dabei nicht selten, dass z. B. zur rechten Hand des Reiters eine durch das Auge sehr deutlich erkennbare Differenz der Schnelligkeit, verglichen mit jener zur linken Hand, sich zeigt. Es macht diess bei der stetigen Wiederholung solcher Lagen einen Effect, ähnlich jenem auf einer mit drei oder mehr Geleisen belegten Eisenbahn, wenn zu den Seiten des Beobachters noch andere Züge, theils ruhig, theils in nur mässiger Bewegung sich befinden; der nächste Eindruck ist, dass man selbst nicht weiss, fährt man, oder steht man stille. Im Coupé genügt es, die Augen zu schliessen oder einen sehr fernen Gegenstand zu betrachten, um sich zu sammeln. Aber bei solchem Flussübersetzen, wo der Reiter selbst über die einzuhaltende Richtung gegen das jenseitige Ufer zu urtheilen hat, wo das Pferd gelenkt werden muss und wo sich bei unsicherem Auftreten des Pferdes ungewöhnliche Schwierigkeiten bieten festen und ruhigen Sitz zu behalten, sind die Verhältnisse ganz andere. Selbst die uns zu Pferde begleitenden Yarkándis und noch mehr als diese Máni, waren deutlich in ähnlicher Weise afficirt. Etwas Anhalten des Pferdes, Unterbrechung also der eigenen Bewegung, bietet am leichtesten Gelegenheit, sich klar bewusst zu werden.[81])

81) Der Nothwendigkeit ähnlicher Pausen hatte ich auch bei dem Schwingen hängender Brücken von Bambusgeflechten oder von Seilen zu erwähnen gehabt („Reisen“ Bd. I, S. 541 u. a.).

Déra Sássar, der Lagerplatz, ist noch an 1000 Fuss über dem Niveau des Shayók gelegen; die Höhe des Shayók fanden wir etwas weiter flussabwärts an der Uebergangsstelle bei Déra Sultán Chúskun gleich 14,440 Fuss; es ist letzteres der Ort, wo der Kiziláb in den Shayók eintritt. Kiziláb, ein türkisches Wort, wie deren mehrere in dem tibetischen Núbra vorkommen, heisst der „rothe Fluss“; doch ist die Farbe des Wassers, durch die Art der Suspension hervorgebracht, von verhältnissmässig geringem Eindrucke. Diess dagegen hebt sich vor Allem hervor, dass mächtige Sandwälle, zum Theil auch feste Sandbänke sich gebildet haben. Zwischen den letzteren zieht sich der Fluss bei niederem Wasserstande, ziemlich tief unter ihrer oberen Fläche, erodirend fort; das Einstürzen solcher Bänke mag von Zeit zu Zeit ziemliche Unregelmässigkeiten in Folge von Aufstauung und darauf folgendem Durchbrechen des Wassers hervorbringen. Zur Linken des Flusses sieht man über diesen Bänken Berge, die bis an die Schneegrenze sich erheben, mit etwas über 5000 Fuss relativer Höhe. Aber die rechte Thalseite ist hier durch einen Ausläufer begrenzt, der kaum 2000 Fuss ansteigt; grössere Erhebung beginnt erst weiter gegen Norden. Solche Landschaft ist in Hochregionen selten. Hier ist diese Form auch für den zu wählenden Weg entscheidend.

Unserem Uebergange über den Shayók folgte nämlich nicht sogleich das Eintreten in das Kiziláb-Thal. Der Weg führt über die Vorstufe, die nahe der Uebergangsstelle einen kleinen See und jenseits, bei 16,382 Fuss, eine sehr schöne, starke Qelle bot, deren Umgebung die Grenze der Strauchregion bildet.

Dann kommen Murgái bei 15,448 Fuss und Púllak bei 15,027 Fuss, beides oft benützte Haltestellen.

Nun lenkt der Weg in das Kiziláb-Thal ein; er ist dort ungeachtet einer nicht bedeutenden Länge, wegen der steilen Abhänge zu beiden Seiten des Flusses, wegen der vielen stark erodirten Zuflüsse aus Seitengletschern und wegen der bedeutenden Ansteigung der Thalsohle selbst, sehr beschwerlich. Unter anderem muss der Fluss sehr oft überschritten werden.

In diesem Thale begegneten wir zum ersten Male einer normalen, grossen Túrki-Karawane mit Pferden und Kameelen. Die Leute, theils

reitend, theils zu Fuss, waren eben triefend aus einer ziemlich schweren Uebergangsstelle dem Wasser entstiegen; desto lieber hörten sie an einem kleinen Feuer, das Makshút schnell herstellen musste, und bei dem ihnen gebotenen Thee von den Neuigkeiten des Südens, die Mohámmad Amín von Ladák und seinen Umgebungen, zum Theil noch aus Kashmír zu erzählen wusste. Von uns beiden „Sáhibs" oder Herren, als welche wir diessmal nicht unbemerkt bleiben wollten, sagte Mohámmad Amín (wie wir beim Herannahen der Yarkándis ihn beauftragt hatten), dass wir nur ein paar Märsche noch auf der Verkehrslinie nach Yárkand vorgehen und dann wieder sogleich nach Le zurückkommen würden. Es war diess das Beste, was sie in Le melden konnten, um über etwa auffallende Abwesenheit zu beruhigen; selbst wenn nach uns ausgesendet würde, blieben wir gedeckt; denn es war unser Plan, sobald wir die Karakorúm-Kette überschritten hatten, den Yárkand-Weg zu verlassen und nach Khótan uns zu wenden.

Ehe wir am Abende dieses Tages, 8. August, die nun folgende Terrainstufe erreichten, hatten wir das Kiziláb-Thal zu verlassen. Bei einer Höhe von nahezu 17,000 Fuss begannen wir, gegen Norden 5° Westen, zum Dápsang-Plateau anzusteigen, fast in der gleichen Richtung in der wir das Thal heraufgekommen waren. Die Quelle aber berührten wir nicht. Diese liegt ein wenig seitwärts vom Wege, gegen Osten. Das Gehänge bis hinan zur Kante, welche hier das Kiziláb-Thal vom Dápsang-Plateau trennt, ist etwas steil; auf der höchsten Stelle dieses Ueberganges erhebt sich, ein tibetischer Lápcha „zum Schutze der Reisenden und ihrer Wege.[82])

---

82) Die Lápchas sind kegelförmig aufgeschichtete Steinhaufen, in welche eine Stange mit einer gedruckten Gebetflagge oder, häufiger noch in Tíbet, einfach mit einem Streifen Leinwand versehen, eingesteckt ist. Der Lápcha vertritt die Stelle des Chórtens oder „Opferbehälters". Vor den Lápchas werden in den bewohnten Theilen Tibets kleine Opferkegel oder Figürchen aus Thon niedergelegt; hier mussten unterwegs aufgelesene Steinchen etwas ungewöhnlicher, gerundeter Form sie ersetzen, und stets wurde dabei das mystische Gebet: Om máni pádme hum gesprochen, so oft ein Buddhist hier vorbeizog. Selbst die Turkistáni-Mussälmáns der Karawanen fanden dies „auf keinen Fall schädlich", und man sieht solche an den Verkehrswegen gelegene Opferstätten sorgfältig geschont. Allgemeine Erläuterungen über die monumentalen Constructionen und über die im Cultus gebrauchten Geräthe habe ich in „Reisen" Bd. II, S. 89 gegeben.

Gegen Norden aber folgte nun eine gut ausgesprochene Plateauformation, wie sie den Südrand der Karakorúmkette an diesen Stellen umgiebt; ungleich mächtiger allerdings, wie wir sehen werden, sind die entsprechenden Terrainformen auf der Nordseite der wasserscheidenden Linie.

Das Dápsang-Plateau bildet die letzte Vorstufe des Karakorúm-Passes. Wir fanden die mittlere Höhe 17,500 Fuss; die wichtigste Haltstelle, Dáulat Beg Últe, liegt am rechten Ufer des obern Shayók-Flusses, Höhe 16,597 Fuss. An seinem Nordrande, auf der Seite des Karakorúm-Passes, erhielten wir als die Höhe des Plateaus 17,706 Fuss; zwischen dem nördlichen und südlichen Rande treten nur Erhebungen in Form von Felsengruppen oder von Seitenkämmen hervor, die etwas über 500 Fuss ansteigen; die Karakorúm-Kette hat an der Stelle des Ueberganges 845 Fuss relative Höhe über der Mitte. In der Senkung gegen den obern Shayókfluss ist das seitliche Gefälle meist ein sehr geringes.

Das Dápsang-Plateau liegt noch ganz unter der Schneegrenze; selbst die Erhebungen auf demselben fanden wir im August und September ganz schneefrei. Die geringe Menge des Winterschnees in dieser Lage soll gewöhnlich Mitte des Frühjahres verschwunden sein. Wird doch der Pass von den Karawanen den ganzen Winter hindurch benützt. Vegetation giebt es, aber nur spurenweise.

Ein kleiner Halteplatz, den wir schon etwas südlich von Dáulat Beg Últe passirten, wurde uns Jachósh-Jílga genannt, weil dort ein Bach (Jílga) durch seine röthliche, von Suspensionen getrübte Farbe an Thee-Aufguss, „Jachósh"[83]) erinnert. Uebrigens scheint dieser Name für ähnliche Localitäten nicht selten angewandt zu werden; Johnson erwähnt eines solchen Namens jenseits der Karakorúm-Kette; auf der Walker'schen Karte ist der gleiche Name diesseits noch, aber sehr nahe dem Passübergange selbst, angegeben.

---

83) Diese Art der Theebereitung ist die gleiche wie in Europa; aber bei dem eigentlichen Ja oder „Thee" der Tíbeter werden die Blätter mit Sodazusatz gekocht; dann wird gequirlt und es kömmt noch Schmelzbutter und Kochsalz dazu. „Reisen" Bd. III S. 291.

Der bedeutenden Höhe wegen ist die Wassermenge des Shayók im Dápsang-Plateau noch nicht sehr gross; hier giebt es keine andere Belästigung des Durchschreitens, als die niedere Temperatur des Wassers. Vom Karakorúm-Passe selbst führt eine meist trockene Rinne herab.

Die Lage der Quelle des Shayók lässt sich jetzt nach den neuern Daten der „Great Trigonometrical Survey" auch durch die Nähe einer als K_{23} bezeichneten Doppelspitze definiren, die bei der Quelle sich erhebt; die Entfernung von Dáulat Beg Úlde beträgt noch über 30 engl. Meilen gegen Osten.

Nahe jenem Peak kömmt der Fall vor, dass die Bodengestaltung der nördlichen Seite über die wasserscheidende Linie übergreift und auch südlich davon sich zeigt. Shaw hat auf seiner zweiten Reise, 1870, bei seinem Rückwege in das Shayók-Thal zwei solcher Stellen gefunden. An der ersten folgte auf der Núbra-Seite dem obern flach abfallenden Boden sehr bald eine Strecke mit so steiler Neigung und so scharf eingeschnittenem Flussbette, dass ein weiteres Vordringen nicht möglich war. An einer andern, etwas südlich und östlich gelegenen ähnlichen Stelle, die nicht von einer so steilen Senkung in Núbra gefolgt war, gelang es Shaw, eine gangbare Verbindung aus dem Gebiete des Karakásh-Flusses in jenes des Shayók aufzufinden.

Solche Bodengestaltung ist ganz entsprechend den tibetischen nach Süden offenen Formen, die an an vielen Stellen längs des Himálaya vorkommen. In einem Falle, am Kiúngar-Passe in Kămáon, hatte selbst der Uebergang über einen allerdings sehr hoch gelegenen Seitenkamm eine solche tibetische Gestalt.

Die Aenderung des Gefälles bleibt dabei, wenn richtig beachtet, im Karakorúm sowie im Himálaya, stets erkennbar. Diess allerdings kann vorkommen, dass man ihrer Form wegen Scheidelinie im Momente des Ueberschreitens als eine secundäre Bodengestalt betrachtet, diese unberücksichtigt lässt, und, vergebens dann, das Nachfolgen einer noch deutlicheren Grenze erwartet. Jedenfalls genügt es an solchen Stellen zur richtigen Beurtheilung, dass man sich eine Strecke lang wieder nach rückwärts wende.

Das Bedeutendste, was in den Umgebungen des Dápsang-Plateau gegen WNW. sich bot, war die Aussicht gegen den Gipfel K_2 der Landes-

vermessung, welcher, wie später bestimmt, bis zu 28,728 Fuss Meereshöhe, an der Südseite der wasserscheidenden Kette sich emporhebt („Results", Vol. II p. 427). Es ist dies bis jetzt der zweithöchste Berg, nicht nur Hochasiens, sondern der ganzen Erde. Vom Gaurisánkar in Nepál wird er um 274 Fuss überragt.

Obwohl seine Höhe auch durch seine relative Stellung sehr bemerkbar hervortritt, konnten wir weder in Tíbet noch in Turkistán einen Namen für denselben erfahren. Da er vom Dápsang-Plateau so gut sich zeigte, habe ich denselben den Dápsang-Gipfel genannt, ein Name, der jetzt auch nach Petermann's freundlichem Vorgange meist Aufnahme gefunden hat. Es bestärkte die Wahl dieses Namens, dass als Deutung angenommen werden kann „das gereinigte Zeichen," in dem Sinne der „glänzenden erhabenen Erscheinung", und dass sich der Name auch sehr gut auf das „Dápsang"-Plateau als Standpunkt beziehen lässt.

Ich hatte nicht versäumt, ungeachtet der Eile, die uns nach Norden drängte, eine Zeichnung davon zu machen; in Contour-Linien ist sie im Panorama No. 15 auf Tafel VII der „Gebirgsprofile" gegeben.[84])

Auf den gleichzeitigen Routen unseres Bruders Adolph in Bálti und im westlichen Ladák hatte sich der Dápsang-Gipfel nirgend durch grosses isolirtes Auftreten bemerkbar gemacht. —

In Dáulat Beg Últe nahm ich früh im ersten Morgenlichte eine Ansicht des Karakorúm-Passes auf und zwar als eines der grösseren Aquarelle im Massstabe von 1 Centimeter = 1 Winkelgrad, vertical sowie horizontal (Gen. No. 562). In der Mitte zieht sich dort gegen den Beschauer ein kleiner Bach herab und ober diesem tritt eine Senkung

---

84) Im Atlas zu Band II der „Results" habe ich im Anschlusse an die Hypsometrie, welche den Gegenstand jenes Bandes bildet, 18 solcher „Panoramic-Profiles" znsammengestellt, die von Südosten gegen Nordwesten längs der Südseite des Himálaya und dann in nördlicher Richtung quer durch Tíbet und Turkistán sich folgen. Auf kleineren Masstab reducirt erscheinen sie auch als Beilage der „Reisen", wo ich im 4. Bande denselben noch eine 8. Tafel, nach 2 Aquarellen aus Adolph's Nachlass, beifügen werde, welche die von ihm gewählten Uebergangsstellen des Karakorúm und des Künlún zum Gegenstande haben.

Verschieden von unseren landschaftlichen Bildern in der gewöhnlichen Form sind bei diesen Gebirgsprofilen durch ungleiche Stärke der Contourlinien sowie durch Anwendung von Schraffirung 3 Grade der Entfernung ausgedrückt; in den zu den Firnregionen gehörenden Erhebungen ist auch Licht- nnd Schattenseite unterschieden.

des zunächst liegenden Kammes ein, einer Uebergangsstelle nicht unähnlich. Doch es hebt sich im Hintergrunde eine hohe mit Firnen und Gletschern bedeckte Gruppe empor, die deutlich eine Fortsetzung des Hauptkammes ist, während der kleine Kamm nur ein secundäres, noch auf der tibetischen Seite liegendes Seitenthal trennt.

Der Weg zum Karakorúm-Passe zweigt sich gegen Norden ab, rechts von der Mitte. Schon in ihrer Form lässt sich diese Stelle als der wahrscheinliche Uebergangspunkt erkennen, da man der Breite und Tiefe des Einschnittes wegen auch einen Theil der jenseits liegenden Felsenparthien sieht.

Diesseits noch fand sich, auf dem Wege zum Passe, eines der Steinschutt-Gebäude (skizzirt Gen. No. 352), wie man sie in diesen Gebieten bisweilen als Lagerungsplätze errichtet, die im schlimmsten Falle als Schutz gegen Sturm und Schneewirbel dienen können. Das hier stehende „Passhaus", auf dem S. 87 erwähnten zweiten Jachósh-Platze, war verhältnissmässig gross, denn es bestand aus drei unter sich getrennten, mit je einem eigenem Eingange versehenen Räumen. Aber die Construction war sehr mangelhaft und im Innern zeigte sich, wie stets, nichts als öder, schmutziger Raum.

Unsere Leute mit den Lastthieren und dem Gepäcke waren schon einige Stunden vor uns von Dáulat Beg Úlde aufgebrochen und hatten sich am Passe nicht aufgehalten, weil bei dem niederen Luftdrucke Eintreten von Wind sehr gefahrvoll werden kann und weil dort selbst an günstigen Tagen die Wahrscheinlichkeit lebhaften Windes für den Nachmittag grösser ist als für die Morgenstunden. Sie erreichten den Halteplatz jenseits des Karakorúm, Dḗra Búllu oder (Turkistáni) Brángsa Búllu, um 8¾ Uhr des Abends.

Wir selbst hatten uns wegen meines Zeichnens und einiger localer Beobachtungen fast etwas zu lange aufgehalten.

Beim ersten Ansteigen auf der Südseite des obersten Kammes gab es kleine kurze Wasserrinnen, hier meist wassergefüllt; diesen entlang hatte bald auf dem rechten, bald auf dem linken Ufer der Weg emporgeführt. Nahe dem Uebergange noch fanden sich drei hübsche Bächlein, aus seitlichen Firnlagern in geringer Entfernung kommend, die sich vereinten; die letzte Streke des Weges aber war ganz trocken.

Firn hält sich sehr lange hier oben, wenn er durch enges Lager gegen directe Besonnung geschützt ist. Dessenungeachtet ist er als Tieffirn zu betrachten, denn die Schneegrenze, die wir erst an Stellen von grösserer Erhebung als der Karakorúm-Pass in diesen Gebieten zu messen bekamen, ergab sich zu 19,400 Fuss für die Südseite, zu 18,600 Fuss für die Nordseite des Karakorúm-Gebirges.

Die Passhöhe hatten wir um $1^1/_4$ Uhr Nachmittags erreicht; wir konnten bis zur höchsten Stelle hinan auf unseren trefflichen Turkistáni-Ponies reiten. Wir blieben am Passe bis gegen 6 Uhr Abends beschäftigt, unter Anderem mit magnetischen Beobachtungen. Mohámmad Amín und ein Yarkándi-Diener, jener, dessen Lastpferd gewöhnlich die physikalischen Instrumente und die Zeichnungsrolle trug, hatten mit uns zu verweilen.

Der Luftdruck am 9. August um 5 Uhr Abends, mit unserem Thermobarometer bestimmt, zeigte sich, berechnet aus $82{\cdot}22^0$ C. = 15·38 engl. Zoll; die Temperatur war sehr milde, um 5 Uhr Abends noch $14{\cdot}0^0$ C. im Schatten; die relative Feuchtigkeit war 0 Procent. (Später, am 4. September, erhielten wir, um 10^h a. m.: Luftdruck 15·41 Zoll, Lufttemperatur $9{\cdot}6^0$ C., relative Feuchtigkeit 7 Procent).

Als Mittel der Höhe ergab sich 18,345 Fuss (s. o. S. 36.)

Das Gestein am Kamme und in seinen nächsten Umgebungen ist sedimentär geschichteter grauer Schiefer. Den kahlen Boden bedeckten auf weite Strecken durch Verwittterung zerkleinerte Schieferstücke; zwischen diesen lag angewehter Sand.

Die Aussicht vom Passe aus ist sehr beschränkt, ganz verschieden von dem, was man etwa in solcher Höhe erwarten möchte.

Gegen Süden reicht sie nicht weit über Bergzüge am Dápsang-Plateau, gegen Norden ist sie durch die ganz nahen Felsenrücken begrenzt, die sich, unregelmässig gekrümmt, vom Kamme abzweigen.

Die Berge unmittelbar am Passe sind Gipfel von etwa 800 Fuss relativer Höhe, durch Verwitterung gerundet. Diese sowie der Kamm selbst fallen gegen Turkistán in ähnlicher Weise ab, wie gegen Núbra. Verschieden von der Bodengestaltung, die ich bei der Shayók-Quelle zu erwähnen hatte, sind es die steileren, felsigen Formen, welche hier am Kamme oben hervortreten und zwar hier zu beiden Seiten der

Wasserscheide. Ist man aus diesen Felsenrücken am Passe und dann aus den auch nördlich vorkommenden, im Gestein etwas tiefliegenden Bachrinnen herausgetreten, so ändert sich der ganze Charakter der Landschaft.

Der deutlichste Typus einer ausgedehnten, „subtropischen Höhenwüste", dies ist das neue Bild, welches der erste Einblick in Turkistán bietet. Schneebedeckte Höhen erhoben sich in einiger Ferne, doch waren diese Kämme, wie auch die Form und die nördliche Richtung derselben es zeigte, noch lange nicht die Begrenzung des „Plateau von Turkistán."

Die Grenze des Plateau gegen Norden ist der Entfernung wegen dem Auge nicht erreichbar; sie liegt am Fusse des Künlün - Gebirges. Gegen Nordosten sind die betreffenden Theile des Plateau durch Ausläufer der secundären, nahe dem Standpunkte beginnenden Kizilkorúm-Kette verdeckt.

Der Verschiedenheiten zwischen einer Höhenwüste, wie hier, und einer tropischen und zugleich Tieflandwüste giebt es noch sehr viele.

Einzelne Berge, auch Bergzüge können in den Höhenwüsten sowie in Wüsten im Tieflande vorkommen, auch das Vorherrschen von Steinen, statt des Sandes, an der Oberfläche ist in Tiefwüsten nicht selten; aber die tropischen Tieflandwüsten haben die Lufttemperatur den grössten Theil des Jahres hindurch sehr hoch, höher dann als dem Mittelwerthe der Isothermen für solche Breite entspricht, und sind mit Ausnahme vereinzelter Oasen wasserleer. Die Höhenwüste dagegen, wie sie hier sich bietet, hat bei einer nördlichen Breite, die $1^1/_4$ Grad südlicher ist als jene von Algier, ihrer Höhe wegen niedere Lufttemperatur, auch im Sommer; sie hat zwar vorherrschend sehr lebhafte Besonnung, aber auch grossen Wärmeverlust durch Strahlung. Eine andere wichtige Unterscheidung dieser Höhenwüste liegt darin, dass sich ungeachtet einer geringen Regenmenge, so lange nicht zu niedere Temperatur hemmend einwirkt, Wasser sich finden lässt; an einigen Stellen als Sickerwasser nicht ohne Schwierigkeit, an anderen Stellen selbst in der Form von laufenden Flüssen. Bedingt ist dies durch die vielen Firn- und Eis-Lager auf den Bergen und in den Felsengruppen. Die Wasserverbreitung und die Besonnung sind es, die, ungeachtet der sonst so ungünstigen Verhältnisse, auf die Vegetation bemerkbaren Einfluss

üben; grüne Flächen allerdings gab es nirgend, aber wenigstens liess Manches vereinzelt sich finden. —

Bei einer Entfernung unseres Lagerplatzes von nahezu acht engl. Meilen hatten wir nun rasch anzureiten, was ziemlich bald begonnen werden konnte.

Die Neigung des Bodens bot nach kurzer Strecke keine Schwierigkeit mehr und der Weg, über den verwitterten Schiefer, war weder zu felsig noch zu sandig; nur kurz vor dem Lager noch hatten wir, an der Vereinigungsstelle zweier Bäche, eine ziemlich steile Erosionsschlucht zu passiren. Der Höhenunterschied, den wir vom Passe zum Lager herabzukommen hatten, war allerdings über 1400 Fuss, aber in Verbindung mit der Entfernung und den Krümmungen des Weges berechnet sich für diesen Theil in der Hochwüste, vom Fusse des Kammes an, eine Neigung von wenig über 2 Grade der ganzen Strecke entlang.

Wir erreichten unsere Zelte um 9^h 30^m Abends; der Yarkándi, welcher das mit den Instrumenten beladene Pferd zu führen hatte, traf erst nach 11 Uhr ein, obwohl er sich selbst und das Pferd möglichst angestrengt hatte. Letzteres war einmal gefallen, wobei ein Instrument etwas beschädigt wurde. An dem auf dem Passe benützten Theodoliten „2, Jones" war die Libelle am Verticalkreise lose geworden und zerbrochen, doch gelang es mir, eine Reserve-Libelle später genau einzusetzen.

Jenen Abend hatte sich diese Landschaft, bald nachdem wir die Passhöhe verlassen hatten, in einer auffallend veränderten Stimmung gezeigt; nämlich als zart mondbeleuchtet, bei erstem Mondsviertel. Dass die Dämmerung, beeinflusst durch die Höhe und die Lage gegen den Aequator, eine schwache gewesen, war dem Effecte des Mondes als solchem nur günstig, wenn auch die allgemeine Helligkeit dabei verlor; die grossen Formen wurden um so stärker und um so rascher markirt.

III.

Ueberschreiten des Élchi-Passes der Künlün-Kette, vom Yarkándi-Districte Sarikía nach Búshia in Khótan.

Wahl der Route und der Begleiter. Passübergang in Schneesturm. — Ungewöhnliche Geröll- und Geschiebe-Massen. Erosion, Wasserfälle. Déra Oitásh. — Búshia und die Khotánis. Raçe arisch; Wohnart nomadisch. — Locale Terrainverhältnisse. Baumgrenze. Hydographisches. — Verbindung mit Élchi. Allgemeine Gestaltung des Thales. — Rückkehr nach dem Karakásh-Thale.

Auf dem Marsche von Déra Búllu über den secundären Kizilkorúm-Pass der Hochwüste, 17,762 F., und vorüber dann am See Kiúk Kiöl an den Südfuss der Künlün-Kette, wo wir zu Déra Súmgal grösseres Lager aufschlagen mussten, hatten wir vom 10 bis 19. Aug. zugebracht. Die Angaben über jene Strecke werde ich im 4. Band der „Reisen" bringen.

Was hier folgt ist ein Bericht über die Künlün-Kette selbst, zum Vergleiche mit den Verhältnissen der Karakorúm-Kette.

Schon in Núbra hatte uns Mohámmad Amín davon gesprochen, dass er von Súmgal aus ausser den Wegen nach Yárkand, in nordwestlicher Richtung, auch einen kürzeren Weg über den Künlün nach Norden, nach Khótan, wisse. Seine Yárkandwege hätten zwar gleichgleichfalls geboten, die damals Europäern ganz neue Künlün-Kette zu überschreiten, aber sie hätten alle erst in ziemlicher Entfernung bewohnte Orte erreicht. In unserer gegenwärtig so bedrängten Lage blieb nur der Uebergang nach Khótan zu wählen, obwohl der Terrainschwierigkeiten auf diesem ungleich grössere zu erwarten waren.

Eigentlichen Weg gab es hier gegen Norden nirgend; man musste zufrieden sein, die eine oder andere Stelle zu finden, wo die Schwierigkeiten nicht gar zu sehr sich häuften und wo zugleich ein gewisser Grad

absoluter Leistungsfähigkeit im Vorwärtskommen für Menschen und womöglich auch für Thiere zu erwarten war. Und doch hing jetzt so viel von dem Erfolge ab, sehr verschieden darin von einer Bergersteigung, die man, wenn zu schwierig, ohne Nachtheil abbrechen kann.

Die Route, die Mohámmad Amín vorschlug, war jene über den Élchi Davân-Pass. Er war früher einmal über diesen Pass gegangen, „aber seit 20 Jahren nicht mehr", wie er sogleich beifügte.

Neben diesem, etwas östlich davon, wäre noch ein anderer Pass möglich gewesen, den uns Mohámmad Amín als Yurungkásh Davân bezeichnete. „Sehr hoch", meinte er, „wäre jener nicht, doch da er die Gegend dort gar nicht kenne, so rathe er davon ab." Mit Recht. Als mehrere Jahre später, 1865, wie oben erwähnt, von Johnson der Versuch des Ueberchreitens jenes Passes, richtiger Yángi Davân benannt, gemacht wurde, ergab sich bei grösserer Länge des Weges selbst die Höhe als eine um fast 2000 Fuss grössere. Der Punkt, den Mohámmad Amín als „ungefähr so wie der Pass gelegen" zeigte, war zu nahe und zu niedrig.

An ein Aufbrechen mit unserer ganzen Karawane war nicht zu denken. Doch, da einige Hoffnung vorhanden war, schon in Búshia neue Pferde, Yaks, sowie Lebensmittel für uns und Futter für die Thiere zu erhalten, so liess sich erwarten, auch einige der Leute zu bewegen, das ständig bewohnte und nicht sehr ferne Búshia-Thal zu besuchen, obwohl Gletscher und Firne überstiegen werden mussten und die Witterung sehr ungünstig war.

Von unseren Begleitern (s. S. 71) nahmen wir nur 3 nach Khótan mit. Nebst Mohámmad Amín wählten wir Makshút, den früheren Gefährten Moorcrofts. Obwohl er bejahrt und körperlich nicht sehr rüstig war, und schon auf dem Marsche von Núbra bis Súmgal bei jeder irgend ungewöhnlichen Schwierigkeit uns zum Aufgeben unseres Unternehmens veranlassen wollte, war er uns als Dolmetscher für hindostáni und türkisch sehr nothwendig, um uns gut zu verständigen, da Mohámmad-Amín gar nicht hindostáni konnte und selbst tibetisch nur sehr wenig. Es hätte also, wenn Máni aus Mílum (siehe Anmerk. 76 S. 71) als Dolmetscher für tibetisch und hindostáni mitgegangen wäre, nur wenig geholfen. Máni wäre allerdings rüstiger gewesen. Da er aber

nicht türkisch sprechen konnte, hätte die Besprechung doch nur sehr unsicher und, der doppelten Uebertragung wegen, mit sehr viel Zeitverlust durchgeführt werden können. In Turkistán war Makshút noch nicht gewesen; sein Türkisch hatte zu Le, wo er sich seit Jahren als Handelsmann niedergelassen hatte, im Verkehr mit den Túrkis der Karawanen gelernt.

Als dritter ging mit uns einer der kräftigsten unter den Yarkándi-Dienern Namens Adíl. Bei den fünf andern blieb Máni als Obmann und Aufseher für Gepäck und Pferde zurück. Sumgál, wo das Lager war, ist eine als Haltestelle wohl kenntliche Felsenstufe, auf der rechten Seite des Karakásh-Flusses gelegen; Flusshöhe daselbst 13,215 Fuss. Das Thal ist hier sehr breit, und der grosse Gau, der sich von hier an bis zur Wendung des Karakásh-Flusses gegen Norden hinzieht, ist als District für sich unterschieden und heisst Sarikía.

Von Pferden wurden 4 mitgenommen; zwei, die bepackt wurden, aber sehr sorgfältig beladen und nicht zu schwer, und zwei andere, die für Robert und mich oder wenn für jene nöthig, wie es sehr bald sich zeigte, abwechselnd auch für Mohámmad Amín und Makshút als Reitpferde dienen sollten. Instrumente zu Höhen- und Winkelmessungen, nämlich Hypsometer, prismatischer Compass und Verticalkreis, auch Fernrohr, wurden ebensowohl als Waffen unter uns und die Begleiter vertheilt; auch mit festem Stocke und mit Stricken, zum Schutze auf den uns drohenden frischangewehten Schneedecken, liess ich Alle sich wohl versehen. War schon aus den Alpen unter Leitung guter Führer die Nothwendigkeit solcher Vorsicht mir bekannt, so verdiente dieselbe hier um so mehr Berücksichtigung, da den Yarkándis ohnehin nicht nur genaue Kenntniss der zu wählenden Pfade, sondern auch die Gewandtheit der Bewegüng in den nur selten von ihnen betretenen Firngebieten fehlte.

Von Súmgal liess ich am 23. August um 8 Uhr Morgens aufbrechen; um 10 Uhr wurden wir von einem starken Schneegestöber mit heftigem Winde überfallen, das bis 6 Uhr Abends ohne Aufhören fortwährte. Der selbst beim schönsten Wetter sehr schlechte Weg war unter so schlimmen Verhältnissen sehr erschwert. Auch der Einfluss des verminderten Luftdruckes machte sich bei solchem Winde sehr bald

fühlbar für Menschen und Thiere. Eine gute Strecke noch unter der Passhöhe geschah es, dass eines der Pferde, eine schöne Turkistáni-Stute, offenbar taumelnd, sich legte. Aber nachdem sie mit einiger Nachhilfe zum Aufstehen gebracht war, schloss sie sich sofort der Gruppe der Pferde wieder an und stieg, in gleichem Schritte, mit den andern zum Passe empor.

Die Uebergangsstelle, hier die Berührung der Firnmeere des südlichen oder Súmgal-Gletschers und des nördlichen oder Búshia-Gletschers, erreichten wir um 1 Uhr Nachmittags. Die Höhenmessung (mit Hypsometer) hatte 17,379 Fuss ergeben. Für den Pass erhielt ich nur einen Namen und zwar Élchi-Daván, darauf sich beziehend, dass er von Süden her den nächsten Weg nach Élchi, der Hauptstadt von Khótan, bietet. Auf Johnsons Karte zu seiner Reise von Le nach Khótan im Jahre 1865 finde ich unseren Élchi-Pass gleichfalls angegeben, benannt Hindo-tak-Divan, wohl als Hindú-tagh-Daván oder „Pass über den Hindú-Berg" zu verstehen; eine Bezeichnung desselben, welche in den spätern Jahren sehr wohl dadurch veranlasst werden konnte, dass nun auch der Weg nach Indien an sich mehr Bedeutung erhielt.

Die Lufttemperatur am Passe war um 1 Uhr, als wir ankamen — 1·^{0}1 C., sie sank aber während eines Aufenthaltes von $^3/_4$ Stunden, welcher der Erschöpfung der Pferde wegen nicht zu vermeiden war, auf — 3 6^0 C. Für die relative Feuchtigkeit, mit dem Psychometer bestimmt, ergab sich keine Aenderung. Sie war ungeachtet des Schneefalls mit Nebel nicht volle Sättigung sondern 90 Proc., nichts Ungewöhnliches, auch in den Firnregionen der Alpen.

Hier erschwerte zugleich der nur 15·817 Zoll hohe Luftdruck und der heftige Wind das Vorrücken gegen Norden. Doch es war Gefahr im Verzuge.

Auf der gegen Norden abfallenden Seite des Passes gingen nun wir selbst und Mohámmad Amín, mit Seilen verbunden, voran, um Weg zu machen, da hier der Firn und mehr noch der weiter abwärts zu Tage tretende Gletscher sehr viele Spalten zeigte. Wir fanden uns hindurch, und waren auch glücklich im Weiterbringen der beiden an langem Zügel leer geführten Pferde, obwohl sie einigemale über nicht

zu breite Spalten, wenn sie ihrer Länge wegen nicht wohl umgangen werden konnten, springen mussten. Aber Makshút und dem Yarkándi Adîl war es nicht möglich, die beiden andern Pferde beladen gleichfalls über die Gletscherspalten hinüber zu bringen. Sie liessen das Zelt, die Bettdecken und den Koffer mit Geld und einigen Instrumenten (die nöthigsten trugen glücklicherweise Mohámmad Amín und wir selbst) auf dem Gletscher zurück und nahmen nur einige Lebensmittel und ein wenig Holz mit. Dennoch folgten sie erschöpft durch das steile Gefälle und den rauhen Schneesturm, der bis gegen 6 Uhr währte, so langsam mit den beinahe ganz leeren Pferden, dass sie bei der rasch eintretenden Dunkelheit nicht mehr über die steile Endmoräne herabkommen und uns jenen Abend nicht das Geringste liefern konnten. Wir hatten sie nicht einmal mehr dort ankommen sehen, nur das Geräusch bei ihren letzen Versuchen sich noch fortzuhelfen machte uns auf ihre Nähe aufmerksam und jetzt konnten wir uns wenigstens gegenseitig durch Zurufen verständigen.

Ohne Nahrung, ohne Feuer, selbst ohne eine Decke zum Schutze legten wir uns für jene Nacht in unsern nassen Kleidern in den Schnee. Das Holz half auch den Zurückgebliebenen nichts, oben auf dem Eise; aber wenigstens fanden sie etwas gebratenes Fleisch noch vor und diessmal auch einen Rest Chapáti (ungesäuertes indisches Brod, das eigentlich zu jeder Mahlzeit frisch bereitet und warm gegessen wird, von dem wir aber für ungewöhnliche Märsche ebenso wie von gekochtem Fleische stets etwas Vorrath mitnehmen liessen).

Schon des Abends kurz vor 6 Uhr, als es eben noch hell genug war, ein Minimum-Thermometer, das wir bei uns hier unten hatten, aufzustellen, war die Temperatur der Luft — 0·5° C. Obwohl wir Nachts bedeckten Himmel behielten, der in solchen Höhen durch Verminderung des Wärmeverlustes durch Strahlung bisweilen merklich schützen kann, war doch die Kälte sehr bedeutend geworden. Die Marke des Thermometrographen stand auf — 11·4° C. und um 7 Uhr Morgens noch war die Temperatur — 10·1° C. Und dabei waren zwei unserer ungewöhnlich geschwächten Pferde erfroren, das eine oben bei unseren Leuten am Gletscher, das andere, eines unserer besten Pferde, das wir schon im vergangenen Jahre im Himálaya hatten, zu unseren Füssen.

Als Höhe des unteren Endes des Élchi-Gletschers, wo wir mit Mohámmad Amín gelagert hatten, ergab sich 14,810 Fuss.

Der Morgen des 22. August gehörte wohl zu den peinlichsten der Reisen. Nicht nur war den Anstrengungen Súmgal zu erreichen, so rasch die so sehr erschwerte Ueberschreitung des Élchi-Passes gefolgt, auch was wir jetzt ohne Habe in Geld oder in Waare in Khótan für unsere so dringenden Bedürfnisse uns verschaffen konnten, war unbestimmt genug. Ein Herabholen und Weiterschaffen selbst eines Theiles nur der ziemlich weit oben noch zurückgelassenen Gegenstände wäre bei dem Verluste von zwei Pferden um so weniger zu versuchen gewesen. Die Sättel nahmen wir mit; sie waren nicht schwer und hatten im Nothfalle selbst als Waare guten Werth. Auch der kleine Rest des Holzes der nach dem Thee und Imbiss des Morgens uns blieb, wurde nicht vergessen, und wir hatten diess für den Abend jenes Marsches nicht zu bereuen.

Bei unserem Aufbruche war der Himmel noch grau bedeckt, doch die Bewölkung, wie an den Umgebungen unseres Lagers sich erkennen liess, war hoch, und in Folge der Decke frischen Schnees, die in den Morgenstunden mehrere tausend Fuss noch tiefer als unser Lager herabreichte, verbreitete sich über die ganze Landschaft ein ungewohntes grelles und doch gleichartiges Licht.

Nach Búshia, dem ersten Orte, wo wir Begegnung mit Menschen erwarten konnten, hatten wir, wie Mohámmad Amín annahm, noch eine gute Tagereise. Zugleich schlug er aber vor, diese nicht ganz auszuführen, „denn“, meinte er, „es müsste jedenfalls ungünstig, selbst Verdacht erregend erscheinen, wenn wir etwa spät des Abends in Búshia noch heute ankommen sollten“.

Solches war ohnehin nicht zu befürchten. Obwohl die directe Entfernung noch kleiner war als sie von ihm geschätzt wurde, so wurde doch längs dieses Weges, anfangs durch starke Neigung, dann auch durch viel Gerölle und tiefe Erosion in demselben, grosse Schwierigkeit und mannigfache Verzögerung verursacht.

Am Nordabhange der Künlún-Kette zeigte sich nämlich wegen der steilen Gefälle des Kammes und seiner obersten Gehänge in den ersten Erweiterungen und Thalstufen, die nun folgten, wo sonst ein Gebirgs-

bach zwischen festem Gesteine zu erwarten gewesen wäre, eine theilweise Anfüllung derselben durch Geröll und Geschiebe, darunter Stücke von bedeutender Grösse, vorherrschend aber gewöhnliches Flussgeröll, das durch Druck und thonige Einlagerung etwas fest geworden war. Wird ein Thal dieser Form bis etwa zu einem Zehntel der Höhendifferenz zwischen seiner frühern Basis und den seitlichen Kammlinien ausgefüllt, wie hier sehr wohl nach dem, was die Querprofile zeigen, sich annehmen lässt, so beträgt die Erhöhung der Thalsohle häufig an 1000 Fuss und es wird dann die Sohle des Thales eine viel breitere, wenn auch eine ähnlich wie früher geneigt bleibende Fläche. Diese Ablagerungen sind mit jenen auf den Hochebenen am nördlichen Rande der Alpen zu vergleichen, obwohl hier in den Thälern die Quantität der abgelagerten Masse gegen jene auf den Ebenen nur eine geringe ist.

Bei solcher Bodenbeschaffenheit ist nun Erosion wegen des geringen Widerstandes sehr bedeutend. In den Alpen-Hochebenen zeigt sich diess vorherrschend in der Breite des erodirten Raumes, hier in der verticalen Dimension desselben.

Da in Hochasien zum grössten Theile, auch im Künlün auf der Nordseite wenigstens, die Bodengestaltung eine „Vergrösserung der Alpenverhältnisse bei Aehnlichkeit der Form" zeigt — nemlich grössere Höhendifferenzen zwischen Thalboden und Kamm- und Gipfelerhebung bei gleicher Neigung der Gehänge — so ergiebt sich grössere Fläche auch für das Flussgebiet eines jeden Thales. Und da nun die Erosion bei jedem Thale nur auf die eine, tiefste Hauptlinie, wie der Abfluss es bedingt, sich concentrirt, so folgt daraus, dass grössere Flächenausdehnung sehr bald hinreicht, in der Erosion von Detritusmasse wenigstens, den Einfluss verhältnissmässig geringer Regenmenge verschwinden zu machen. Ich musste auf diese Wirkung der allgemeinen Gestaltung hier nochmals zurückkommen, da er sich in diesem Gebiete besonders deutlich erkennen lässt[85]).

---

85) Beispiel der Erosion auf der regenreichen Südseite des Himálaya habe ich gegeben in „Reisen", Band II S. 376 nebst Tafel XIII. Die Erosionstiefe beträgt dort in festen Felsen über 1200 Fuss.

Auf der längs des Weges in das Khótan-Thal viel steileren Südseite des Künlün, wo die Flächen der Firne und Hochthäler weit kleiner sind, fehlen auch die Erscheinungen grosser Wasserkraft, während sie sich weiter westlich, z. B. da, wo in der Nähe des Kilián-Passes durch die Ausbeugung des Künlün-Kammes eine Beckenform auch in den Hochregionen südlich vom Kamme sich bildet, in gleicher Weise zeigen. Es liegen mir dafür die Beobachtungen Adolph's längs seiner Route von 1857 vor.

Die Erosionstiefe unterhalb des Búshia-Gletschers erreicht schon sehr bald 700 bis 800 Fuss.

Störend für den Marsch wird die Erosion, wenn sie auf der Seite der Route des Reisenden kahle Felsengehänge blosgelegt hat und wenn man nun eine Strecke weit über solche sich fortarbeiten muss; ungleich grössere Schwierigkeiten aber bieten sich, wo das Flussthal selbst oder auch nur das Eintreten eines Seitenbaches überschritten werden muss. Da die Seitenbäche dort, wo sie einmünden, an ihrem Rande stärkeres Gefäll bekommen, was auch nach aufwärts etwas rückwirkenden, Stromschnellen bildenden Einfluss hat, ist in ihrem untersten Theile die Tiefe der Erosion meist jener des grössern Flusses, dem sie zufliessen, ziemlich gleich. Das Durchziehen einer Erosionsschlucht in Geröll ist sehr oft ermüdender, selbst gefährlicher, als einer solchen, bei ganz gleicher Gestalt, in festem Felsen.

In diesem Gebiete kommen auch Wasserfälle vor, nichts Ungewöhnliches in anderen Gebirgen, aber hier desto auffallender für uns, nachdem wir uns durch aufmerksames Vergleichen all der von uns getrennt ausgeführten Routen überzeugt hatten,[86]) das es am ganzen Südabhange des Himálaya, ungeachtet seiner steilen und felsigen Gehänge nur ganz vereinzelte kleine Wasserfälle gibt und dass sie auch auf der Nordseite fehlen, und zwar im nördlichen Himálaya- und im ganzen Karakorúm-Gebiete südlich und nördlich bis heran zum Künlün.

Hier treten sie auf, weil doch „noch nicht alle Wasserfälle zu Stromschnellen geworden sind“; man findet sie in festen Felsen, auch

---

86) Erläutert „Reisen“ Bd. II, S. 116.

in den Geröllausfüllungen der Thäler, da wo die Wassermenge, welche dieselben durchzieht, etwas geringer und weniger kräftig wirkend ist als längs den Hauptlinien oder als unmittelbar an den Einmündungsstellen der Seitenbäche.

Der oberste Wasserfall, den ich sah und auch in Farbe skizzirte (Gen. No. 578), war jener des Ulár-Baches, zur Rechten unserer Route. Die Höhe des Absturzes war nicht sehr gross zu nenneu, sie betrug an 40 Fuss, aber wenn man thalaufwärts blickte, sah man nur einer tief eingeschnittenen Schlucht entlang, wobei noch Mündungen tief erodirter Seitenthäler, Thoren ähnlich, sich erkennen liessen. Selbst das Wasser des Baches oberhalb des Falles war verdeckt, da sein Weg durch eine flache Lage groben Gerölles führt, von dessen Rändern das Flussbett bedeutend überragt ist, und nirgend zeigte sich von diesem Standpunkte ein höherer Mittelgrund der Landschaft oder ein Hintergrund in der Form vereinzelter der nicht sehr fernen hohen Schneegipfel.

Ein zweiter, diesem ganz ähnlicher Wasserfall ist jener des Ájar-Baches, der etwas weiter thalabwärts folgte.

Am Wege über den Kilián-Pass gibt es auch solche Wasserfälle, und dort, weil daselbst der Künlún-Abhang auf der Südseite und auf der Nordseite nahezu gleich gestaltet ist, kommen die Wasserfälle ebenso wie die eigenthümlichen Geröllausfüllungnn zu beiden Seiten vor.

Unseren letzten Halt vor Búshia machten wir zu Déra Oitásh, auf der linken Thalseite. Zur Zeit war der Platz leer; aber es bot sich hier ein Weideplatz mit trefflichem Grase, der auch von Hirten bisweilen bezogen wird, obwohl die Höhe 12,220 Fuss ist und Brennmaterial selbst in der Form kleinen Strauchwerkes gegen tausend Fuss hoch heraufgetragen werden muss; auf dem Wege thalabwärts waren uns am folgenden Tage Gebüsche erst bei 11,140 Fuss vorgenommen. Hütten waren keine zu sehen, auch nicht aus Steinen aufgerichtete; aber Lagerplätze und Feuerstellen waren an mehreren Punkten zu erkennen. Stabile Hirtengebäude wie das oben (S. 67) erwähnte Kórdzog, kommen an solchen nur im Sommer bezogenen Plätzen in Tíbet vereinzelt vor; im Künlún aber sind deren so wenig zu erwarten, als Zelte statt der Holz- und Steinhütten in der Alpenwirthschaft Europas.

Im Thalbecken von Oitásh hatte sich die Geröllmasse sehr vermindert und stellenweise tritt anstehendes Gestein, granitähnliche Gneissmasse, aus demselben hervor.

Hier bot sich das erstemal wieder, nach Tíbet und nach der nördlichen Hochregion des Karakorúm, eine Landschaft etwas ähnlich jenen in gleicher Höhe am Südabhange des Himálaya; nämlich in Farbe, auch in relativer Erhebung der das Bild begrenzenden Kämme und Gipfel. Aber darin ist Oitásh charakteristisch verschieden, dass die Thalfläche ungleich grösser ist, als solche im Himálaya zu finden wäre; damit verbindet sich hier, bei der geringen Geröllmasse, dass local der Búshia-Dariáu in zahlreiche Verzweigungen sich theilt, und dass bei der geringen Geröllmasse die Erosion nicht tief ist, während auf der Südseite des Himálaya, auch unter solchen localen Verhältnissen, der ungleich grösseren Regenmenge wegen das abfliessende Wasser vorherrschend Concentration im Laufe und tieferes Einschneiden zeigt.

Die Verzweigung des Wassers, sowie der flache Boden würde das Kreuzen des Flusses, das noch auszuführen bleibt, bei Oitásh sehr leicht machen; doch kann die Thalseite wegen Vertheilung steiler Felsenwände in der nun folgenden Thalenge nur innerhalb dieser gewechselt werden.

Der Uebergang macht dort wegen des starken Gefälles stets sehr grosse Schwierigkeiten und kann auch sehr gefährlich werden. Man sagte uns, das manchmal wochenlang kein Versuch überzusetzen gemacht werden kann.

Am 25. August gegen 11 Uhr Vormittags, 4 Stunden nach unserem Aufbruche von Déra-Oitásh, kamen wir an die grossen unmittelbar bei Búshia gelegenen Weideplätze, die wir von Hirten und Heerden bezogen fanden.

Die Umstände, unter welchen die Leute uns bemerkten, waren von sonderbarem Effecte. Wir sahen zuerst ihre grossen Schafheerden jenseits des Búshia-Baches, und da der Abstand noch gross war, richteten wir ein Fernrohr dahin. Augenblickliche allgemeine Flucht; die Leute hielten das Fernrohr, wie sie später sagten, für eine Flinte. Aber als nun Mohámmad Amín ohne Waffen sich ihnen näherte, legten auch sie ihre nicht schlechten Luntenflinten (mit russischen Stempeln) weg, und

wurden rasch Freunde. Eine grosse Filzdecke wurde ausgebreitet, auf welche nach gegenseitigen endlosen Complimenten und Ceremonien Alles sich niederliess; baldigst folgte dann das Anbieten von Thee und Reis. Mit Ausnahme der etwas verborgen gehaltenen Beschuhung (s. o. S. 72), waren wir ganz gekleidet wie die Landesbewohner selbst, was bei Reisen der Eingeborenen aus dem Süden, wenn dieselben sehr weit sich ausdehnen und Gegenden mit sehr verändertem Klima erreichen, das Gewöhnlichste ist, sowohl um sich genügend gegen Kälte zu schützen, als auch ganz allgemein um nicht mehr als nothwendig aufzufallen. Eigenthümlich ist es, wie viel eine Bekleidung, ganz verschieden von den Formen, die man gewohnt ist zu sehen, dazu beitragen kann, jene kleineren Raçen-Unterschiede wenigstens rasch verschwinden zu machen, die man als „nationale“ häufig bedeutend überschätzt. Ja, die Bewohner von Búshia hielten uns in der That, da sie nie einen Europäer gesehen hatten und da wir uns das Gesicht und die Hände mit einer desshalb mitgenommenen braunen Okermasse etwas angerieben hatten, — wie wir unserer Route entsprechend es vorgaben — für indische Kaufleute aus Délhi, von dem wir Manches zu erzählen hatten.

Die Begleitung Makshúts, der sicher einen ganz normalen Eindruck machte, war uns dabei nur günstig. Er selbst war einer jener indischen Mussălmáns, deren Typus die indisch-arische Basis[87]) besonders gut erkennen lässt, und unsererseits ging das Hindostánisprechen mit ihm ganz befriedigend, in der Art nämlich, dass wenigstens keine Störung durch Mangel an Worten für jene bemerkbar wurde, die überhaupt die Sprache als solche nicht kannten.

Einer der aufmerksamsten Zuhörer vom Beginne an, mit dem wir auch persönlich zu unterhandeln bekamen, war der Beg oder Vorstand. Búshia hatte wie jede Gemeinde bei uns, und wie in diesem dünn bevölkerten Lande auch jede noch so kleine Gruppe von Häusern und Zelten, seinen Chef. In Turkistán sind solche, wie meist in den musălmánschen Ländern, in patriarchalischer Weise für je einen Ort sehr autonom und müssen wo möglich alte Leute sein.

87) Ueber Raçe der indischen Mussălmáns gegenüber den indischen Kasten, s. „Reisen“ Band I, S. 493.

Unsere Conversation bewegte sich etwas langsam, wegen der für Rede und Gegenrede nöthigen Uebersetzung; doch da es des Neuen so viel zu hören gab, störte dies nicht die gute Stimmung der Khotánis und bald konnten wir auch damit beginnen, ihnen unsere Lage auseinanderzusetzen und um ihre Hilfe sie anzusprechen. Obwohl wir momentan ihnen nichts bieten konnten und auf Bezahlung an Begleiter, die sie uns dann beim Rückmarsche mitzugeben hatten, verweisen mussten, fanden wir doch volles Vertrauen und eine vortreffliche Aufnahme. Wir erhielten Pferde, Yaks, sowie Schaafe, Weizen und Gerste in der uns nöthigen Menge gewährt. Die Hirten zu Búshia waren in der That überraschend gut mit Allem versehen. Nicht nur ihre verschiedenen Heerden waren sehr zahlreich, auch ihr Getreidebau scheint ganz lohnend. Im Verkehr machten sie den Eindruck, sehr ehrlich und offen zu sein, auch ihre Preise waren ganz mässig.

Ihrer Raçe nach fanden wir die Bewohner von Búshia, obwohl ihre Sprache das Türkische ist, nicht Turanier oder Mongolen, sondern Arier; von schönen normalen Formen.

Das Auftreten der arischen Raçe in Yárkand hatte sich uns schon in den Bazárs von Le vor dem Aufbrechen nach Turkistán erkennen lassen, obgleich wir damals die Ausdehnung keineswegs beurtheilen konnten. Dass hier in dem noch östlicher gelegenen Khótan und zwar im Gebiete nomadischer Hirten und an Bewohnern, denen wir als den ersten, am wenigsten von Tíbet entfernten begegneten, gleichfalls reine arische Raçe sich zeigte, liess auf eine sehr allgemeine Ausbreitung derselben über das östliche Turkistán schliessen, wie solche später auch nach Adolph's letzten Aufzeichnungen sich bestätigte. Ausser Kopf- und Körpermessungen konnten wir — zwar nicht während des Marsches, aber nach der Rückkehr zu Le — auch zahlreiche Photographien machen und selbst unser plastisches Abformen an Handelsleuten aus verschiedenen Theilen des östlichen Turkistán ausführen; diess gestattet am besten, den Raçentypus der Physiognomie auch in Europa noch unmittelbar vergleichend zu prüfen.

In Khótan und Yárkand lässt die rein erhaltene arische Raçe einen der Fälle des Sprachenwechsels bei unveränderten Körperformen erkennen, wie ich deren schon bei den ethnographischen Verhältnissen

Indiens mehrere gefunden hatte; dort allerdings auf weit kleinere Gebiete und vorzüglich auf isolirte Raçenreste von geringer Individuenzahl beschränkt.

Das Element arischer Raçe tritt auch in vielen Theilen des westlichen Turkistán und nördlich davon auf, wie jetzt das Vordringen der Russen bis Khiva gezeigt hat; doch sind dort die Mischraçen schon viel zahlreicher.

Die Bewohner Búshias, mit denen wir damals zu thun hatten, waren schon seit vielen Jahren dort ansässig gewesen, hatten auch während der Winter hier verweilt. Dessenungeachtet bestanden ihre Wohnungen vorherrschend aus strammen Zelten; zum temporären Schutze gegen Kälte hatten sie noch einige Felsenconstructionen und künstlich erweiterte Höhlen, die aber nur schlechte und verhältnissmässig kleine Räume boten. Es ist nicht unmöglich, dass der Platz, wie es der halbnomadischen Lebensweise der Bewohner entspräche, wieder einmal auf einige Zeit verlassen werde.

Das grösste der Zelte war jenes des Beg und vor diesem war eine feste Stange mit Querholz darüber eingeschlagen, als Sitz eines Adlers, der, mit einer Kette am Fusse, dort befestigt war.

Dass der Häuptling des Platzes zur Jagd und zugleich als Zeichen seiner Suprematie einen grossen Falken oder womöglich einen Adler sich hält, ist eine Sitte, die aus der Mongolei stammt und weit nach Norden und nach Westen sich verbreitet; nach Süden, wie es scheint, nicht; in Tíbet war uns solches nirgend vorgekommen. Das Thier des Búshia-Beg war ganz normal von der Gattung Adler aus der grossen Familie der Falconiden, die Species aber konnte ich nicht erkennen. Die Túrkis nannten diesen Vogel Birkút; doch wie ich ihrer Beschreibung anderer Birkúts entnehmen musste, bezeichnet dieser Name weder Species noch Genus, sondern ist die Benennung eines jeden zur Jagd gebrauchten Falconiden, und solcher gibt es dort sehr verschiedene.

Die Terrainverhältnisse für Búshia und Umgebung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Der Charakter des Hochgebirges geht hier in die Formen einer Mittelstufe über. Die Meereshöhe des Thales fanden wir zwar mit dem Hypso-

meter, aufgestellt in der Nähe des Zeltes des Beg, 9310 Fuss; aber die relativen Höhen der Umgebungen sind nicht mehr bedeutend. Die höchsten Berge in der Nähe von Búshia sind gegen 11,000 Fuss hoch. Der landschaftliche Abschluss des Thalbeckens nach Süden, thalaufwärts gesehen, hat ungeachtet einer nicht sehr bedeutenden Entfernung eine geringe Winkelhöhe, womit auch der Ton der Farben sowie die Schärfe der Felsenformen übereinstimmte. Nur die unmittelbar die breite Thalfläche umgebenden Seitengehänge zeigen etwas steile Formen. Schneebedeckte Gipfel sieht man nach keiner Richtung.

Die Zelte und Höhlen befinden sich auf der rechten Thalseite, gegen 20 Fuss über dem Flusse. In geringer Entfernung von diesen endet das Búshia-Thal am Khótan-Flusse, wobei es sich wieder verengt und etwas tiefere Erosion zeigt. Ich habe eine Skizze der letzten Gehänge aufgenommen (Panor. No. 79), doch war mir das Zeichnen hier ungewöhnlich erschwert, da es rasch und unbemerkt vor sich gehen musste, um nicht, nachdem wir ohnehin schon soviel gefragt und durchgesprochen hatten, auch damit noch aufzufallen. Das Aufschreiben des Gehörten hatte sich leichter machen lassen, da dieses ausgeführt werden konnte, wenn wir in der uns angewiesenen Lagerstätte mit unsern Begleitern allein waren.

Die Richtung des Búshia-Thales ist an der Vereinigungstelle ziemlich genau Norden, jene des Khótan-Thales Nord 70° West; letzteres ist also hier gegen Nordwinde gut geschützt und es sind dieselben auch im Seitenthale noch weit über Búshia hinauf abgehalten. Diess, und der Umstand, dass durch die Umgebungen die Besonnung des Búshia-Beckens verhältnissmässig wenig beschränkt ist, hat entschiedenen Einfluss auf Milderung des Klimas und macht sich am besten durch den so befriedigenden Getreidebau bemerkbar. Gerstenbau kommt bei Bushia noch in Lagen von 9700 F. Höhe vor, an Stellen, wo auch die nicht zu steilen Stufen der Abhänge dazu benützt werden, um vom eigentlichen Thalboden möglichst viel für die Viehzucht frei zu halten.

In Beziehung auf das Klima liesse sich für die „Grenze des Getreidebaues" nach den allgemeinen Verhältnissen der Höhen-Isothermen noch grösseres Ansteigen derselben in diesem Gebiete erwarten; doch der Umstand, dass die bewohnten Orte nicht weiter hinaufreichen,

schliesst auch die Veranlassung zu Versuchen des Getreidebaues in grösserer Höhe aus. Bäume fanden sich zu Búshia noch nicht; Strauchvegetation, die Brennmaterial liefert, lässt sich, wenn auch spärlich nur, sammeln, aber jede Zeltstange schon muss aus etwas tieferen Lagen heraufgeschafft werden. Höhe von 9100 Fuss kann für Baumwuchs als oberste Grenze in ganz günstigen Lagen gelten.

Während nun in andern Gebirgen unterhalb der Grenze das Baumwuchses mit der Veränderung der Höhe die Menge, auch die Mannigfaltigkeit der Vegetation stetig und rasch sich mehrt, treten am Nordabhange der Künlün-Kette in den tieferen Theilen sehr bald eigenthümliche Störungen ein, welche uns von den Eingeborenen recht klar beschrieben wurden. Mit dem Nahen gegen den Rand des Gebirges beginnt das Grün der Gehänge und der Thalbecken durch Ablagerung von Wüstensand nochmals auf weite Strecken zu verschwinden, und an vielen Stellen breiter Thäler sowie des Gebirgssaumes ist die Cultur von künstlicher Bewässerung — durch Canäle oder durch Vertheilung des Wassers mittelst Schöpfräder — abhängig.

Hydrographisch unterscheiden sich an der Vereinigungsstelle der als Zufluss, am linken Ufer, eintretende Búshia-Dariáu und der Khótan-Dariáu in ihrer Wassermenge nur wenig und zwar bei sehr verschiedener Thal- und Bodengestaltung, wie auch auf meiner Karte („Reisen" III), ungeachtet ihres kleinen Maassstabes, zu erkennen ist. Der Khótan-Fluss hat bis zu dieser Stelle heran eine mehr als viermal grössere Längenentwickelung, sowie ein gedehnteres, wenn auch nicht in entsprechendem Verhältnisse grösseres Flussgebiet als der Búshia-Dariáu. Die Eingeborenen sagten, dass sich auch in anderen Perioden des Jahres, mit Ausnahme des ersten Schneeschmelzens im Frühjahre, kein viel grösserer Wasser-Unterschied zeige; da sie beide Flüsse häufig, beritten sowie mit Lastthieren, kreuzen, haben sie vielfach Veranlassung, auf Veränderungen in denselben aufmerksam zu sein. Der Umstand, dass hier überhaupt die Menge atmosphärischen Niederschlages noch eine geringe ist, muss entschieden dazu beitragen, auch den Einfluss verschiedener Grösse der Flussgebiete weniger deutlich hervortreten zu lassen; hier scheint sich damit zu verbinden, dass sich bei etwas geringerer Steilheit der Formen in der Hochregion des Búshia-

Quellengebietes grössere von Firn und Gletschern bedeckte Flächen gebildet haben, was nicht ohne Einfluss ist, bei gleichen atmosphärischen Verhältnissen die Menge des Niederschlages (durch Condensation) local zu vermehren und sie vor Allem während der warmen Jahreszeit etwas vermehrt zu erhalten.

Dass die Wassermenge im Khótan-Bache bei Búshia noch eine auffallend geringe ist, lässt auch die Art der Bezeichnung desselben erkennen. Die Khótanis nannten uns seinen obern Theil nur Góbi- oder Wüstenfluss, „weil dieser im Gegensatze zum Búshia-Dariáu aus einer steinigen Hochwüste herabkomme. Khótan-Fluss heisse er erst von der Vereinigungsstelle an abwärts." Solche Aenderung des Namens eines Flusses von der Stelle seitlichen Zuflusses an, ist hier zusammenhängend mit einer Auffassung, die sich vielfach in Asien in der Bezeichnung localer Formen wiederholt, und es ist nützlich bei geographischen Untersuchungen daselbst auch Combinationen dieser Art in manchen sonst unklaren Fällen prüfend anzuwenden.

Der Khótan-Fluss ergiesst sich, etwa 15 engl. Meilen unterhalb Élchi, der Hauptstadt Khótans, die am linken Ufer desselben gelegen ist, in den Karakásh-Fluss.

Die Entfernung von Búshia nach Élchi wurde uns als eine Strecke von zwei starken Tagemärschen angegeben. Aber für Karawanen mit beladenen Thieren, mit welchen nach unsern Erfahrungen auch thalabwärts und auf gutem Boden ein Zurücklegen von 2 engl. Meilen die Stunde eine schon mehr als mittelgute Leistung ist, schätze ich die nöthige Zeit auf mindestens 3 Tage.

Die Route, die von Búshia aus eingeschlagen wird, führt meist dem Flusse entlang und berührt einige Dörfer oder wenigstens einige, Búshia ähnlich, fest bewohnte Hirtensitze. Wir konnten damals nur mit grösster Vorsicht fragen, um nicht unsere Verkleidung argwöhnen zu lassen; darauf machte uns vor Allem Makshút, der Dolmetscher, stetig aufmerksam, und diessmal mag er Recht gehabt haben. Für diese Route sind mir auch jetzt noch keine genaueren Angaben bekannt; Johnson's Yángi Daván-Route liegt in den untern Theilen seitlich, östlich vom Flusslaufe.

Die Länge des Khótan-Flusses von Búshia bis Élchi lässt sich nach

dem, was die neuen Materialien zu vergleichen bieten, auf 55 bis 60 engl. Meilen schätzen. Bei einer Höhendifferenz von 5000 Fuss ergiebt diess ein Gefälle von 1 F. auf 63 Fuss oder eine Neigung, (wobei Höhe dividirt durch Länge der Sinus des Winkels ist) von nicht ganz 1 Grade, nämlich 0° 54′, sehr gering also schon von Búshia an für den untern Theil dieses Thales.

Für den obern Theil erhalte ich, berechnet aus den von uns gemachten Höhenbestimmungen und der Marschroute,

a) vom Élchi-Passe bis Búshia, für 22·5 Meilen Entfernung und Höhendifferenz von 8100 F.:

Gefäll von 1 F. auf 14·8 Fuss, Neigung 3° 52′;

b) vom untern Ende des Búshia-Gletschers (Beginn des Flusses) bis Búshia, für 18 Meilen Entfernung und Höhendifferenz von 5500 F.:

Gefäll von 1 F. auf 17·3 Fuss, Neigung 3° 19′;

c) von der Passhöhe (Uebergangstelle über den Künlún-Kamm) bis zum untern Ende des Búshia-Gletschers, für 4·5 Meilen Entfernung und Höhendifferenz von 2570 Fuss:

Gefäll von 1 F. auf 9·25 Fuss, Neigung 6° 12′.

Stärke sowie Vertheilung der Gefälle ist demnach längs diesen Thälern über die Nordseite des Künlún herab den Formen mancher Querthäler in den Centralalpen sehr ähnlich, z. B. dem Oetzthale in Tirol[88]). —

Unsere Geschäfte waren so bald geregelt, dass wir, nach einem Aufenthalte von 2½ Tagen, nachdem wir jetzt auch die Terrainverhältnisse der Umgebung befriedigend uns hatten besehen können, keine Veranlassung hatten, durch noch längeres Verweilen unsere Lage etwa zu verschlimmern. Auch hatten wir ja mit jedem Tage neue Schwierigkeiten für unsere jenseits des Künlún zurückgelassene Karawane zu befürchten.

Ein Versuch nach Élchi selbst noch vorzudringen, war ohnehin damals von Anfang an aufgegeben gewesen. Úrtangs, auch Lángars genannt, — chinesische Zollhäuser sehr streng in Untersuchung der Waaren sowie voll Argwohn selbst gegen Eingeborene, wenn dort nicht schon eine Zeit lang gekannt — mussten uns der grössten Gefahr ohne alle Wider-

---

88) Daten gegeben von Adolph und mir in Untersuchungen über die physicalische Geographie der Alpen. 1850, Bd. I., S. 204.

standsfähigkeit aussetzen. „Aus Indien hätte die chinesische Wache ohnehin noch keine Händler gesehen," darauf wurden wir in offen ausgesprochener Theilnahme für uns von den Bewohnern Búshias gleichfalls aufmerksam gemacht.

Am 27. August traten wir den Rückweg an, von 3 Khotánis begleitet. Wir waren gut versehen mit Lebensmitteln, mit neuen Pferden, diessmal auch mit Yaks (Bos grunniens); von letzteren hatten wir aus Tíbet keine mitgenommen, weil wir glaubten, Pferde würden für uns als weither kommende Fremde weniger auffallen. In Turkistán ist die Anwendung der Yaks eine ganz allgemeine. In Sicherheit des Gehens über Berge ist der Yak den Pferden überlegen zu nennen, und er trägt dabei nahezu soviel als ein Pferd. Er kann auch geritten werden, aber seine Brauchbarkeit als Reitthier ist dadurch beschränkt, dass seine Geschwindigkeit, auch auf ebenen Wegen, wenig grösser ist, als jene eines rasch schreitenden Menschen. Die Ernährung des Yak ist bedeutend leichter als die des Pferdes. Gerste[89]) wird ihm nie gegeben, da er selbst die schlechte, meist harte Vegetation hoher Steppen abweidet und sich damit ganz begnügt. Letzteres wird bestätigt durch das Vorkommen wilder Yaks gerade in den Hochregionen. Ich hatte ihre Spuren zuerst in den Umgebungen des See's Kiúk Kiól aufgefunden und sie zeigten sich später noch einmal auf dem Rückwege von Súget gegen den Karakorúm-Pass.

Früher haben sich wilde Yaks gewiss auch in den jetzt cultivirten, tiefer gelegenen Thälern Turkistáns aufgehalten. Aber wohl seit lange schon sind sie in die hohen Steppen zurückgedrängt, da zu unserer Ueberraschung den meisten der Turkis, die wir befrugen, die Existenz der Yaks im wilden Zustande ganz unbekannt war.

---

89) Gerste ist in Tíbet und in Turkistán ebenso wie in Indien das Getreide für Pferdefutter Hafer wird von den Eingebornen nicht cultivirt und wird auch von den Europäern nur vereinzelt in Gestüten und bei neueingeführten Pferden gefüttert. „Reisen" Bd. I, S. 81. Während unserer Reise durch die Hochregionen Turkistáns, wo möglichst oft die Pferde auf das Weiden beschränkt bleiben mussten um das so schwer zu transportirende Futter zu sparen, sah ich sie häufig die Blätter und selbst kleine Sprossen der oben erwähnten Eurotia ceradoites abstreifen (S. 26). Diess war aber auch wohl die einzige ähnlich gestaltete Pflanzenform, die sie geniessen konnten. Den Yarkándi-Begleîtern war es bekannt, dass die Pferde im Nothfalle „Búrze" fressen.

Die Pferde in Turkistán sind sehr kräftige Ponies, die grösste und beste Raçe von Gebirgspferden, die uns in Hochasien vorgekommen war. Einen Hengst und eine Stute gelang es uns nach Europa zu schaffen; sie kamen nach Schlesien in ein preussisches Landesgestüte.

Die Schaafe in Turkistán sind ausschliesslich solche von der breitschwänzigen Raçe, die ich schon bei der Besprechung der tibetischen Schaafzucht zur Vervollständigung erwähnt habe[90]); in Tíbet selbst finden sich diese breitschwänzigen Schaafe nicht, aber gegen Nordwesten sind sie noch weit verbreitet, auch im astrachanischen Pelzhandel sind sie stark vertreten.

Bei herrlichem Wetter und diessmal unter guter Führung war der Rückweg versöhnend mit den Beschwerden des ersten Ueberganges. Obwohl wir erst um 1 Uhr Nachmittags hatten aufbrechen können, gelangten wir doch jenen Abend noch weiter thalaufwärts als Oitásh, zu einer hinreichend schützenden Haltestelle bei 13,137 F. Wir lagerten diessmal an einer alten Endmoräne, die 1673 Fuss tiefer liegt, als das gegenwärtige Ende des Élchi-Gletschers und deren Entfernung von demselben einschliesslich der Krümmungen des Thales gegen 4 engl. Meilen beträgt. Ich hatte die Moräne erst jetzt, bei der Rückkehr, als solche erkannt, da in der Richtung nach aufwärts gesehen ihre Form bestimmter sich zeigte als im Anblicke von oben nach abwärts.

Am folgenden Tage, 28. August, als wir den Élchi-Gletscher hinaufstiegen, fanden wir auch unsere zurückgelassenen Effecten wieder. Es hätten uns diese vollkommen in Stand gesetzt, sogleich unserer Schuld an die Begleiter aus Búshia uns zu entledigen, doch hatten wir, der Menge des Angekauften wegen, ohnehin vereinbaren müssen, dass sie mit ihren beladenen Thieren bis Súmgal mit uns gingen; sie machten auch keine Schwierigkeit diess zu thun.

Súmgal erreichten wir schon um 3 Uhr Nachmittags; Máni und die zurückgelassenen Yarkándis fanden wir ganz nahe dem Halteplatze wo die Zelte aufgeschlagen waren, und mit den Khotánis, die nun ein

---

90) In der Zusammenstellung über die Wollsorten, von Schaafen und von Ziegen, und über ihre Verwendung zur Shawlfabrikation, „Reisen“ Bd. III, S. 303.

Paar Stunden noch desselben Tages zur Rückkehr bis gegen den Fuss des südlichen Gletschers benützen wollten, wurde baldigst nach Ankunft abgerechnet.

An Geld und edlem Metall — was sie allem, was wir von Waaren in tibetischen Wollstoffen und indischen Baumwollgeweben anbieten konnten, vorzogen — hatten wir etwas Gold mit, aber meist geprägtes Silber aus Indien, auch etwas gestempeltes Silber[92]) mit Privatmarken gezeichnet, darunter sowohl Yámbus oder Klumpen als auch verschiedene nicht umgeschmolzene fremde Geldstücke. Gold hatten wir wenig, doch war uns der Vorsicht wegen auch Vorrath von solchem und zwar von Goldstaub und von geprägtem Golde empfohlen worden. Unser Gold hatten wir aus Indien mit; in Tíbet ist es von dem gegewöhnlichen Verkehre ganz ausgeschlossen.

Mit dem gestempelten Silber, das wir in den Bazárs zu Le erhalten hatten, waren wir hauptsächlich desshalb versehen, um bei kleineren Auszahlungen, so an Karawanen, die wir begegnen sollten, nicht mehr als nöthig durch Geld, das in Turkistán etwa selten war, aufzufallen. Diessmal aber war Schwierigkeit solcher Art nicht zu befürchten. Nachdem die Khotánis nicht beanstandet hatten, dass wir von Déhli bis nach Turkistán gekommen waren, durften wir auch indisches Silbergepräge anbieten.

Ja, der indische Rupí, so blank und wohl erhalten, wie wir deren hatten, war ihnen sogar eine Ueberraschung und ganz willkommen. Während auf den Münzen normaler musălmánscher Form kein menschliches Wesen abgebildet sein darf, und auf all den fremden, die sie bisher gesehen hatten, nur Männer dargestellt waren, hatten sie jetzt das Bild der Königin Victoria zum erstenmale als Frauengestalt auf Silber zu sehen.

Der Nominalwerth der gebotenen Münzen blieb ganz unberücksichtigt, wie wir diess, nach den Unterhandlungen zu Búshia, auch zu erwarten hatten. Es wurde nur gewogen; dabei galt das indische Gepräge als volle Garantie für den beanspruchten Feingehalt des Silbers, für welchen auf den andern Stücken die Banquiers-Stempel bürgen

92) Vergl. Allgemeine Geldverhältnisse im Verkehre, „Reisen" Bd. I, S. 90.

mussten. Auch etwas Gold wurde abverlangt, diesem wurde aber ein etwas geringerer Werth als in Indien selbst gegeben. In Bombay, wo allein zur Zeit unserer Reisen Gold geprägt wurde, war Gewicht und nomineller Werth der indischen Goldmünze, des Muhr, officiell fixirt. Das Gewicht ist jenem des Rupí gleichgesetzt, nemlich 180 Troygrains, der Nennwerth ist 15 Rupís; hier, fanden wir, wurde der Werth des Gold-Gewichtes im Verhältnisse zu jenem des Silbers nur gleich $14\frac{1}{2}:1$ gesetzt. Der Wunsch, auch einige Goldmünzen zu erhalten, wurde durch die leichtere Aufbewahrung sowie Versendung derselben motivirt; er konnte aber dennoch auf einen in Wirklichkeit etwas höheren relativen Werth als die Khotánis uns ihn angaben, basirt sein. Hier, natürlich, liess sich solches nicht besprechen.

So war nun diese erste Ueberschreitung der Künlün-Kette in Verbindung mit topographischer Untersuchung gegen Süden und gegen Norden glücklich vollbracht und zwar an einer Stelle, welche den allgemeinen Charakter einer mächtigen aber dennoch nicht wasserscheidenden Gebirgskette so bestimmt erkennen liess, dass wohl keiner der westlicher gelegenen Wege diess besser gestattet hätte, weil der Kamm gegen Westen, ungeachtet noch immer bedeutender Höhe, sehr an Einfachheit der Form verliert. Hier sind es „das grosse Quellengebiet des Khótan-Flusses im Norden, dann als nächste Hauptform, westlich gelegen, die Depression des Künlün und das Austreten des Karakásh-Flusses, mit einem Quellengebiete weit im Süden“, welche als entscheidende Gegensätze sich geboten haben.

Uebersicht.

Nachschrift; 30. Juli 1874.

Der Umstand, dass mit meiner Februar-Mittheilung ein neuer Band der „Denkschriften" beginnt, macht es mir möglich vor Ausgabe desselben auch jener Daten zu erwähnen, welche jüngst nach langer Pause über Forsyth's Mission, und zwar über Rückkehr derselben nach Ladák, eingetroffen sind; Absendung von Le am 20. Juni.

Die Abreise von Káshgar hatte Anfangs Mai begonnen, in zwei Abtheilungen. Mr. Forsyth führte die erste Gruppe, Oberst Gordon brach 10 Tage später auf und musste den gleichen Weg einschlagen.

Zur Uebersicht folgen einige Zeitangaben aus Forsyth's Itinerare.

1874 Mai 18. bis 30. Ab von Yárkand. Ueber Poskám in das Tesnáb-Thal; aufwärts bis zum Kókiar-Seitenthale. Hoher Wasserstand und Fluss

sehr kalt, wegen des Verschwindens des Winterschnees in den Mittelhöhen; 24mal den Tesnáb-Fluss zu kreuzen, mit Stellen bis zu 3 Fuss Tiefe, längs 28 engl. Meilen Weges. Ueber Kókiar und den secundären Túpa Daván Pass an den Nordfuss des Künlün.

1874 Mai 31. Ueber den Kókiar- oder Yángi Daván-Pass nach Kulanúldi in dem nach Westen fallenden Theile des oberen Yárkand-Thales; Ueberlagerung des Weges nahe der Passhöhe durch Gletscher-Abbruch.

Juni 1. bis 8. Ueber den Karakorúm-Pass nach Déra Sássar in Núbra, der Haltestelle mit Steinhaus an der Gabelung des Winter- und des Sommerweges (s. o. S. 63).

Juni 9. Ueberschreiten des Sássar-Passes.

Juni 17. Ankunft in Le. (Joint Commissioner und Resident daselbst in diesem Sommer Cpt. Mallay).

Oberst Gordon und seine Begleiter, kurz vorher mit Untersuchung im Pàmir-Hochgebiete beschäftigt, konnten nicht, wie sie vorhatten, von dort den Weg über Afghanistán und Kábul wählen. Schon vom Amír von Káshgar war ihnen solches abgeschlagen worden.

Diese Abtheilung hatte das Unglück Dr. Stoliczka, den Geologen, der als wissenschaftliches Mitglied an der Mission betheiligt gewesen war, zu verlieren; er starb, in Folge der grossen Anstrengungen in so bedeutenden Höhen während der noch ungünstigen Jahreszeit, am 19. Juni zu △ Murgái. (Haltestelle auf der Terrainstufe zur Rechten des Kiziláb-Thales, 15,448 F.; s. o. S. 85.)

Obwohl bei der Rückkehr von den Káshgar-Führern der Kókiar- oder Yángi-Pass nicht mehr wie früher (vgl. S. 58) unbenützt blieb, waren doch auch diesesmal für die beiden so grossen Massen, die sich zu bewegen hatten, die Märsche durch das Hochgebirge ungemein beschwerlich, um so mehr, da auch deutlich zu verfrühtem Aufbruche gedrängt worden war.

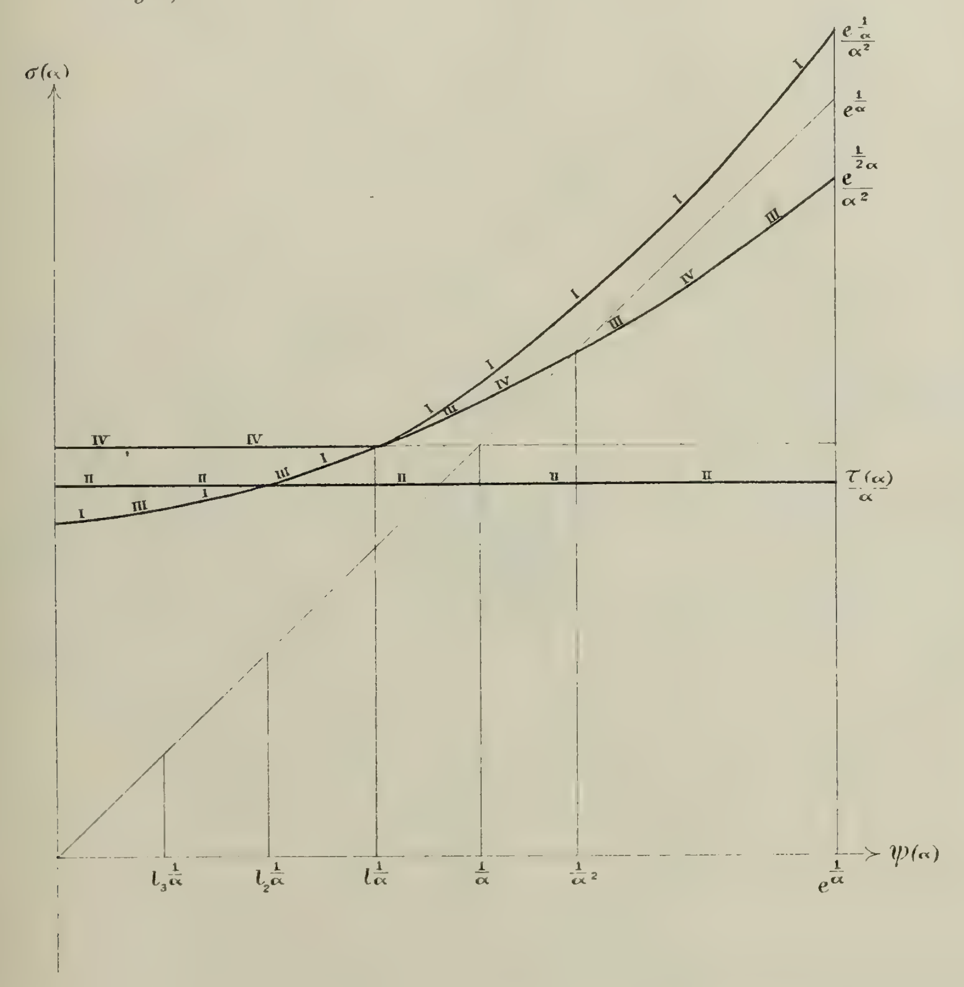
Dieses, ebenso wie der Widerstand, den der Amír dem Versuchen eines Weges über Kábul entgegenstellte, konnte auch in der sich ergebenden Beurtheilung der politischen Stimmung keineswegs einen befriedigenden Eindruck machen.

I — I Regel und Grenze für die bedingte Convergenz des Integrals $\int_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)$

II — II Regel und Grenze für die absolute Convergenz dieses Integrals.

III — III Regel, Fall $c \gtrless o$,

IV — IV Regel, Fall $c = o$



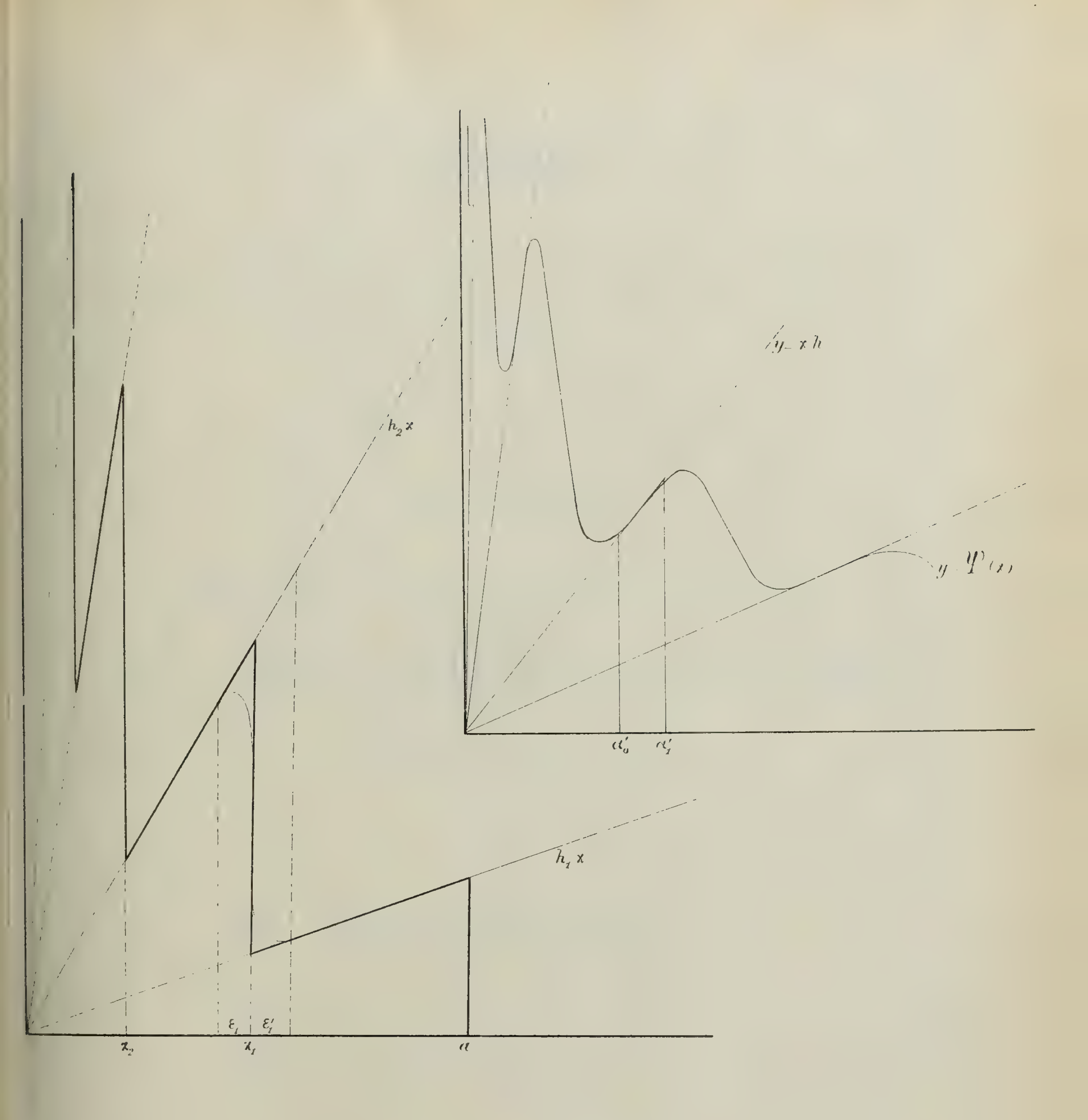

NATURAL HISTORY.

II — Bedingung II: $\frac{f(\alpha)-f(0)}{T(\alpha)} \gtrsim 1$

III — " III: absolute Convergenz von $\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$

IV — " IV: " " " $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$

V — " V: (der Tabelle) Art. 24.


$h_2 x$
$h_1 x$
x_2
ε_1
ε_1'
x_1
a
$y = xh$
$y = \Psi(x)$
a_0'
a_1'


NATURAL HISTORY

Beweis,

dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

die Werthe

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha), \quad a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos. p\alpha, \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin. p\alpha$$

haben, jedesmal wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind.

Von

Paul du Bois-Reymond.

Beweis,

dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

die Werthe

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \ , \ a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos. p\alpha \ , \ b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin. p\alpha$$

haben, jedesmal, wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind.

Von

Paul du Bois-Reymond.

I. Einleitung.

1. Der Begriff der gleichmässigen Convergenz.

Bekanntlich kann eine Reihe, deren Glied Function einer Veränderlichen x ist, für jeden besonderen Werth dieser Veränderlichen convergent sein, aber mit der Eigenthümlichkeit, dass die Convergenz bei Annäherung an einzelne Punkte des Intervalls sich ins Unbegrenzte verschlechtert, ohne dass, wie gesagt, für jene Punkte selbst berechnet, die Reihe sich divergent zeigte.

Wenn dieses von Herrn Seidel entdeckte Verhalten[1]) auf den ersten Blick den Eindruck einer etwas fernliegenden Ausnahme machen

1) Abhandlung der math. phys. Kl. d. Münchener Akademie, 1848. Herr Seidel weist dies Verhalten zunächst nach in Punkten, wo die durch die Reihe dargestellte Function eine sprungweise Werthänderung erleidet, und wo die Convergenz, wie er zeigt, stets unendlich

mag, so hat es sich in Wahrheit doch als ein ungemein wichtiges und folgenreiches erwiesen: denn es entspringt daraus sogleich der Begriff von der gleichmässigen oder nicht gleichmässigen Convergenz der Reihen. Unter der gleichmässigen Convergenz einer Reihe in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist verstanden, dass es eine endliche Gliederzahl N der Reihe gibt, die für jeden dem Intervall angehörigen Werth x einen Rest lässt, der kleiner ist als ein beliebig klein vorgeschriebener Werth.

Man kann wohl sagen, dass namentlich durch Betonung der Folgen dieses Begriffs Herr Weierstrass[2]) in den Theil der Lehre von den Reihen, der sich mit der Abhängigkeit ihrer Summe von den Argumenten ihrer Glieder beschäftigt, nicht minder tief und nachhaltig eingegriffen hat, als seiner Zeit Lejeune-Dirichlet in die Theorie der numerischen Reihen, indem er die Analysten auf den Unterschied zwischen der bedingten und unbedingten Convergenz aufmerksam machte.

2. Die Hauptsätze der Theorie der trigonometrischen Reihen durch Einführung jenes Begriffs in Frage gestellt.

Die überraschendste Folgerung, welche mit dem Begriff der gleichmässigen Convergenz zusammenhängt, ist die, dass eine Reihe, gliedweise integrirt, zuverlässig nur dann das Integral ihrer Summe liefert, wenn sie nicht in jedem kleinsten Intervall des Arguments einen Seidel'schen Punkt enthält, mit anderen Worten, wenn sie mit Ausnahme durch endliche Intervalle getrennter Punkte gleichmässig convergent ist.

---

langsam werden muss. Ich will ein Beispiel dafür angeben, dass dasselbe Verhalten bei einer durchweg stetigen Function eintreten kann. Die Reihe, deren ptes Glied, Summe bis zum nten Gliede, Rest resp. sind:

$$\frac{xp}{1+xp} - \frac{x(p-1)}{1+x(p-1)} = \frac{x}{x^2p^2+xp(2-x)+1-x}, \quad \frac{nx}{1+nx}, \quad \frac{1}{1+nx},$$

ist von mir schon früher angeführt worden (Antrittsprogr. pag. 25), um an ihr die unendliche Verschlechterung der Convergenz zu zeigen. Ihre Summe ist 1, ausgenommen für $x = o$, wo sie Null ist. Schreiben wir darin x^2 statt x und ziehen die ursprüngliche Reihe ab, so ist die Differenz für jeden Werth von x Null, und der Rest $\frac{1}{1+nx^2} - \frac{1}{1+nx}$ giebt $= \varepsilon$ gesetzt:

$$nx(1-x) = \varepsilon(1+nx)(1+nx^2)$$

wird hierin $x = o$, so muss n unendlich werden.

2) Eine gedruckte Mittheilung aus der Feder des Herrn Weierstrass existirt darüber wohl nicht, siehe aber: H. Heine, Borchardt's Journ. Bd. 71, pag. 353.

Ob dies der Fall sei, pflegt an der Reihe selbst nur sehr schwer sich feststellen zu lassen. So wurde denn zuerst die Theorie der trigonometrischen Reihen, bei welchen die gliedweise Integration eine grosse Rolle spielte und die für die directe Untersuchung der Art ihrer Convergenz fast unzugänglich zu sein scheinen, durch den neuen Begriff ins Herz getroffen, und zwar dergestalt, dass wir mit einem Schlage hinsichtlich der wichtigsten Sätze dieser Theorie wieder nicht allein hinter Dirichlet, sondern geradezu auf den Standpunkt vor Fourier zurückversetzt uns sahen.

3. Anführung der in Rede stehenden Hauptsätze.

Es handelt sich wesentlich um die Sätze:

I. Wenn eine trigonometrische Entwickelung von der Form

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

gegeben ist, so giebt es keine zweite derselben Form, aber mit anderen Coefficienten a_p, b_p, welche in dem Intervall $(-\pi \ldots + \pi)$ die nämliche Function f(x) darstellte.

II. Die Coefficienten der Entwickelung lassen sich durch die Summe der Reihe ausdrücken wie folgt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha)\,,\ a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos. p\alpha\,,\ b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin. p\alpha\,,$$

jedesmal, wenn diese Ausdrücke einen Sinn haben.

Beide Sätze wurden durch gliedweise Integration der Reihe f(x) bewiesen und beiden war nun plötzlich der Boden entzogen.

4. Geschichtliches über die weitere Entwickelung der Lehre von den trigonometrischen Reihen. Der erste Hauptsatz wieder hergestellt.

Herr Heine suchte in einer Abhandlung[3]), in welcher er zuerst weitere mathematische Kreise über diese Lage der Dinge unterrichtete, den ersten Satz zu retten, was indessen kurz nachher in umfassenderem

3) Borchardt's Journ. Bd. 71, pag. 353.

Masse Herrn Cantor in Halle a. d. S. gelang, der jenen Satz von der „Eindeutigkeit der trigonometrischen Entwickelung" nicht allein in seinem früheren Umfange wieder herstellte, sondern ihm eine Allgemeinheit gab, an die man vor den angeführten Ereignissen nicht gedacht hatte [4]).

5. Fortsetzung.

Herr Cantor führt seinen Beweis mit Hülfe zweier Riemann'scher Sätze, die sich auf die Beziehung der Reihe

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2},$$

die durch zweimalige Integration jedes Gliedes der Reihe $f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$ entsteht, zu dieser Reihe $f(x)$ beziehen [5]).

Der erste Satz besagt, dass so oft $f(x)$ endlich und bestimmt ist, der

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - a F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

gleich $f(x)$ ist, und der zweite, dass falls nur a_p und b_p für $p = \infty$ verschwinden, der Limes des Verhältnisses

$$\frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Null ist.

Den ersten Satz benutzt Herr Cantor um zu zeigen, dass die Differenz $\Phi(x)$ zweier Functionen $F(x)$, die denselben

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

ergeben, nur eine lineäre Function von x sein kann, woraus sich leicht die Identität der Coefficienten a_p und b_p in beiden Entwickelungen $F(x)$ ergiebt.

Den Beweis dafür, dass die Differenz der Functionen $F(x)$ lineär von x abhängt, oder dass aus

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$$

---

4) Borchardt's Journ. Bd. 72, pag. 130, 139 und Bd. 73, pag. 294; ferner Ann. v. Clebsch u. Neumann Bd. 4, pag. 139, Bd. 5, pag. 123.

5) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Art. 8.

folgt $\Phi(x) = c + c_1 x$, verdanken wir, wie er mittheilt, Herrn Schwarz, und es ist zu bemerken, dass dieser Beweis, wenn gleich er einen Gedanken eines früheren Beweises benützt, doch Neues enthält, und namentlich Ungenauigkeiten des früheren Beweises vermeidet.[6])

Der zweite Riemann'sche Satz dient nach einem von Herrn Heine ersonnenen Verfahren[7]) dazu, um zu zeigen, dass wenn die Differenz der Functionen $F(x)$ in zwei durch einen Divergenzpunkt der Reihe $f(x)$ getrennten Intervallen von x zwei linearen Functionen gleich ist, diese linearen Functionen dieselben sind.

6. Ueber den zweiten Hauptsatz. Der Verfasser kündigt an, dass er auch diesen wiederherzustellen vermag.

In Bezug auf den ersten Hauptsatz der Theorie der trigonometrischen Reihen können wir also die Untersuchung für geschlossen ansehen. Ueber den zweiten Satz, dass unter gewissen nothwendigen Bedingungen für $f(x)$ die Coefficienten die von Fourier entdeckte Form haben, scheint seit der Heine'schen Abhandlung, die übrigens auf diese Frage nicht eingeht, keine Veröffentlichung erfolgt zu sein, so dass hier noch nichts geklärt ist.

Es ist mir schon seit längerer Zeit bekannt, dass auch der zweite Satz sich wiederherstellen lässt, wenn man $f(x)$ der Bedingung unterwirft, stetig zu sein, ausgenommen in gesonderten Punkten.

Diese Bedingung für $f(x)$ ist aber viel einschränkender, als die der Integrirbarkeit schlechthin, welche genügt, damit die Fourier'schen Coefficienten nicht sinnlos seien. Und die Aufgabe, welche hier unsere mathematische Wissbegierde am meisten reizt, ist doch die, festzustellen ob die Coefficienten der Reihe $f(x)$ die Fourier'sche Form haben jedesmal, wenn $f(x)$ eine Integration zulässt, oder zu ermitteln, wo hier die Grenze liegt.

---

6) Cours de calcul differentiel et intégral par J. A. Serret, pag. 17. Eine Function, die aufhört Null zu sein, braucht deshalb nicht sogleich ins Wachsen oder Abnehmen zu gerathen, sondern sie kann, wie $x \sin. \frac{1}{x}$ bei $x = o$ mit unendlich kleinen Schwankungen anfangen.

7) Borchardt's Journ. Bd. 71, pag. 359.

Nun, ich glaube jetzt auch diese Aufgabe erledigen zu können, und zwar auf die allgemeinste Weise. Etwas tieferes Eingehen in die Natur der durch Reihen dargestellten integrirbaren Functionen und eine den veränderten Bedingungen angemessene Erweiterung des Apparats von Lehrsätzen, dessen Herr Cantor sich bedient hat, führen schliesslich verhältnissmässig leicht zum Ziele.

Ich muss meiner Analyse einige Bemerkungen über allgemeine Eigenschaften der hier auftretenden Functionen voranschicken.

II. Vorbereitende Betrachtungen allgemeiner Natur.

7. Werthevorrath und mittlerer Werth.

Alle Werthe, welche man aus einer Operation f(x) ziehen kann, sei es indem man entweder für x eine Zahl x_1 einsetzt und dann $f(x_1)$ berechnet, oder indem man für x eine Folge $x_1 + \varepsilon'$, $x_1 + \varepsilon''$, . . dem x_1 sich unbegrenzt nähernder Zahlen einführt, dazu die Werthe $f(x_1 + \varepsilon')$, $f(x_1 + \varepsilon'')$, . . . berechnet und nachsieht, welcher Grenze sie sich nähern: den Inbegriff aller solcher Werthe werde ich Werthevorrath von f(x) für den Punkt $x = x_1$ nennen. Unter Werthevorrath von f(x) für ein Intervall von x soll dann der Inbegriff der Werthevorräthe von f(x) für die einzelnen Punkte des Intervalls verstanden werden.

Mittlerer Werth eines Werthevorraths wird ein Werth genannt, von dem nichts weiter bekannt oder doch zu wissen nöthig ist, als dass er nicht grösser als der grösste und nicht kleiner als der kleinste Werth des Werthevorraths ist.

Die Functionen, mit denen wir es hier zu thun haben, sind Summen unendlicher Reihen, die zwar nicht durchweg convergent, aber — vor der Hand wenigstens — durchweg endlich sein müssen, woran sich einige für das Folgende nützliche Bemerkungen knüpfen.

8. Ueber divergente Reihen mit unbestimmter aber nicht unendlicher Summe.

Wenn eine Reihe

$$U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

für $n = \infty$ nicht unendlich wird, aber auch keiner bestimmten Grenze sich nähert, so schwankt U_n von unendlich grossen Werthen von n an bei fernerem Wachsthum von n zwischen zwei der Reihe eigenthümlichen festen Grössen hin und her, die ich schon früher[8]) unter dem Namen Unbestimmtheitsgrenzen besprochen habe. Nennen wir sie A und B, wo $B > A$, so kann U_n entweder erst im Unendlichen B erreichen, oder U_n kann im Endlichen unbegrenzt oft B erreichen und auch übersteigen. In Bezug auf A gilt Entsprechendes. Diese Grössen A und B sind einer völlig präcisen mathematischen Definition fähig, wobei es ausreicht B zu betrachten.

Zunächst muss es für jedes n eine kleinste Grösse B_n geben, die U_{n+m}, wenn m von o bis ∞ wächst, nicht mehr übersteigt, da sonst U_n entweder nur wachsend, oder bald zunehmend bald abnehmend über jede Grenze hinaus wachsen müsste, gegen die Voraussetzung, dass U_n nicht unendlich werden könne. Diese Grösse B_n nimmt bei wachsendem n nicht zu, weil sie die kleinste Grösse ist die U_n nicht mehr übersteigt. Wenn sie also nicht constant ist, so kann sie nur abnehmen, während n zunimmt. Dann muss sie sich aber, da sie auch nicht $-\infty$ werden darf, einer endlichen bestimmten Grenze nähern. Diese Grenze $\mathrm{Lim}_{n=\infty} B_n$ nennen wir B.

9. Fortsetzung.

Nachdem hierdurch die Existenz der festen Grössen A und B ausser Zweifel gesetzt ist, hebe ich folgende ihrer Eigenschaften hervor.

1. Entweder nimmt bei wachsendem n die Summe U_n unbegrenzt oft den Werth B an, oder dies findet für irgend

8) Antrittsprogramm, pag. 3.

ein n im Endlichen zum letztenmal statt, so dass von da ab stets $U_n < B$ und erst für $n = \infty$ $U_n = B$ wird.

Im ersteren Falle wird U_n entweder unbegrenzt oft B gerade erreichen und nie übersteigen, wenigstens von hinreichend grossem n an, oder U_n wird B unbegrenzt oft übersteigen. Dann muss aber, wie aus der Definition von B folgt, der bei solchem Uebersteigen eintretende positive Werth von $U_n - B$ mit $\frac{1}{n}$ verschwinden.

Im zweiten Falle, wo erst im Unendlichen U_n gleich B wird, nimmt aber U_n unbegrenzt oft Werthe an, die sich von B um Grössen unterscheiden, die mit $\frac{1}{n}$ Null werden. Dies lässt sich noch etwas schärfer ausdrücken: Wenn, unter N irgend eine hinreichend grosse Zahl verstanden, für $n \leqq N$ der kleinste Werth von $B - U_n$ mit δ bezeichnet wird, so wird für $n > N$ unbegrenzt oft $B - \delta < U_n < B$, da man sonst annehmen müsste, dass bei wachsendem n fortdauernd $U_n \leqq B - \delta$ bleibt, und für $n = \infty$ plötzlich um δ springt, was ungereimt wäre.

Kurzum es wird, wie oben bemerkt, von sehr grossen Werthen von n an $U_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n$ zwischen den Grössen A und B hin und her schwanken, und, falls $\mathrm{Lim}_{n=\infty} u_n = o$ ist, für unendliche Werthe von n nur um unendlich kleine Werthe zunehmen, also gleichsam stetig zwischen A und B sich hin- und herbewegen.

Weiter folgern wir noch:

2. Man nennt die Reihe $U = u_1 + u_2 + \ldots = \mathrm{Lim}_{n=\infty} U_n$ convergent, wenn $A = B$. Falls nicht $A = B$, so kann man dem Limes von U_n die Form:

$$\mathrm{Lim}\, U_n = \Sigma + j\Delta$$

ertheilen, wo $\Sigma = \frac{A+B}{2}$, $\Delta = \frac{B-A}{2}$ und j eine zwischen den Grenzen -1 und $+1$ (beide incl.) völlig willkürliche Grösse vorstellt.

3. Denken wir uns die Summen U_n und U_N gebildet, und n sowohl wie $N > n$ so gross, dass diese Summen bis auf einen unendlich kleinen Fehler sich auf die Form $\Sigma + j\Delta$ bringen lassen. Alsdann hat man:

$$U_N - U_n = (j_N - j_n)\,\Delta = j\,(B - A)$$

wo j zwischen -1 und $+1$. Bezeichnen wir also mit r_n den

Rest $u_n + u_{n+1} + \ldots u_N$, wo N unermesslich viel grösser als n gedacht ist, so ist $j(B - A)$ sein mathematischer Ausdruck.

4. Es giebt bei jeder Reihe mit unbestimmter aber unendlicher Summe und im Unendlichen verschwindendem Gliede stets erstens zwei Klassen von ganzen Zahlen N_A und N_B von der Eigenschaft dass:

$$\operatorname{Lim} \sum_1^{N_A} u_p = A\ , \operatorname{Lim} \sum_1^{N_B} u_p = B,$$

zweitens, unter C irgend einen Werth zwischen A und B verstanden, auch stets eine Zahlenklasse N_C der Art, dass:

$$\operatorname{Lim} \sum_1^{N_C} u_p = C$$

Wir werden namentlich von den Sätzen 2 und 3 Gebrauch machen.

10. Form der durch Reihen dargestellten Functionen.

Da nun nach Satz 2 des vorigen Artikels die Summe der Reihe aus den Unbestimmtheitsgrenzen A und B zusammengesetzt ist, so sind diese, wenn das Glied der Reihe von x abhängt, ebenfalls Functionen von x, die wir mit $U(x)$, $O(x)$ bezeichnen wollen. Bezeichnen wir noch die Summe der Reihe mit $f(x)$, so ist dann:

$$f(x) = \frac{U(x) + O(x)}{2} + j\,\frac{O(x) - U(x)}{2} = \varphi(x) + j\,\psi(x),$$

wo j irgend eine zwischen -1 und $+1$ enthaltene Zahl vorstellt, und dies ist die im Folgenden zu Grunde zu legende Form einer Function. Auf $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind dann die Begriffe Werthevorrath, und mittlerer Werth eines solchen, wie sie im Art. 7 aufgestellt wurden, ohne Weiteres zu übertragen.

Dies vorangeschickt, müssen wir uns zunächst darüber klar werden, was aus der vorausgesetzten Integrirbarkeit für Functionen der Form $f(x) = \varphi(x) + j\,\psi(x)$ folgt.

II. Ueber die Bedingung der Integrirbarkeit der durch Reihen dargestellten Functionen.

Eine Function ist im Intervall $a \leqq x \leqq b$ integrirbar, d. h. die Summe $(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$, wo $a < x_1 < x_2 < \ldots < b$, nähert sich für $n = \infty$ einer einzigen endlichen Grenze, wenn für $n = \infty$ zugleich mit den sämmtlichen Differenzen $\delta_p = x_p - x_{p-1}$ (deren Summe $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n = b - a$ sei) die Summe:

$$\delta_1 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 + \ldots \delta_n \sigma_n$$

verschwindet, unter σ_p die grösste (positiv genommene) Werthdifferenz innerhalb des Werthevorraths von $f(x)$ für das Intervall $a + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1} \leqq x \leqq a + \delta_1 + \ldots \delta_p$ verstanden.[9]) Nun sei die integrirbare Function $f(x)$ von der Form $\varphi(x) + j\,\psi(x)$, wo $\psi(x)$ positiv und j eine zwischen -1 und $+1$ willkürliche Grösse vorstellt, so behaupte ich, dass, durch $\psi(x_p)$ den grössten Werth von $\psi(x)$ im Intervall $a + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1} \leqq x \leqq a + \delta_1 + \ldots \delta_p$ bezeichnet, die Summe

$$\delta_1 \psi(x_1) + \delta_2 \psi(x_2) + \ldots \delta_n \psi(x_n)$$

bei Abnahme der δ die Null zur Grenze hat.

In der That, es muss jedenfalls verschwinden:

$$\operatorname{Lim} \Sigma \delta_p \Big\{ \varphi(x_p) + j_1 \psi(x_p) - [\varphi(x_p) + j_2 \psi(x_p)] \Big\} = \operatorname{Lim} \Sigma \delta_p (j_1 - j_2) \psi(x_p)$$

wo j_1, j_2 beliebige dem Intervall $-1 \ldots +1$ angehörige Grössen vorstellen. Denn die Differenz in der Klammer $\{\}$ ist eine Differenz von Werthen der Function $f(x)$ im Intervall $(a + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1}) \ldots (a + \delta_1 + \delta_p)$. Setzt man daher $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = -\frac{1}{2}$, so folgt die Richtigkeit des Behaupteten.

---

9) Es bedarf dies des Beweises, den ich in einem Aufsatz: Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen etc. Borchardt's Journal, Bd. 79, p. 23 liefere.

In der Bedingung des Textes können, ohne dass sie an Allgemeinheit einbüsst, die Intervalle $\delta_1, \ldots$ einander gleich angenommen werden. Diese und andere Veränderungen des Wortlauts der Bedingung der Integrirbarkeit umfasst ein Satz, den ich als Nachtrag zum eben erwähnten Aufsatz in demselben Bande des Borchardt'schen Journals p. 259 unter dem Titel: „Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Funktionen" veröffentliche.

Es mag späterer Anwendung wegen noch folgende Bemerkung hier Platz finden. Bilden wir die Summe:

$$\sum_{p=1}^{p=m} \delta_p \, \sigma(x + \delta_1 + \delta_p),$$

wo $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_m = a$, und $\sigma(x + \delta_1 + \ldots \delta_p)$ die grösste Werthdifferenz von $f(x)$ im Interѧall $(x + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1}) \ldots (x + \delta_1 + \ldots \delta_p)$ bedeutet, und nehmen $f(x)$ im Intervall $A \ldots B$ integrirbar an, wo $B - A > a$, so giebt es stets eine solche Grösse δ' des grössten unter den δ, dass die vorstehende Summe für jeden Werth von x des Intervalls $A \ldots B - a$ kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse ist. Der Beweis dafür ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass vorstehende Summe stets als ein Theil der Summe $\delta_1 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 + \ldots \delta_n \sigma_n$ angesehen werden kann, wo $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n = B - A$.

12. Ueber partielle Integration.

Es sei $\varphi(x)$ stetig und der Differenzialquotient $\varphi'(x)$ sei integrirbar, ferner sei $f(x)$ integrirbar, so soll gezeigt werden, dass:

$$\int_a^b d\,\alpha\, \varphi(\alpha)\, f(\alpha) = \varphi(b) \int_a^b d\,\alpha\, f(\alpha) - \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\,\beta\, f(\beta).$$

Diese Formel gilt zunächst falls $\varphi(x)$ stetig ist, und auch $\varphi'(x)$ und $f(x)$ bis auf eine endliche Anzahl sprungweiser Werthänderungen stetig sind. (Jede sprungweise Werthänderung von $\varphi(x)$, z. B. für $x = c$, fügt an der rechten Seite ein Glied:

$$-\{\varphi(c + o) - \varphi(c - o)\} \int_a^c d\,\alpha\, f(\alpha)$$

hinzu).

Nehmen wir nun von $\varphi'(x)$ und $f(x)$ lediglich die Integrirbarkeit an. Ein einfaches Verfahren Sätze der Integralrechnung, die für Functionen mit einer endlichen Anzahl von Sprüngen gelten, auszudehnen auf Functionen, von denen nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt ist, lautet, auf vorliegenden Fall angewandt, so: Wir zerlegen das Interwall $b - a$ in die Theile $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, bezeichnen mit $f_1(x)$ eine Function, die inner-

halb eines jeden Intervalls Δ_p constant und gleich dem kleinsten Werthe von f(x) in diesem Intervall ist, und setzen $f(x) = f_1(x) + \Delta f(x)$. Alsdann ist $\Delta f(x)$ positiv und ausserdem ist

$$\mathrm{Lim}_{n=\infty} \int_a^b \Delta f(x)\, dx = o.$$

Denn zerlegt man das Integral in die Theile von a bis $a + \Delta_1$, $a + \Delta_1$ bis $a + \Delta_1 + \Delta_2$, ... so kann man es schreiben:

$$\Delta_1 \,.\, \Delta f(x_1) + \Delta_2 \,.\, \Delta f(x_2) + \ldots$$

wo z. B. $\Delta f(x_1)$ nicht grösser als die grösste Werthdifferenz der Function f im Intervall Δ_1 ist.

Nun ist, weil $f_1(x)$ nur eine endliche Anzahl Sprünge erfährt:

$$\int_a^b d\,\alpha\, \varphi(\alpha)\, f_1(\alpha) - \varphi(b) \int_a^b d\,\alpha\, f_1(\alpha) + \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\,\beta\, f_1(\beta) = o$$

ausserdem verschwindet die Grösse:

$$\int_a^b d\,\alpha\, \varphi(\alpha)\, \Delta f(\alpha) - \varphi(b) \int_a^b d\,\alpha\, \Delta f(\alpha) + \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\,\beta\, \Delta f(\beta)$$

wenn n unendlich wird, was vom letzten Glied am schnellsten mit dem zweiten Mittelwerthsatz nachgewiesen wird, da $\int_a^\alpha d\,\beta\, \Delta f(\beta)$, weil $\Delta f(\beta)$ positiv ist, mit α wächst. Addirt man nun die vorstehenden Aggregate, so etc.

Um zu zeigen, dass auch $\varphi'(x)$ nur integrirbar zu sein braucht, setze man $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(\alpha)\, d\,\alpha$,[10]) worauf man $\varphi'(x) = \varphi'_1(x) + \Delta \varphi'(x)$ macht, und wie vorher verfährt.

Weiter werde f(x) für $x = c$ $(a \leqq c \leqq b)$ unendlich, doch so, dass

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \int^{c-\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha) \text{ und } \mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \int_{c+\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha)$$

---

10) Auch wenn, wie hier $\varphi(x)$ stetig vorausgesetzt wird, so bedarf diese Formel des Beweises, der im Anhang zu dieser Abhandlung nachgeliefert wird.

endliche und bestimmte Grössen seien. Alsdann führen wir in der zu beweisenden Formel statt f(x) eine Function $f_1(x)$ ein, die, übrigens gleich f(x), nur im Intervall $c - \varepsilon \ldots c + \varepsilon_1$, gleich Null sei. Für diese ist dann wieder:

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi(\alpha)\,f_1(\alpha) - \varphi(b)\int_a^b d\,\alpha\,f_1(\alpha) + \int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta) = 0.$$

Lässt man hierin ε und ε_1 gleich Null werden, so wird aus den beiden ersten Integralen, das was man mit

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi(\alpha)\,f(\alpha)\,,\ \int_a^b d\,\alpha\,f(\alpha)$$

zu bezeichnen pflegt.

Das dritte Integral: $\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\,\varepsilon_1 = 0}\int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta)$ bedarf aber einer näheren Betrachtung, weil man feststellen muss, ob man die Integration nach β über den Unendlichkeitspunkt c hinweg vollziehen darf, bevor man nach α integrirt, d. h. ob es mit

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\,\varepsilon_1 = 0}\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta)$$

identisch ist. Wir müssen uns zunächst darüber klar werden, was dieser letztere Ausdruck bedeutet. Wir schreiben:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\,\varepsilon_1 = 0}\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta) = \int_a^\alpha d\,\beta\,f(\beta) = \lambda(\alpha)$$

$$\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta) = \lambda_1(\alpha).$$

Was die Grösse $\lambda(\alpha)$ betrifft, so ist ihre Bedeutung klar für $\alpha < c$. Für $\alpha = c$ ist

$$\lambda(c) = \mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0}\int_a^{c-\varepsilon} d\,\beta\,f(\beta)$$

und für $\alpha > c$ hat man vor dem Grenzübergang $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ immer $c + \varepsilon_1 < \alpha$ anzunehmen, für $\alpha > c$ ist dann:

$$\lambda(\alpha) = \text{Lim}_{\varepsilon = 0} \int_a^{c-\varepsilon} d\beta\, f(\beta) + \text{Lim}_{\varepsilon_1 = 0} \int_{c+\varepsilon_1}^{\alpha} d\beta\, f(\beta).$$

Es soll also festgestellt werden, dass

$$\text{Lim}_{\varepsilon = 0, \varepsilon_1 = 0} \int_a^b d\alpha\, \varphi'(\alpha)\, \lambda_1(\alpha) = \int_a^b d\alpha\, \varphi'(\alpha)\, \lambda(\alpha),$$

oder dass: $\text{Lim}_{\varepsilon = 0, \varepsilon_1 = 0} \int_a^b d\alpha\, \varphi'(\alpha) \left\{ \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) \right\} = 0.$ Man hat:

für $a \leqq \alpha \leqq c - \varepsilon : \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) = 0$

für $c - \varepsilon < \alpha < c + \varepsilon_1 : \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) = -\int_{c-\varepsilon}^{\alpha} d\beta\, f(\beta)$

für $c + \varepsilon_1 \leqq \alpha \overline{\overline{<}} b : \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) = -\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\beta\, f(\beta)$

Die Integrale rechts sind entsprechend wie vorher das Integral $\lambda(\alpha)$ zu definiren, so dass z. B. mit $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\beta\, f(\beta)$ gemeint ist:

$\text{Lim}_{\mu = 0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\mu} d\beta\, f(\beta) + \text{Lim}_{\mu_1 = 0} \int_{c+\mu_1}^{c+\varepsilon_1} d\beta\, f(\beta).$ Somit ist also:

$$-\int_a^b d\alpha\, \varphi'(\alpha) \left\{ \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) \right\} = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_{c-\varepsilon}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) + \int_{c+\varepsilon_1}^{b} d\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\beta\, f(\beta).$$

Lässt man hierin ε und ε_1 Null werden, so verschwindet zunächst das zweite Glied rechts. Damit das erste Glied (dem man, da nichts über die Vorzeichen der Functionen unter dem Integralzeichen vorausgesetzt ist, behufs der Bestimmung seines Limes nur die Form:

$$(\varepsilon + \varepsilon_1)\, \varphi'(\alpha_1) \int_{c-\varepsilon}^{\alpha_1} d\beta\, f(\beta), \quad c - \varepsilon \leqq \alpha_1 \leqq c + \varepsilon_1,$$

ertheilen kann) verschwinde, ist erforderlich, dass $\varphi'(\alpha)$ nicht gerade für $a = c$ unendlich wird — denn sonst darf unter Voraussetzung der Stetigkeit von

$\varphi'(\alpha)$ ebenfalls unendlich werden, und zwar so, dass das Integral, in dem diese Function auftritt, convergent ist. Es folgt also: Falls f(x) und $\varphi'(x)$ nicht in denselben Punkten und nur so unendlich werden, dass die Integrale convergent sind, und übrigens diese Functionen die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllen, während $\varphi(x)$ stetig sein muss, so hat man:

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi(\alpha)\,f(\alpha) = \varphi(b)\int_a^b d\,\alpha\,f(\alpha) - \int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\,\beta\,f(\beta)$$

die Grösse $\int_a^\alpha d\,\beta\,f(\beta) = \lambda(\alpha)$ im obigen Sinne genommen.

13. Ausdehnung eines Riemann'schen Satzes.

Dies sind die Bemerkungen allgemeiner Natur, welche ich der eigentlichen Untersuchung voranschicken wollte, um den Resultaten ihre umfassendste Gültigkeit zu sichern.

Als Ergänzung zu den vorstehenden Betrachtungen wollen wir untersuchen, was aus dem ersten im Art. 5 angeführten Riemann'schen Satze wird, wenn wir die Reihe $f(x) = \sum_0^\infty (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$ unbestimmt mit den Grenzen U(x) und O(x) annehmen. Wir setzen also

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2}, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

schreiben der Kürze halber:

$$\varDelta^2 F = F(x+2\varepsilon) - 2F(x) + F(x-2\varepsilon)$$

$$A_p = a_p \cos. px + b_p \sin. px$$

$$\frac{\varDelta^2 F}{\varepsilon^2} = \sum_0^\infty A_p \left(\frac{\sin. p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2$$

und wollen den $\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \dfrac{\varDelta^2 F}{4\varepsilon^2}$ bestimmen.

Zu diesem Zweck verstehen wir unter N eine äusserst grosse Zahl, setzen noch

$$r_p = \sum_{q=p}^{q=N} A_q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

und bilden:

$$\sum_0^N A_p \left(\frac{\sin.\ p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2 = \sum_0^N A_p - \sum_1^N r_p \left\{\left(\frac{\sin.\ (p-1)\varepsilon}{(p-1)\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin.\ p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2\right\} \quad . \quad 3)$$

Die zweite Summe rechts zerlegen wir in die Theile:

$$\sum_1^N = \sum_1^m + \sum_{m+1}^n + \sum_{n+1}^N, \quad m < n < N, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

wo m beliebig gross, n die grösste unter $\frac{\pi}{\varepsilon}$ liegende ganze Zahl, und N viel grösser als n sei.

Zunächst können wir schreiben:

$$\sum_{m+1}^n = [r_p]_{m+1}^n \left\{\left(\frac{\sin.\ m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin.\ n\varepsilon}{n\varepsilon}\right)^2\right\},$$

da die Differenz $\left(\frac{\sin.\ (p-1)\varepsilon}{(p-1)\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin.\ p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2$ positiv ist, indem $\frac{\sin.\ u}{u}$ von $u = o$ bis $u = \pi$ abnimmt. Der Factor von $[r_p]_{m+1}^n$ ist kleiner als 1, und $[r_p]_{m+1}^n$ selbst ist ein mittlerer Werth aus den Grössen $r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots r_n$.

Weiter haben wir:

$$\sum_{n+1}^N = \sum_{n+1}^N \left\{ r_p\ (\sin.\ (p-1)\varepsilon)^2 \left(\frac{1}{(p-1)^2\varepsilon^2} - \frac{1}{p^2\varepsilon^2}\right) - r_p \frac{\sin.\ (2p-1)\varepsilon\ \sin.\ \varepsilon}{(p\varepsilon)^2} \right\}$$

$$= \Big[r_p(\sin.\ (p-1)\varepsilon)^2\Big]_{n+1}^N \left(\frac{1}{(\varepsilon n)^2} - \frac{1}{(\varepsilon N)^2}\right) - \Big[r_p \sin.\ (2p-1)\varepsilon \frac{\sin.\ \varepsilon}{\varepsilon}\Big]_{n+1}^N \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n+1}^N \frac{1}{p^2}$$

worin die eckigen Klammern mittlere Werthe wie oben $[r_p]_{m+1}^n$ bedeuten.

Nun gehen wir zur Grenze über, indem wir ε unendlich klein, m, n und N unendlich gross werden lassen, aber so, dass $m\,\varepsilon$ Null wird, und N unendlich viel grösser als n wird. Der numerisch grösste Werth,

den r_p von unendlich grossen Werthen von p und N an annehmen kann, ist $O(x) - U(x)$, (Art. 9, Satz 3). Die mittleren Werthe $\left[r_p\right]_{m+1}^{n}$, $\left[r_p(\sin.(p-1)\varepsilon)^2\right]_{n+1}^{N}$, $\left[r_p \sin.(2p-1)\varepsilon \cdot \frac{\sin.\varepsilon}{\varepsilon}\right]_{n+1}^{N}$ werden also numerisch nicht grösser als $O(x) - U(x)$ sein können.

Hieraus geht hervor, dass erstens

$$\text{Lim} \sum_{m+1}^{n} = j \left\{O(x) - U(x)\right\}$$

ist, wo j zwischen -1 und $+1$ liegt.

Untersuchen wir zweitens $\text{Lim} \sum\limits_{n+1}^{N}$. Falls n und N so unendlich werden, dass $\frac{n}{N}$ verschwindet, so convergirt $\frac{1}{(\varepsilon n)^2} - \frac{1}{(\varepsilon N)^2}$ gegen $\frac{1}{\pi^2}$, $\frac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{n+1}^{N}\frac{1}{p^2}$ gegen $\frac{1}{\pi}$, und $\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)(O(x) - U(x))$ ist der numerisch grösste Werth, den man sich unter $\text{Lim} \sum\limits_{n+1}^{N}$ denken kann. Endlich die erste Summe in 4 hat zur Grenze Null, während die erste Summe rechts in 3 nach Art. 10 geschrieben werden kann:

$$\frac{O(x) + U(x)}{2} + j\,\frac{O(x) - U(x)}{2},$$

j zwischen -1 und $+1$. Es folgt also im Ganzen:

$$\text{Lim} \sum_{0}^{N} A_p \left(\frac{\sin.\, p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2 = \frac{O(x) + U(x)}{2} + j'\,\frac{O(x) - U(x)}{2}$$

wo $j' = j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)$ ist, und j wieder zwischen -1 und $+1$, oder wir haben den Satz:

Wenn die Reihe:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_p \cos.\, px + b_p \sin.\, px$$

zwar nicht convergirt aber auch nicht über alle Grenzen wächst, und man bezeichnet mit O(x) und U(x) die Grenzen

zwischen denen ihre Summe schwankt, so ist der Limes $\varepsilon = o$ der Grösse

$$\frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

wo
$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} + \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2},$$

stets enthalten in der Form:

$$\frac{O(x) + U(x)}{2} + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\left[O(x) - U(x)\right],$$

falls j eine zwischen -1 und $+1$ gelegene Zahl vorstellt.

Nun endlich können wir den eigentlichen Gegenstand dieser Mittheilung in Angriff nehmen.

III. Der eigentliche Beweis dafür, dass die Coefficienten der trigonometrischen Entwickelung die Fourier'sche Form haben.

14. Besonderer Fall, wo die Entwickelung eine stetige Function darstellt. Darstellung der Riemann'schen Function F(x).

Unsere Analyse besteht darin, dass wir in

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2}$$

F(x) durch

$$f(x) = a_0 + \sum_1^\infty (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

auszudrücken suchen, und alsdann durch Integration vorstehender Gleichung für F(x), in der die Reihe gleichmässig convergirt, die Coefficienten a und b und etwaige andere unbekannte Grössen bestimmen.

Wir wollen diese Untersuchung zuerst durchführen unter der Annahme, dass f(x) eine zwischen den Grenzen $-\pi, +\pi$ stetige Function von x ist.

Alsdann ist, wie man den zweiten Differentialquotienten auch auffassen möge [11]):

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) = f(x)$$

für alle Werthe von x des Intervalls $-\pi < x < +\pi$. Setzt man jetzt

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta)$$

so folgt
$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Durch den im Art. 5 erwähnten Beweis des Herrn Schwarz, dessen Gang wir in einem der folgenden Art. zu reproduciren haben werden, ergiebt sich aus vorstehender Gleichung:

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x,$$

und zwar wegen der Stetigkeit von $\Phi(x)$ für $-\pi \leqq x \leqq +\pi$, so dass wir statt $F(x)$ setzen dürfen:

$$\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) + c_0 + c_1 x.$$

---

11) Seine allgemeinste an die Form (Ann. v. Clebsch u. Neumann, Bd. VII, pag. 245):

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0,\ \varepsilon_1=0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon+\varepsilon_1}$$

des ersten Differentialquotienten sich anschliessende Auffassung ist der Limes für $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0, \eta = 0, \eta_1 = 0$ von

$$\frac{F(x+\varepsilon+\varepsilon_1) - F(x+\varepsilon-\eta_1) - F(x+\varepsilon_1-\eta) + F(x+\eta-\eta_1)}{(\varepsilon+\eta)(\varepsilon_1+\eta_1)}$$

Setzt man $\int^{x} d\alpha \int^{\alpha} d\beta\, f(\beta)$ statt F, so wird dieser Quotient:

$$\frac{1}{(\varepsilon+\eta)(\varepsilon_1+\eta_1)}\int_{x-\eta_1}^{x+\varepsilon_1} d\alpha \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\varepsilon} d\beta\, f(\beta).$$

15. Besonderer Fall etc. Darstellung der Coefficienten der trigonometrischen Reihe durch Integrale.

Wenn wir die Gleichung für F(x) Eingangs des vor. Art. mit cos. n x, sin. n x, 1 multipliciren und zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ integriren, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos. n\alpha\, d\alpha &= (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} a_0 - \frac{a_n}{n^2}\pi \\ \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \sin. n\alpha\, d\alpha &= \qquad\qquad - \frac{b_n}{n^2}\pi \\ \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\alpha &= \frac{\pi^3}{3} a_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1.$$

Hierin nun $F_1(x) + c_0 + c_1 x$, wo $F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta)$ gesetzt ist, statt F(x) eingeführt, findet man:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha) \cos. n\alpha\, d\alpha &= (-1)^n \frac{2\pi a_0}{n^2} - \frac{a_n}{n^2}\pi \\ \int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha) \sin. n\alpha\, d\alpha + (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n} c_1 &= - \frac{b_n}{n^2}\pi \\ \int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha)\, d\alpha + 2\pi c_0 &= \frac{\pi^3}{3} a_0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 2.$$

Nun ist wegen

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\,\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \int_{-\pi}^{x} (x - \alpha)\, f(\alpha)\, d\,\alpha$$

und dann wegen der allgemeinen Umformung:

$$\int_{a}^{b} d\,u \int_{a}^{u} d\,v\, \varphi(u, v) = \int_{a}^{b} d\,u \int_{u}^{b} d\,v\, \varphi(v, u)$$

zunächst überhaupt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha)\, \psi(\alpha)\, d\,\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \int_{\alpha} d\,\beta\, (\beta - a)\, \psi(\beta).$$

Hierin hat man statt $\psi(x)$ nach einander cos. n x, sin. n x, 1 zu setzen, um die Integrale in den Gleichungen 2 dieses Art. zu reduciren. So erhält man, wenn man die Nenner n und n^2 wegmultiplicirt:

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^n \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) - \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos.\, n\,\alpha = (-1)^n .\ 2\pi\, a_0 - \pi\, a_n \\
&- \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin.\, n\, a + n\,.\, c_1 (-1)^{n+1} .\, 2\pi + n\,(-1)^n \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\, (\alpha - \pi) = -\pi\, b_n \\
&\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\, (\pi - \alpha)^2 + 2\pi\, c_0 = \frac{\pi^3}{3}\, a_0.
\end{aligned}\right\}\ 3.$$

Lassen wir jetzt in der ersten und zweiten Gleichung 3. n unendlich werden, so folgen aus diesen Gleichungen die Werthe von a_0 und c_1, weil a_n und b_n verschwinden[12] und auch die Integrale

12) Da die Reihe f(x) convergirt, so verschwindet für $p = \infty$ ihr Glied a_p cos. p x + b_p sin. p x, woraus man mit Herrn Cantor schliesst, dass a_p und b_p für sich verschwinden, was man

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin.\, n\,\alpha\,, \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos.\, n\,\alpha$$

für $n = \infty$ Null werden, sobald nur $f(\alpha)$ integrirbar ist.[13]) Somit sind alle Grössen c_0, c_1, a_0, a_n, b_n völlig bestimmt und man findet:

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \left\{ \frac{\pi^2}{3} - (\pi - \alpha)^2 \right\} \\
c_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\, (\pi - \alpha) \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos.\, n\,\alpha \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin.\, n\,\alpha
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

---

auch so beweisen kann. Man setzt $x + h$ statt x, und da also auch $\cos.\, p\,h\, (a_p \cos.\, px + b_p \sin.\, px) + \sin.\, p\,h\, (a_p \sin.\, px - b_p \cos.\, px)$ verschwinden muss, so muss $a_p \cos.\, px + b_p \sin.\, x$ und $a_p \sin.\, px - b_p \cos.\, px$ einzeln verschwinden, oder auch die Summe dieser Grössen, die erste mit $\cos.\, px$, die zweite mit $\sin.\, px$ multiplicirt. Diese Summe ist aber a_p. Es giebt noch einen anderen unstrengen Beweis für den nämlichen Satz, der aber lehrt von welchem allgemeineren Satze er ein besonderer Fall ist. Erhebt man $A_n = a_n \cos.\, nx + b_n \sin.\, nx$ auf's Quadrat und integrirt nach x zwischen den Grenzen x_0 und x_1, so folgt:

$$\int_{x_0}^{x_1} A_n^2\, dx = \frac{x_1 - x_0}{2}\, (a_n^2 + b_n^2) + \frac{1}{n}\, B_n\,, \text{ wo } B_n = \frac{a_n^2 - b_n^2}{4}\, (\sin.\, 2n\,x_1 - \sin.\, 2n\,x_0) - a_n b_n (\cos.\, 2n\,x - \cos.\, 2n\,x_0).$$

Für $n = \infty$ nähert sich daher $a_n^2 + b_n^2$ der Grenze:

Es wäre ein Leichtes die Bedingungen für f(x) dadurch zu erweitern, dass man dieser Function beliebig viele, ja sich nach Puncten zu unendlich verdichtende Stetigkeitsunterbrechungen gestattete. Allein wir wollen uns damit nicht aufhalten, sondern gleich die viel allgemeinere Annahme eintreten lassen, dass f(x) nur integrirbar zu sein braucht.

16. Der allgemeine Fall. Vorbemerkung.

Es sei also nunmehr erstens

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + (a_2 \cos. 2x + b_2 \sin. 2x) + \dots$$

eine integrirbare Function und zweitens mögen für $n = \infty$ a_n und b_n verschwinden.

Vielleicht folgt dies übrigens schon aus der ersten Voraussetzung der Integrirbarkeit von f(x). Diese verlangt jedenfalls (wie leicht zu zeigen), dass in jedem kleinsten Intervall die Reihe einmal convergire.

Es handelt sich wieder um die Differenz

$$\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$$

der Functionen:

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2}$$

$$F_1(x) = \int^x d\alpha \int^\alpha d\beta\, f(\beta).$$

$$\text{Lim} \frac{2}{x_1 - x_0} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} A_n^2 \, dx - \frac{1}{n} B_n \right\} = 0.$$

Auf die nämliche Weise würde man beweisen, dass, wenn das Aggregat:

$$\varphi_1(\alpha_1) \cos. \alpha_1 x + \varphi_2(\alpha_2) \cos. \alpha_2 x + \dots$$
$$+ \psi_1(\beta_1) \sin. \beta_1 x + \psi_2(\beta_2) \sin. \beta_2 x + \dots$$

verschwindet, während die Grössen α, β und die sämmtlichen Differenzen $\alpha_p - \alpha_q$, $\beta_p - \beta_q$ unendlich werden, die Functionen φ und ψ es sind, durch deren Verschwinden das Aggregat Null wird.

13) Riemann über die Darstellbarkeit etc. Art. 10. Auch lässt sich das Verschwinden dieser Integrale als besonderer Fall eines sehr allgemeinen Satzes auffassen. (Ueber den Gültigkeitsbereich etc., Borch. Journ. Bd. 79, pag. 41.)

Würde die Grenze des Verhältnisses:

$$\frac{\Delta^2 \Phi}{\varepsilon^2} = \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

wie im Art. 14, Null sein, so wäre die Aufgabe damit gelöst, indem man ganz wie dort weiter schlösse. Allein man sieht ohne Weiteres, dass die Grenze nicht allgemein Null sein kann, wenigstens dass dies nicht allgemein sich nachweisen lässt. Wir müssen demnach über diese Grenze Einiges feststellen, um weiter vordringen zu können, und werden dann von der Fundamentaleigenschaft der integrirbaren Functionen eine Anwendung machen, die als Sitz der Kraft des hier vorzutragenden Beweises angesehen werden kann. Das Resultat wird schliesslich allerdings wie im obigen speciellen Falle sein, dass die Differenz $F(x) - F_1(x)$ eine lineäre Function von x ist.

17. Der Lim $\frac{\Delta^2 (F(x) - F_1(x))}{\varepsilon^2}$.

Bezeichnet man mit $O(x)$ und $U(x)$ die Unbestimmtheitsgrenzen von $f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$ so ist $f(x) = \varphi(x) + j\,\psi(x)$, $\varphi(x) = \frac{O(x) + U(x)}{2}$, $\psi(x) = \frac{O(x) - U(x)}{2}$, (Art. 10). Es seien mit den Functionszeichen f, φ, ψ die diesen Functionen entsprechenden Werthevorräthe im Sinne des Art. 7 für den jedesmaligen Werth von x gemeint; und wenn diese Functionen für irgend einen numerischen Werth von x direct berechnet gedacht sind, so will ich sie mit $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ bezeichnen. Alsdann hat man (Art. 13):

$$\text{Lim} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = \varphi_1(x) + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\psi_1(x).$$

Weiter hat man

$$\Delta^2 F_1(x) = \int_x^{x+\varepsilon} d\,\alpha \int^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) - \int_{x-\varepsilon}^{x} d\,\alpha \int^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \int_x^{x+\varepsilon} d\,\alpha \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta).$$

Das Integral rechter Hand können wir zunächst schreiben:

$$\int_x^{x+\varepsilon} d\,\alpha\,.\,\varepsilon\, f(\alpha_1),$$

wo $f(\alpha_1)$ ein mittlerer Werth des Werthevorraths von $f(\beta)$ im Intervall $\alpha - \varepsilon \leqq \beta \leqq \alpha$. Ferner ist

$$\varepsilon \int_x^{x+\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha_1) = \varepsilon^2 f(\alpha_2),$$

wo $f(\alpha_2)$ ein mittlerer Werth sämmtlicher Werthe $f(\alpha_1)$ wenn in der Begrenzung des Intervalls $\alpha - \varepsilon \leqq \beta \leqq \alpha$ das α alle Werthe von $x - \varepsilon$ bis x annehmen kann.

Also ist $f(\alpha_2)$ schliesslich ein mittlerer Werth des Werthevorraths $f(\beta)$ im Intervall

$$x - \varepsilon \leqq \beta \leqq x + \varepsilon,$$

und reducirt sich für $\varepsilon = o$ auf einen mittleren Werth des Werthevorraths $f(\beta)$ für $\beta = x$.

Wir können also schreiben:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = \varphi^*(x) + j\,\psi^*(x)$$

unter $\varphi^*(x)$ und $\psi^*(x)$ mittlere Werthe der Werthevorräthe $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den betrachteten Punkt x verstanden. Demnach wird zuerst:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = \varphi_1(x) + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\psi_1(x) - \varphi^*(x) - j\,\psi^*(x).$$

Da wir nicht alle Bestandtheile dieses Limes einzeln brauchen, so wollen wir ihn in eine für unsere Zwecke genügende kürzere Form zusammenfassen.

Es sei $\varDelta\,\varphi(x)$ die grösste (positiv genommene) Werthdifferenz, welche innerhalb des Werthevorraths $\varphi(x)$ für den betrachteten Punkt x möglich ist, und es sei $\Psi(x)$ der grösste Werth, welcher im Werthevorrath $\psi(x) = \frac{O(x) - U(x)}{2}$ vorkommt; alsdann ist:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 \Phi}{\varepsilon^2} = \varDelta^*\varphi(x) + j\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\Psi(x)$$

wo $\varDelta^*\varphi(x)$ numerisch nicht grösser als $\varDelta\,\varphi(x)$ ist, und j zwischen -1 und $+1$ liegt. Der numerisch grösste Werth, den somit $\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 \Phi}{\varepsilon^2}$ erreichen könnte, ist:

$$\Delta\,\varphi(x) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\Psi(x) = \nu$$

und es kann ε immer so verkleinert werden, dass $\frac{\Delta^2\,\Phi}{\varepsilon^2}$ numerisch nicht grösser als $\nu + \nu'$ ist, unter ν' eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit verstanden.

18. Kurze Skizze des weiteren Weges.

Der am Schluss des vorigen Artikels für den Limes von $\frac{\Delta^2\,\Phi(x)}{\varepsilon^2}$ gefundene Ausdruck zeichnet uns den Weg deutlich vor, den wir nunmehr zu verfolgen haben. Es verschwindet nämlich allerdings nicht dieser Limes, aber (wie ich sogleich ausführlicher entwickeln werde) es verschwindet wegen der Bedingung der Integrirbarkeit der Limes von:

$$\sum_{p=1}^{p=n} (x_p - x_{p-1}) \frac{\Delta^2\,\Phi(x_p)}{\varepsilon^2}$$

falls die Differenzen $x_p - x_{p-1}$ unendlich klein sind, während x_0 und $x_n - x_0$ endlich bleiben. Es liegt nahe, hieraus zu schliessen, dass

$$\frac{\Delta^2 \int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\,\alpha}{\varepsilon^2}$$

die Null zur Grenze hat, und ist dies richtig, so findet man schliesslich $\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\,\alpha = c_0 + c_1 x$, ein Resultat, durch welches ersichtlich das Problem so gut wie gelöst ist. Diesen Gedankengang wollen wir jetzt genauer ausführen.

19. Einführung der Function deren zweiter Differentialquotient verschwindet.

Wir betrachten also die Summe:

$$G(x,\delta) = G(x) = \sum_{p=0}^{p=n} \delta\,.\,\Phi(x + p\,\delta)$$

wo $n\,\delta = a$ sei, und constant bleibe, wenn δ und $\frac{1}{n}$ gegen Null convergiren

Bilden wir

$$\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \frac{\Delta^2 \Phi(x + p\,\delta)}{\varepsilon^2},$$

und lassen darin ε abnehmen, so nähert sich die rechte Seite (Art. 17) einer Grösse:

$$\sum_{p=o}^{p=n} d \left\{ \Delta^* \varphi(x + p\delta) + j \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) \Psi(x + p\delta) \right\},$$

deren numerisch grösstdenkbaren Werth wir mit:

$$\tau(x) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \left\{ \Delta\, \varphi\, (x + p\delta) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) \Psi(x + p\delta) \right\}$$

im Sinne des cit. Art. bezeichnen.

Man wird ε immer so klein annehmen können, dass die Summe:

$$\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \frac{\Phi(x + p\,\delta)}{\varepsilon^2}$$

vorstehende Summe $\tau(x)$ numerisch um nicht mehr, wie um einen beliebig klein vorgeschriebenen Werth τ' überschreitet.

Weiter wird man wegen der Integrirbarkeit von $f(x)$ die Grösse δ so klein machen können, dass auch $\tau(x)$ von vorgeschriebener Kleinheit wird. Um dies einzusehen, erinnere man sich an die Ausführungen des Art. 11, auf Grund deren a fortiori $\tau(x)$ mit δ verschwindet, da die l. c. unserem $\Psi(x + p\,\delta)$ entsprechende Grösse $\psi(x_p)$ den grössten Werth von $\psi(x)$ im Intervall $x + (p - 1)\,\delta \ldots x + p\,\delta$ vorstellt, während $\Psi(x + p\,\delta)$ nur den grössten Werth des Werthevorrath $\psi(x)$ für das Argument $x + p\,\delta$ zu bedeuten braucht.

Endlich wird man gemäss dem im letzten Alinea des Art. 11 Gesagten stets eine Kleinheit von δ angeben können, bei welcher die Function $\tau(x)$ für jeden Werth x innerhalb eines beliebigen Intervalls kleiner wird als eine beliebig vorgeschriebene Grösse τ: da nämlich das l. c. angenommene Integrirbarkeits-Intervall $A \ldots B$ hier sich ins Unbegrenzte erstreckt, indem $\Phi(x)$ in jedem endlichen Integral von x integrirbar ist.

Somit folgt überhaupt:

Man kann δ stets so klein annehmen, dass

$$\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 \sum\limits_{p=o}^{p=n} \delta\, G(x+p\delta)}{\varepsilon^2}$$

bei Verkleinerung von ε für jeden Werth von x eines beliebigen Intervalls unter eine vorgeschriebene Grenze $\tau + \tau'$ sinkt.

20. Beweis, dass G(x) von der Form $c_0 + c_1 x$ ist.

Dies festgestellt, führen wir, indem wir uns an die Analyse des Herrn Schwarz anlehnen, die Functionen ein:

$$H(x) = G(x) - G(a) - \frac{x-a}{b-a}\,(G(b) - G(a))$$

$$K(x) = \gamma H(x) - \frac{r^2}{2}(x-a)\,(b-x),$$

wo a und b zwei beliebig gewählte ein Intervall $a \leqq x \leqq b$ einschliessende Grössen vorstellen, γ und r willkürliche später zu verwendende Grössen bedeuten.

Man findet leicht:

$$\Delta^2 K(x) = \varepsilon^2 r^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma}{r^2}\,\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} \right\}$$

Die Functionen H und K erfüllen, wie man ohne Weiteres einsieht, die Bedingungen:

1. $H(a) = H(b) = K(a) = K(b) = o.$
2. $K(x)$ ist stetig im Intervall $a \leqq x \leqq b$.
3. $\Delta^2 K(x)$ wird für jeden Werth von x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ bei genügender Kleinheit von δ und hinreichender Verkleinerung von ε positiv. Denn wie klein wir r und wie gross wir γ auch annehmen mögen, wir können die vorgeschriebene Grenze $\tau + \tau'$, die $> \frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2}$ gedacht ist (Schluss d. vor. Art.), stets so bestimmen, dass

$$\frac{\gamma}{r^2}(\tau + \tau') < 1$$

wird.

Mit Hilfe dieser Daten kann man nun nachweisen, dass $K(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nicht positiv sein kann, wie das willkürliche γ auch beschaffen sein mag. Denn wäre $K(x)$ in diesem Intervall irgendwo positiv, so müsste es, wegen der Stetigkeit von $K(x_1)$, für irgend einen Werth $x = x_1$, wo $a < x_1 < b$, seinen grössten Werth annehmen, so dass bei hinreichend kleinem ε

$$K(x_1 + \varepsilon) - K(x_1) \leqq o$$
$$K_1(x_1 - \varepsilon) - K(x_1) \leqq o$$

mithin $$\Delta^2 K(x_1) = K(x_1 + \varepsilon) - 2K(x_1) + K(x_1 - \varepsilon) \leqq o$$

würde und bei weiterer Verkleinerung von ε bliebe. Aber $\Delta^2 K(x)$ wird bei hinreichender Verkleinerung von ε ja positiv. Also ist

$$K(x) = \gamma H(x) - \frac{r^2}{2}(x-a)\ (b-x) \leqq o$$

wie man innerhalb beliebig vorgeschriebener Grenzen des numerischen Werthes von γ über diese Grösse auch verfügen möge. Daher ist auch, wenn man, jenachdem $H(x)$ positiv oder negativ ist, γ gleich $+1$ oder -1 setzt:

$$\text{mod. } H(x) - \frac{r^2}{2}(x-a)\ (b-x) \leqq o,$$

d. h. der Ueberschuss von mod. $H(x)$ über die Null kann durch Verkleinerung von r beliebig verringert werden. Aber je kleiner man r annimmt, desto kleiner muss auch die in $H(x)$ eingehende Grösse δ angenommen werden, und beide sinken gleichzeitig unter jede Grenze. Soll also r unendlich klein sein, so werden die in $H(x) = o$ eingehenden S u m m e n, aus denen $G(x)$ besteht, in I n t e g r a l e übergehen.

Aus $$H(x) = o$$

folgt: $$G(x) = c_0 + c_1 x$$

und daher
$$\int_0^a F(x+\alpha)\, d\alpha - \int_0^a F_1(x+\alpha)\, d\alpha = c_0 + c_1 x$$

oder: $$F(\alpha_1 + x) - F_1(\alpha_1 + x) = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a}x, o \leqq \alpha_1 \leqq a.$$

Lässt man hierin a verschwinden, so folgt:

$$F(x) - F_1(x) = \mathrm{Lim}_{a=o} \left\{ \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a} x \right\}.$$

Hierin ist x willkürlich, c_0 und c_1 sind von x unabhängig, $F(x)$, $F_1(x)$ sind völlig bestimmte Grössen, also ist auch $\mathrm{Lim}_{a=0} \frac{c_0}{a}$, $\mathrm{Lim}_{a=0} \frac{c_1}{a}$ etwas Bestimmtes[14]), und man hat

$$F(x) - F_1(x) = c_0 + c_1 x,$$

welches das abzuleitende Resultat ist.

Da wir nun, falls von

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \dots$$

nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt ist, wieder:

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2} = \int^x d\alpha \int^\alpha d\beta f(\beta) + c_0 + c_1 x$$

gefunden haben, so ist die weitere Analyse genau dieselbe, wie im Art. 14, und auch in diesem Falle lassen sich also die Coefficienten a_0, a_p, b_p auf die Fourier'sche Weise ausdrücken.

21. Die Annahme der durchgängigen Endlichkeit von f(x) wird fallen gelassen.

Es bleibt noch übrig, den Fall zu untersuchen, wo f(x) nur deshalb die Bedingung der Integrirbarkeit nicht erfüllt, weil diese Function für einzelne Werthe des Arguments berechnet, unendlich ist, oder bei Annäherung an einzelne solche unendlich wird.

Es sei x_1 ein solcher Werth des Arguments, so ist zunächst unter dem Integral

$$\int f(\alpha)\, d\alpha$$

wie gewöhnlich zu verstehen:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \int^{x_1-\varepsilon} f(\alpha)\, d\alpha + \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1=0} \int_{x_1+\varepsilon_1} f(\alpha)\, d\alpha,$$

---

14) Denn bildet man die vorstehende Gleichung für zwei Werthe x' und x'' von x, so findet man:

$$F(x') - F_1(x') - [F(x'') - F_1(x'')] = (x' - x'')\, \mathrm{Lim}_{a=0} \frac{c_1}{a}.$$

Die linke Seite ist bestimmt, also muss es auch die rechte sein.

falls x_1 innerhalb der Grenzen des Integrals liegt. Geben wir $F_1(x) = \int^{x} d\,\alpha \int^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta)$ untere Grenzen, und setzen wie oben:

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\,\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \int_{-\pi}^{x} d\,\alpha\,(x-\alpha)\, f(\alpha)$$

so genügt es, damit $F_1(x)$ einen Sinn habe, dass

$$\int_{-\pi}^{x} d\,\alpha\, f(\alpha)$$

endlich und bestimmt ist, wie im Art. 12 „über partielle Integration" des Ausführlicheren gezeigt ist.

Nun werde für $x = A$ und $x = B$ die Function $f(x)$ unendlich, sei aber sonst endlich und integrirbar. Wir bestimmen ein x so, dass alle Elemente der Summe

$$G(x) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta\, \Phi(x + p\,\delta)$$

in das Intervall $A \ldots B$ fallen, d. h. man muss haben:

$$A < x + p\,\delta < B;\ p = o, 1, 2, \ldots n;\ n\,\delta = a$$

oder

$$A < x < B - a.$$

In diesem Intervall wird alsdann auch

$$F(x) - F_1(x) = c_0 + c_1 x$$

sein. Da wir aber a beliebig klein annehmen dürfen, so ist auch im ganzen Intervall

$$A < x < B$$

$$F(x) - F_1(x) = c_0 + c_1 x$$

Aehnlich würde man zeigen, dass für

$$x < A : F(x) - F_1(x) = c'_0 + c'_1 x$$

$$x > B : F(x) - F_1(x) = c''_0 + c''_1 x.$$

Nun liefert

$$F_1(x) = \int^{x} d\,\alpha \int^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta)$$

diesen Ausdruck:

$$\Delta^2 F_1(x) = \int_{x}^{x+\varepsilon} d\,\alpha \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) \text{ (Art. 17)}$$

Setzt man daher:

$$\int_{x}^{x+\varepsilon} d\,\alpha \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \varepsilon \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1} d\,\beta\, f(\beta),\ \ x \leqq \alpha_1 \leqq x + \varepsilon,$$

so folgt, da nach dem zweiten Riemann'schen Satze (Art. 5) $\frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon}$ mit ε verschwindet, dass Gleiches von

$$\frac{\Delta^2 \left\{ F(x) - F_1(x) \right\}}{\varepsilon}$$

gilt, und zwar auch für $x = A$ und $x = B$.

Jetzt ist aber leicht zu zeigen, dass die an beiden Seiten von A und B für $F(x) - F_1(x)$ gefundenen lineären Functionen

$$c'_0 + c'_1\, x\ ,\ c_0 + c_1\, x\ ,\ c''_0 + c''_1\, x$$

identisch sind. Denn wegen der Stetigkeit von $F(x) - F_1(x)$ ist z. B.

$$c'_0 - c_0 + A\,(c'_1 - c_1) = o.$$

Ausserdem ist:

$$\frac{\Delta^2 \left\{ F(A) - F_1(A) \right\}}{\varepsilon} = \frac{c_0 + c_1\,(A + \varepsilon) - 2\,(c_0 + c_1\, A) + c'_0 + c'_1\,(A - \varepsilon)}{\varepsilon}$$
$$= c'_1 - c_1.$$

Wenn also $f(x)$ in einzelnen Punkten des Intervalls $-\pi \ldots + \pi$ unendlich wird, so hat man gleichwohl wieder längs des ganzen Intervalls:

$$F(x) = \int^{x} d\,\alpha \int^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) + c_0 + c_1\, x,$$

vorausgesetzt, dass das Integral einen Sinn hat. Diese Formel lässt sich dann noch leicht dahin verallgemeinern, dass man Unendlichwerden in unzähligen, ähnlich wie die Wurzeln des Kettensinus:

$$\sin.\frac{1}{\sin.\frac{1}{\ddots\ \sin.\frac{1}{x}}}$$

gruppirten Punkten gestattet, nur muss das Integral entsprechend definirt werden, in Betreff welcher Fragen ich auf die Abhandlung: „Versuch einer Classif. etc.", Borchardt's Journ. Bd. 79, pag. 35 sqq. zu verweisen mir erlaube.

22. Andere Bestimmung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe.

Wenn wir jetzt vermöge der Analyse des Art. 15 die gleichen Werthe 4 wie dort für die Grössen c_0, c_1, a_0, a_n, b_n finden wollen, so wäre wieder die Bedingung zu erfüllen, dass der Limes $n = \infty$ der Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \cos.\, n\alpha, \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \sin.\, n\alpha$$

verschwindet, wie dies in den bis jetzt betrachteten Fällen aus allgemeinen Sätzen (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 41) folgt. Für den Fall des Unendlichwerdens von $f(x)$ könnte man weiter den l. c. Art. 2 bewiesenen allgemeinen Satz benutzen. Wir können aber gänzlich ohne von diesen Sätzen Gebrauch zu machen, die Werthe der Coefficienten a_n, b_n aus den Gleichungen 3 des Art. 15 ziehen. Da man nämlich hat:

$$\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) + c_0 + c_1 x = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p \cos.\, px + b_p \sin.\, px}{p^2}, \quad \ldots \; 1.$$

so folgt, wenn man statt x setzt $-\pi$ und $+\pi$:

$$\left.\begin{aligned} c_0 - c_1 \pi &= \frac{a_0 \pi^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^p a_p}{p^2} \\ \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi - \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + c_0 + c_1 \pi &= \frac{a_0 \pi^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^p a_p}{p^2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 2.$$

und für o und 2π statt x:

$$\left.\begin{aligned} -\int_{-\pi}^{o} \alpha\, f(\alpha)\, d\alpha + c_0 &= -\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p}{p^2} \\ \int_{-\pi}^{2\pi} (2\pi - \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + c_0 + 2\pi c_1 &= \frac{4 a_0 \pi^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p}{p^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 3.$$

Eliminirt man aus 2 die Reihe, so findet man zunächst:

$$2\pi c_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} (\alpha - \pi)\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Ebenso ergiebt sich aus 3:

$$\int_{-\pi}^{2\pi}(2\pi-\alpha)\,f(\alpha)\,d\,\alpha+\int_{-\pi}^{o}\alpha\,f(\alpha)\,d\,\alpha+2\pi\,c_1=2\,a_0\,\pi^2$$

und hieraus wegen des Werthes von $2\pi\,c_1$ und wegen:

$$\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-\alpha)\,f(\alpha)\,d\,\alpha=-\int_{-\pi}^{o}\alpha\,f(\alpha)\,d\,\alpha$$

erhält man:

$$2\pi\,a_0=\int_{-\pi}^{+\pi}d\,\alpha\,f(\alpha).$$

Dies reicht aber aus, um aus die Gleichungen 3 des Art. 15 die Grössen a_n, b_n zu bestimmen.

Im eben Gesagten ist, wie ich bemerken will, der Satz enthalten, dass aus der Convergenz des Integrals $\int_{-\pi}^{+\pi}d\,\alpha\,f(\alpha)$, wenn $f(x)$ eine trigonometrische Reihe mit schliesslich verschwindenden Coefficienten vorstellt, die für einzelne Werthe des Arguments unendlich wird, auch das Verschwinden der Coefficienten der Fourier'schen Reihe folgt.

23. Bemerkungen über die Beschaffenheit der Unendlichkeitswerthe von f(x).

Als von eigenthümlichem Interesse hebe ich den Fall hervor, wo die Function $f(x)$, für einen Punkt $x=x_1$ berechnet, einen unendlich grossen Werth annimmt, während die Grössen

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=o}\,f(x_1+\varepsilon)\ ,\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon=o}\,f(x_1-\varepsilon)$$

endlich sind. Ein solches Verhalten zeigt z. B. die Function

$$\varphi(x)=\mathrm{Lim}_{h=\infty}\frac{x\,h+1}{x\,h+x^2}\,,$$

diesen Limes so verstehend, dass er gebildet wird, nachdem für x dessen numerische Werthe eingesetzt worden. Die Function $\varphi(x)$ ist überall Eins, ausser für $x=o$, wo sie unendlich ist.

Wenn die Function:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$$

einen solchen Punkt $x = x_1$ besitzt, so werden die Integrale $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha$, etc. in der Weise gebildet, dass man den Unendlichkeitswerth gänzlich fortlässt, und die Function $f(x)$ für $x = x_1$ mit irgend einem endlichen Werthe, der ja doch auf den Werth des Integrals ohne Einfluss ist, behaftet sich denkt.

Besonders merkwürdig ist dieser Fall, weil sich gezeigt hat[15], dass die Fourier'sche Reihe, wenn man sie mit gewissen stetigen, endlichen Functionen bildet, dennoch in einzelnen Punkten unendliche Werthe annimmt. Es entspricht dies also auf das vollkommenste den Ergebnissen der vorstehenden Abhandlung, insofern nämlich die Unendlichkeitswerthe dieser Fourier'schen Reihe nicht berücksichtigt zu werden brauchen, wenn sie, behufs nachträglicher Bestimmung ihrer Coefficienten, als trigonometrische Reihe mit noch nicht in die Fourier'sche Form gebrachten, sondern lediglich numerischen Coefficienten aufgefasst wird.

24. Fall, wo die trigonometrische Reihe f(x) so rasch unendlich wird, dass die Coefficienten der Fourier'schen Reihe divergente Integrale sind.

Schliesslich ist noch ein Fall des Unendlichwerdens der darzustellenden Function $f(x)$ zu untersuchen, in welchem ihre Darstellung durch eine trigonometrische Reihe möglich ist, die indessen nicht ohne Weiteres als Fourier'sche Reihe sich schreiben lässt, weil deren Coefficienten divergente Integrale sein würden. So dass man es hier endlich doch mit einer Ausnahme zu thun hätte, wenn nicht eine kleine Modification in der Definition der in der Fourier'schen Reihe auftretenden Integrale dennoch wieder gestattete, die Coefficienten der trigonometrischen Reihe auf die Fourier'sche Weise auszudrücken.

15) Göttinger gelehrte Anzeigen, 1873, Nr. 21. Die ausführliche Publication wird nächstens erfolgen.

Betrachten wir die gemeine Sinusreihe:

$$\frac{\pi}{2} f_n(x) = \sin. x \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. \alpha + \sin. 2x \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. 2\alpha + \ldots$$

$$+ \sin. n x \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. n\,\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \left\{ \frac{\sin. N \frac{\alpha - x}{2}}{2 \sin. \frac{\alpha - x}{2}} - \frac{\sin. N \frac{\alpha + x}{2}}{2 \sin. \frac{\alpha + x}{2}} \right\},$$

wo $N = 2n + 1$. Dies Integral zerlegen wir in die Theile:

$$\int_0^a, \int_a^b, \int_b^c, \int_c^\pi,$$

wo wir $o < a < b < x < c < \pi$ annehmen, und a, $x - b$, $c - x$ beliebig klein uns denken. Falls f(x) im Intervall $o \leqq x \leqq \pi$ endlich bleibt und nur eine endliche Anzahl Maxima hat, wird für $N = \infty$ das erste, zweite und vierte Integral verschwinden. Wird f(o) unendlich, so ist, um die Wirkung davon zu beurtheilen, nur die Untersuchung des Integrals von o bis a erforderlich, auf die wir uns beschränken. Dieser Theil des für $\frac{\pi}{2} f_n(x)$ vorstehend angegebenen Ausdrucks geht, wie leicht zu bestätigen über in:

$$\frac{1}{2} \cos. N \frac{x}{2} \sin. \frac{x}{2} \int_0^a d\,\alpha\, .\, \alpha\, f(\alpha)\, .\, \varphi(\alpha) \frac{\sin. \frac{N}{2} \alpha}{\alpha}$$

$$- \frac{1}{2} \sin. N \frac{x}{2} \cos. \frac{x}{2} \int_0^a d\,\alpha\, .\, \alpha\, f(\alpha)\, .\, \psi(\alpha) \cos. \frac{N}{2} \alpha$$

wo

$$\varphi(\alpha) = \frac{\cos. \frac{\alpha}{2}}{\left(\sin. \frac{\alpha}{2} \cos. \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin. \frac{x}{2} \cos. \frac{\alpha}{2}\right)^2},\ \alpha\,\psi(\alpha) = \frac{\sin. \frac{\alpha}{2}}{\left(\sin. \frac{\alpha}{2} \cos. \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin. \frac{x}{2} \cos. \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

Die Grössen $\varphi(o)$ und $\psi(o)$ sind weder Null noch unendlich. Falls also $\mathrm{Lim}_{\alpha = o}\, \alpha\, f(\alpha)$ nicht unendlich ist, hat man

$$\mathrm{Lim}_{N=\infty}\int_0^a d\,\alpha\,\alpha\,f(\alpha)\,\varphi(\alpha)\frac{\sin.\frac{N}{2}\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Lim}_{\alpha=0}\,\alpha\,f(\alpha)\,\varphi(\alpha)$$

$$\mathrm{Lim}_{N=\infty}\int_0^a d\,\alpha\,\alpha\,f(\alpha)\,\psi(\alpha)\cos.\frac{N}{2}\,\alpha = 0.$$

Die Sinusreihe convergirt also, wenn $f(\alpha)$ in der Nähe von $\alpha = 0$ nicht unendlich viele Maxima hat und wenn $\mathrm{Lim}\,\alpha\,f(\alpha) = 0$, sie divergirt, wenn dann der $\mathrm{Lim}\,\alpha\,f(\alpha)$ nicht $= 0$ ist.[16])

Nun werde die Function $f(x)$ für $x = a$ $(-\pi < a < +\pi)$ so unendlich, ohne unendlich viele Maxima, dass ihr Integral, über die Stelle $x = a$ genommen, divergirt, dass aber $\mathrm{Lim}_{x=a}\,(x-a)\,f(x) = 0$ sei. Wir werden dann also setzen dürfen:

$$\frac{\pi}{2}\,f(a+\xi) = \sin.\,\xi\int_0^\pi d\,\alpha\,f(a+\alpha)\sin.\,\alpha + \sin.\,2\,\xi\int_0^\pi d\,\alpha f(a+\alpha)\sin.\,2\,\alpha + \ldots$$

---

16) Das nämliche Resultat lässt sich noch einfacher bei der Fourier'schen Formel ableiten. Setzt man $f(x) = -f(-x)$ in $\pi\,f(x) = \int_0^\infty d\,\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\beta\,f(\beta)\cos.\,\alpha(\beta-x)$, so ergiebt sich bekanntlich:

$$\frac{\pi}{2}\,f(x) = \int_0^\infty d\,\alpha\int_0^\infty d\,\beta\,f(\beta)\sin.\,\alpha\,\beta\,\sin.\,\alpha\,x.$$

Um zu finden wie stark $f(\beta)$ für $\beta = 0$ unendlich werden darf, lassen wir das Integral nach β nur von 0 bis a gehen, nehmen $x > a$ an und finden:

$$\int_0^\infty d\,\alpha\int_0^a d\,\beta\,f(\beta)\sin.\,\alpha\,\beta\,\sin.\,\alpha\,x = \mathrm{Lim}_{h=\infty}\int_0^h d\,\alpha\int_0^a d\,\beta\,f(\beta)\left\{\cos.\,\alpha\,(\beta-x) - \cos.\,\alpha(\beta+x)\right\}$$

$$= \mathrm{Lim}_{h=\infty}\left\{x\cos.\,h\,x\int_0^a d\,\beta\frac{\beta\,f(\beta)}{\beta^2-x^2}\cdot\frac{\sin.\,h\,\beta}{\beta} - \sin.\,h\,x\int_0^a d\,\beta\frac{\beta\,f(\beta)}{\beta^2-x^2}\cdot\cos.\,h\,\beta\right\}$$

woraus leicht das Weitere folgt.

oder man hat für $a + \xi = x$:

$$f(x) = a_o + \sum_{p=1}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

wo:

$$a_o = o\,,\; a_p = -\frac{2}{\pi} \sin. pa \int_o^{\pi} d\alpha f(a+\alpha) \sin. p\alpha,$$

$$b_p = \frac{2}{\pi} \cos. pa \int_o^{\pi} d\alpha f(a+\alpha) \sin. p\alpha.$$

Die Function f(x) ist also durch eine convergente trigonometrische Reihe darstellt. Will man sie aber durch eine Fourier'sche Reihe:

$$f(x) = A_o + \sum_{p=1}^{p=\infty} (A_p \cos. px + B_p \sin. px)$$

darstellen, in welcher A_o, A_p, B_p die Bedeutungen

$$A_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha)\,,\; A_p,\, B_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos. p\alpha\,,\; \sin. p\alpha$$

haben, so sind diese Integrale divergent, wenn man sie nämlich auf die gewöhnliche Weise auffasst, nach welcher z. B.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) = \mathrm{Lim}_{\varepsilon = o} \int_{-\pi}^{a-\varepsilon} d\alpha f(\alpha) + \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1 = o} \int_{a+\varepsilon_1}^{+\pi} d\alpha f(\alpha),$$

wo ε und ε_1 von einander unabhängig Null werdend gedacht sind. Es soll aber gezeigt werden, dass doch wieder die Relationen:

$$a_o = A_o\,,\; a_p = A_p\,,\; b_p = B_p$$

stattfinden, wenn man die in den A und B auftretenden Integrale so definirt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} = \mathrm{Lim}_{\varepsilon = o} \left\{ \int_{-\pi}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{+\pi} \right\}.$$

Berücksichtigt man die Relationen:

$$f(a+\alpha) = -f(a-\alpha)\,,\ f(a-\pi+\alpha) = -f(a-\pi-\alpha)$$

so wird sich also vermöge derselben und nach der eben festgesetzten Definition z. B. ergeben müssen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \cos.\, p\alpha = -2 \sin.\, pa \int_{0}^{\pi} d\alpha\, f(a+\alpha) \sin.\, p\alpha$$

In der That, wenn man weiter zerlegt:

$$\int_{-\pi}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{+\pi} = \left(\int_{-\pi}^{-(\pi-a)} + \int_{-(\pi-a)}^{2a-\pi} \right) + \left(\int_{2a-\pi}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{\pi} \right)$$

so geht der erste Theil über in:

$$\int_{\pi-a}^{\pi} d\alpha\, f(a+\alpha)\, (\cos.\, p(a+\alpha) - \cos.\, p(a-\alpha))$$

und der zweite in:

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-a} d\alpha\, f(a+\alpha)\, (\cos.\, p(a+\alpha) - \cos.\, p(a-\alpha))\,,$$

so dass für $\varepsilon = o$ allerdings nach der obigen Definition

$$a_p = A_p$$

herauskommt.

Falls für einen Werth $x = a$ das Integral $\int_0^\varepsilon d\alpha\, (f(a+\alpha) + f(a-\alpha))$ convergent ist, während $f(x)$ für $x = a$ ohne Maxima so unendlich wird, dass $\text{Lim}\, \varepsilon f(a+\varepsilon) = o$, $\text{Lim}\, \varepsilon f(a-\varepsilon) = o$ [17]): so ist also das Verhalten der Function in der Umgebung des Punktes $x = a$ kein Hinderniss für ihre Entwickelung in eine Fourier'sche Reihe, vorausgesetzt, dass im Fall der Divergenz

17) Riemann, Ueber die Darst. d. e. trigon. R. Art. 12.

der Integrale $\int_{a\pm\varepsilon}^{a} d(\alpha)\, d\alpha$ die in diesem Artikel angegebene Definition der Fourier'schen Coefficienten zu Grunde gelegt wird.

25. Gegenwärtige Beziehungen der beiden Hauptsätze des Art. 3 zu einander.

Die beiden Hauptsätze des Art. 3: dass erstens zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ eine Function nur auf eine Weise in eine trigonometrische Reihe mit dem Gliede $a_p \cos. px + b_p \sin. px$ entwickelt werden könne, und dass zweitens die Coefficienten dieser Reihe die Fourier'sche Form haben, diese beiden Hauptsätze der Theorie der trigonometrischen Reihen sind ihr durch die in der Einleitung erwähnte und durch die vorliegende Untersuchung nunmehr sicher eingefügt. Die Beziehung jener Sätze zu einander giebt zu folgenden Bemerkungen Anlass.

Es versteht sich von selbst, dass der erste Satz in demselben Umfang in Bezug auf die Beschaffenheit der Function $f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$ gilt, wie der zweite, und dass dies nicht umgekehrt werden kann. Deshalb ist der erste Satz ein selbständiger und keine blosse Folge des zweiten: ein ähnliches Verhältniss, wie ich es als zwischen den beiden Hauptsätzen der Theorie der darstellenden Integrale bestehend angegeben habe (Allgemeine Lehrsätze etc., Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38, Einleitung). In unserem Falle verhält sich die Sache so.

Lassen wir uns die Annahme genügen, dass die Reihensumme $f(x)$ nicht unendlich wird, so darf sie doch noch, vermöge der durch den zweiten Satz ihr auferlegten Bedingung der Integrirbarkeit in jedem kleinsten Intervall einmal divergiren, während Herr Cantor den ersten Satz nur unter der Voraussetzung beweist, dass die Divergenzpunkte der Reihe eine gewisse Vertheilung zeigen, die aus jedem Intervall andere Intervalle herauszuheben gestattet, in denen kein Divergenzpunkt liegt. Insofern wird also durch den Gültigkeitsumfang, in welchem wir

hier den zweiten Satz wiederhergestellt haben, der des ersten noch erweitert. Dagegen setzt der erste Satz in der Fassung des Herrn Cantor gar keine Einschränkung fest hinsichtlich der Grösse der Sprünge der Function f(x) in den Strecken, in denen diese Reihe convergirt, während für den zweiten Satz durch die bekannte Bedingung der Integrirbarkeit die relative Höhe dieser Sprünge wesentlich eingeschränkt und damit zugleich die Selbständigkeit des ersten Satzes gewahrt wird: es sei denn, dass es Beziehungen zwischen Bestimmtsein und Integrirbarkeit der durch trigonometrische Reihen dargestellten Functionen gebe, worüber Vermuthungen zu äussern, ich mich indessen nicht veranlasst fühle.

26. Kurze Zusammenfassung der Resultate dieser Abhandlung.

Die Function

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + (a_2 \cos. 2x + b_2 \sin. 2x) + \ldots$$

erfülle in den Strecken, in denen alle ihre Werthe endlich sind, die Bedingung der Integrirbarkeit. Wenn f(x) in Punkten unendlich ist oder wird, von denen einer a sei, so finde dies so statt, dass entweder die Integrale:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \int_b^{a-\varepsilon} d\alpha\, f(\alpha)\,,\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1=0} \int_{a+\varepsilon_1}^{c} d\alpha\, f(\alpha)$$

endlich und bestimmt sind, oder, wenn dies nicht der Fall ist, so, dass die Function ohne Maxima unendlich wird, dass $\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\ \varepsilon f(a \pm \varepsilon) = 0$, und dass das Integral

$$\int_0^{\varepsilon} d\alpha\, (f(a+\alpha) + f(a-\alpha))$$

endlich sei. Wenn endlich die Unendlichkeitspunkte im Intervall $-\pi \ldots + \pi$ in unbegrenzter Zahl vorkommen, so gelte von ihrer Vertheilung und vom Sinne eines Integrals $\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha)$, was im Art. IX der Abhandlung: Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21 gesagt ist.

Sobald alle vorstehende Bedingungen erfüllt sind, ist es erlaubt, die Coefficienten durch die Fourier'sche Form auszudrücken, und wenn dabei die Integrale nach der gewöhnlichen Auffassung ihren Sinn verlieren, so sind sie, falls f(x) für x = a unendlich wird oder ist, als

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \left(\int^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon} \right)$$

zu definiren.

Schluss.

Wenn die semitische Ursage dem mühelosen Genuss im Paradise die harte Arbeit des Gerechten nach dem Sündenfall gegenüberstellt, so zeigt unsere Wissenschaft ähnliche Gegensätze. Nachdem die etwa mit Fourier und Poisson abschliessende analytische Epoche am immer erneuten Entdecken von Formeln und Sätzen, meist wenig bekümmert um deren genauere Begründung, deren Gültigkeitsbereich, u. s. w. sich ergötzt hatte, müssen wir, ein bedächtigeres Geschlecht, die wir die feineren Unterscheidungen der neueren Mathematik, die Begriffe von der unbedingten, der gleichmässigen Convergenz u. a. m. vom Baume der Erkenntniss gepflückt haben, was die Analytiker jener Epoche am Wege fanden, mit früher nicht geahnten Schwierigkeiten ringend, der Wissenschaft von Neuem erwerben. Freilich lohnt uns dafür das befriedigende Bewusstsein, wenn auch nicht selten hart erkämpften doch in seinem genau erforschtem Umfange fortan gesicherten Besitzes.

Anhang
über den Fundamentalsatz der Integralrechnung.

Der wichtigste und nützlichste Satz der Integralrechnung, der seinem Entdecker als etwas ganz Erstaunliches hatte erscheinen müssen, wenn dieser nur das Vermögen in Zahlen zu denken und gar kein geometrisches Organ gehabt hatte: das ist der Satz vom Zusammenhang zwischen dem unbestimmten Integral und dem bestimmten. Er lautet:

Ist $F(x)$ eine Function, die differenzirt die Function $f(x)$ liefert, und ist $F(x)$ im Intervall $A \leqq x \leqq B$ stetig, so ist: $\mathrm{Lim}_{n=\infty} \left\{ (x_1 - a)\, f(a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})\, f(x_{n-1}) \right\}$, wo $A < a < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < x < B$ im nämlichen Intervall von x genau gleich $F(x) - F(a)$.

Wenn man auch noch $f(x)$ stetig oder wenigstens nur mit einer endlichen Anzahl Sprünge behaftet voraussetzt, ist es leicht durch geometrische Betrachtungen den Satz über allen Zweifel zu erheben. Der Beweis ist dann so zu führen, dass man zeigt, wie der Limes der Summe $(x_1 - a)\, f(a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \ldots$ mit dem bekannten Flächenraum $\int\limits_a^x f(\alpha)\, d\,\alpha$ identisch ist. Weiter findet man $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x d\,\alpha\, f(\alpha) = f(x)$, und nach der Voraussetzung ist $\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$. Man hat dann nur noch zu zeigen, dass zwei Functionen die denselben Differentialquotienten haben, sich nur durch eine Constante unterscheiden können.

Indessen benützt erstens dieser Beweis geometrische Vorstellungen, und der Analytiker darf sich erst zufrieden geben, wenn seine Theorien so durchgeführt sind, als ob es gar keine Geometrie gäbe. Zweitens wird der Beweis ganz ungenügend, wenn von $f(x)$ nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt wird, weil alsdann allerdings in jedem kleinsten Intervall von x ein Punkt vorkommen wird, für den

$$\frac{d}{dx}\int_a^x d\,\alpha\, f(\alpha) = f(x)$$

ist (s. Versuch etc Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21, Art. II letztes Alinea), aber auch in jedem kleinsten Intervall Punkte existiren können, für welche diese Gleichung nicht erfüllt ist (s. ebendort, Art. IV). Der in Rede stehende Fundamentalsatz der Integralrechnung bedarf also des Beweises.

Die Voraussetzungen unter denen der Fundamentalsatz hier bewiesen werden soll.

Was zunächst ohne Beweis einleuchtet, weil in der Definition enthalten, ist, dass man setzen darf:

$$\int_a^x d\,\alpha\, f(\alpha) = \varDelta(x) - \varDelta(a),$$

falls wieder $A < a < x < B$, $f(x)$ im Intervall A und B integrirbar ist, und unter $\varDelta(x)$ z. B. verstanden wird:

$$\int_A^x d\,\alpha\, f(\alpha).$$

Es kommt also nur auf den Nachweis von $F(x) - F(a) = \varDelta(x) - \varDelta(a)$ an. Dem Beweis, wie ich ihn unten führen werde, liegen über den Differentialquotienten $f(x)$ von $F(x)$ folgende Voraussetzungen zu Grunde:

Es sollen im Intervall $A \ldots B$ integrirbar sein die Functionen:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f_1(x)\ ,\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{-\varepsilon} = f_2(x)$$

und wenn man setzt $\varDelta_1(x) = \int_A^x d\,\alpha\, f_1(\alpha)$, $\varDelta_2(x) = \int_A^x d\,\alpha\, f_2(\alpha)$, so soll sein:

$$\varDelta_1(x) = \varDelta_2(x).$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn, unter σ_p den grössten absoluten Werth der Differenz $f_1(x) - f_2(x)$ im Intervall δ_p verstanden und $B - A = \delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n$ gesetzt, der Limes $n = \infty$

$$\delta_1 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 + \ldots \delta_n \sigma_n$$

gleich Null ist. Es ist hinzuzufügen, dass, wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, auch

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} = f_3(x)$$

integrirbar ist, und dass $\Delta_3(x) = \int\limits_A^x d\,\alpha\, f_3(\alpha) = \Delta_1(x) = \Delta_2(x)$ ist.

Wie ich (Anmerk. 11) schon angeführt, ist die allgemeinste Auffassung des Differentialquotienten:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\, \varepsilon_1 = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - (x - \varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

von der die obigen specielle Fälle sind, und ich habe Sorge getragen, im Vorigen die Bedingungen für $f(x)$ und $F(x)$ so weit zu lassen, als unser Beweisverfahren gestattet. Liegt jedoch daran nichts, so kann man sie durch die kürzere ersetzen, dass das Integral des wie immer entstanden gedachten Differentialquotienten stets dieselbe endliche und bestimmte Function seiner Grenzen sei.

Beweis des Fundamentalsatzes.

Es soll gezeigt werden, dass unter den Voraussetzungen des vorigen Art. die Grösse:

$$F(x) - F(a) - \int\limits_a^x d\,\alpha\, f_r(\alpha)$$

Null ist, wenn $f_r\,(x)$ einen der beiden Differentialquotienten $\frac{F(x \pm \varepsilon) - F(x)}{\pm \varepsilon}$ vorstellt.

Wir setzen $x + p\,\delta$ statt x und bilden die Summe nach p, d. i. die Grösse:

$$S(x, \delta) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta F(x + p\delta) - n\delta F(a) - \sum_{p=o}^{p=n} \int_a^{x+p\delta} d\alpha\, f_r(\alpha),$$

wo $n\delta = \varDelta$ und $x + \varDelta < B$ sei. Wir finden sodann:

$$\frac{S(x \pm \varepsilon, \delta) - S(x, \delta)}{\pm \varepsilon} = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \frac{F(x \pm \varepsilon + p\delta) - F(x + p\delta)}{\pm \varepsilon}$$
$$- \sum_{p=o}^{p=n} \frac{\delta}{\pm \varepsilon} \int_{x+p\delta}^{x \pm \varepsilon + p\delta} d\alpha\, f_r(\alpha).$$

Lässt man hierin ε verschwinden, so ist leicht einzusehen, dass die beiden Summen rechts für $\delta = o$ sich derselben Grenze nähern. Denn ein Element der ersten Summe wird:

$$\delta \operatorname{Lim}_{\varepsilon = o} \frac{F(x + p\delta \pm \varepsilon) - F(x + p\delta}{\pm \varepsilon}$$

d. i. $\delta f_1(x + p\delta)$ oder $\delta f_2(x + p\delta)$. Und ein solches der zweiten Summe ist zunächst $\delta f_r(x + p\delta \pm \bar{\varepsilon})$, $o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \varepsilon$, worauf $\varepsilon = o$ zu setzen ist. Die Differenz beider Elemente ist entweder nicht grösser wie der grösste Werthunterschied einer der Werthevorräthe $f_1(x)$, $f_2(x)$ im Intervall $x + (p - 1)\delta \ldots x + p\delta$ oder $x + p\delta \ldots x + (p + 1)\delta$, oder nicht grösser als der grösste Unterschied $f_1(x) - f_2(x)$ in den nämlichen Intervallen.

Da nun die Summe dieser mit δ multiplicirten Unterschiede verschwindet, wenn δ verschwindet, so kann δ offenbar stets so klein angenommen werden, dass durch genügende Verkleinerung von ε die Grösse

$$\frac{S(x \pm \varepsilon, \delta) - S(x, \delta)}{\pm \varepsilon}$$

für jeden vorgelegten Werth x unter eine vorgeschriebene Grenze sinkt. Ausserdem ist $S(x, \delta)$ eine stetige Function von x.

Nun führen wir ein Intervall $x_0 \ldots x_1$ ein, welches dem Intervall angehöre, in dem x sich bewegen darf, und setzen:

$$\varrho(x) = \left\{ S(x, \delta) - S(x_0, \delta) \right\} (x_1 - x_0) + \left\{ S(x_1, \delta) - S(x_0, \delta) \right\} (x - x_0).$$

Die Function $\varrho(x)$ ist im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stetig und man hat:

$$\varrho(x_0) = o, \varrho(x_1) = o.$$

Also giebt es im Intervall $x_0 < x < x_1$ mindestens einen solchen Punkt x', dass die Differenzen $\varrho(x') - \varrho(x' + \varepsilon)$, $\varrho(x') - \varrho(x' - \varepsilon)$, wenn sie von Null verschieden sind, gleiche Vorzeichen haben, und dass unter denselben Umständen die Quotienten:

$$\frac{\varrho(x') - \varrho(x' - \varepsilon)}{-\varepsilon}, \quad \frac{\varrho(x') - \varrho(x' + \varepsilon)}{\varepsilon}$$

verschiedene Vorzeichen haben.

Es ist aber:

$$\frac{\varrho(x') - \varrho(x' \pm \varepsilon)}{\pm \varepsilon} = (x_1 - x_0)\frac{S(x' \pm \varepsilon, \delta) - S(x', \delta)}{\pm \varepsilon} - \left\{S(x_1, \delta) - S(x_0, \delta)\right\}.$$

Wir nehmen nun δ so klein an, dass durch genügende Verkleinerung von ε das erste Glied rechts kleiner als eine sehr kleine Grösse τ gemacht wird. Da die linke Seite entweder Null ist oder mit ε ihr Zeichen wechselt, so kann das zweite Glied rechts: $S(x_1, \delta) - S(x_0, \delta)$ nicht grösser als τ sein. Dasselbe Räsonnement gilt aber für jeden Werth x_1. Daraus folgt, dass $S(x, \delta)$, wenn δ unendlich klein ist, unendlich wenig um einen constanten Werth schwankt, oder

$$\mathrm{Lim}_{\delta = o}\, S(x, \delta) = \text{constans}.$$

Nun war:

$$S(x, \delta) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta\, F(x + p\delta) - n\delta\, F(a) - \sum_{p=o}^{p=n} \delta \int_a^{x+p\delta} d\,\alpha\, f(\alpha).$$

Also findet man für $n\delta = \varDelta$, $\delta = o$:

$$S(x) = \int_o^{\varDelta} d\,\alpha\, F(x + \alpha) - \varDelta\, F(\alpha) - \int_o^{\varDelta} d\alpha \int_a^{x+\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \text{constans},$$

oder

$$\int_x^{x+\varDelta} F(\alpha)\, d\,\alpha - \int_x^{x+\varDelta} d\,\alpha \int_a^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \text{constans}.$$

Setzt man $x = a$, um die Constante zu bestimmen, so findet man zuerst:

$$\int_x^{x+\varDelta} F(\alpha)\, d\,\alpha - \int_x^{x+\varDelta} d\,\alpha \int_a^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \int_a^{a+\varDelta} F(\alpha)\, d\,\alpha - \int_a^{a+\varDelta} d\,\alpha \int_a^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta),$$

oder, wenn mittlere Werthe genommen werden:

$$\Delta \left\{ F(\xi) - \int_a^\xi d\,\beta\, f(\beta) \right\} = \Delta \left\{ F(\bar\alpha) - \int_a^{\bar\alpha} d\,\beta\, f(\beta) \right\},$$

$$x \leqq \xi \leqq x + \Delta,\ a \leqq \bar\alpha \leqq a + \Delta.$$

Lässt man den Factor Δ fort, und lässt dann Δ unendlich klein werden, so wird $\xi = x$, $\bar\alpha = a$ und es verschwindet das zweite Glied in der Klammer rechts. Somit findet man endlich:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x d\,\alpha\, f(\alpha)$$

Q. E. D.

Wenn man bedenkt, dass, im Falle F(x) eine der Weierstrass-schen Functionen vorstellt, wie die von mir veröffentlichte (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 29), das Integral ihres Differentialquotienten, der keine integrirbare Function ist, eine zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gänzlich unbestimmte Grösse sein würde, wiewohl die Weierstrass'sche Function selbst stetig ist: so steht a priori der Muthmassung nichts im Wege, dass hier keine Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass es Functionen geben könne, deren irgend wie definirter Differentialquotient ein Integral liefert, dass von ihnen verschieden aber bestimmt ist, und dergl. mehr. Um so nöthiger schien es mir durch einen präcis formulirbaren Satz — wenn er auch vorerst nur eine ausreichende Bedingung enthält, — der Integralrechnung den locker werdenden Boden wieder zu festigen.

Beiträge

zur

Kenntniss der Organisation und systematischen Stellung

von

Receptaculites.

Von

C. W. Gümbel.

Beiträge

zur Kenntniss der Organisation und systematischen Stellung

von

Receptaculites.

Von

C. W. Gümbel.

Ueber die Organisation und zoologische Stellung des paläozöischen Geschlechtes *Receptaculites,* welches zuerst von Defrance (1827) für eine belgische Devon-Versteinerung aufgestellt worden war, haben bereits Salter[1]) und kurz nach ihm Billings[2]) nach vorzüglich erhaltenen Exemplaren aus den Silurschichten Canada's sehr erschöpfende Arbeiten geliefert. Trotz des vortrefflichen Erhaltungszustandes des gleichen Materials, an welchem die beiden genannten berühmten Paläontologen ihre Beobachtungen angestellt haben, sind sie doch bezüglich der Rangordnung, welche diese Organismen im zoologischen System einnehmen, nicht zu übereinstimmenden Ergebnissen gekommen, indem Salter der Zutheilung zu den *Foraminiferen* in die Gruppe der *Orbitoliden* das Wort redet, Billings dagegen auf die Gemmulae von *Spongilla* hinweisend sie als eine embryonale Stufe eines Schwammes aufgefasst wissen will.

Diese Verschiedenheit in der Ansicht von zwei so hervorragenden Gelehren, mehr noch der Umstand, dass sich die Untersuchungen bei

---

1) Geological survey of Canada; Figures a Desc. of Canadian org. remains. Decade I, 1859, p. 43.

2) Geol. surv. of Canada; Palaozoic fossils Vol. I, 1865, by Billings p. 378.

der auf nordamerikanische und aus den Silurschichten stammende Formen beziehen, während die Namen gebende Stammform aus europäischen Devonschichten, welche also höchst wahrscheinlich eine eigene Art bildet, in jenen Arbeiten kaum mehr, als in einer nur beiläufigen Erwähnung Berücksichtigung gefunden hat, gaben mir zunächst Veranlassung, diese wegen ihrer Zwischenstellung für die Entwicklungsgeschichte der Organismen auf Erden vielleicht besonders interessante Devonart im Anschluss an meine Arbeit über *Petrascula*[3]) *(Conodictyum)* hauptsächlich mikroscopisch in Dünnschliffen einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Leider war es mir nicht möglich, Originale aus Canada aufzutreiben, um durch mikroscopische Studien, die früher noch nicht üblich waren, auch die älteren Arbeiten über die Art von Canada zu vervollständigen. Gleichwohl steht so viel fest, dass jene Art aus den Silurschichten von Canada zu derselben Formgruppe gehört, wie die europäischen Devonspecies, und dass wir bei beiden auf eine nahe übereinstimmende Organisation mit Sicherheit rechnen können. Ebenso dürfte es kaum zweifelhaft sein, dass ausserdem noch eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Versteinerungen aus älteren Schichten demselben Geschlecht angehören, oder mindestens eine gleiche Stellung in zoologischem Systeme mit oder neben *Receptaculites* einnehmen. Dergleichen Formen sind besonders *Ischadites* Murch., *Tetragonis* Eichwald und Verschiedenes, welches unter den unsicheren Bezeichnungen von Bryozoen, Korallen und Schwämmen vorläufig wenigstens dem Namen nach untergebracht wurde z. B. *Coscinopora placenta, Escharipora recta* u. s. w.

Betrachtet man zunächst die Stammform aus rheinischen Devonschichten, so finden wir, dass für diese eigenthümliche Versteinerung zuerst Defrance (Dict. d. sc. nat. t. XLV, s. F. Zool. P. f. 1^a—1^d) den Namen *Receptaculites*, offenbar wegen einer entfernten Aehnlichkeit mit dem Blüthenboden der Compositen, etwa der Sonnenblume, gewählt hat. Er beschreibt die rhombischen, in regelmässigen schiefen sich erweiternden Reihen stehenden Vorsprünge oder Feldchen und die durch die ganze Dicke hindurchlaufenden rundlichen Säulchen als Löcher, ohne

3) Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in München; Math. phys. Cl. 1873, S. 292.

aber die Versteinerung irgend einer bekannten organischen Form näher zu vergleichen. Am wahrscheinlichsten scheint ihm die Zugehörigkeit zur Ordnung der Polypen, obwohl auch diese Zuweisung für nichts weniger als sicher zu erachten sei. *Neptuni* dient als Beiwort für die Bezeichnung der Species.

Diesem Vorgange ist auch Blainville (in Man. d'Actin. p. 534) gefolgt. Goldfuss dagegen schildert (Pet. Germ. S. 31, Taf. IX. Fig. 18) dieselbe Versteinerung unter der Bezeichnung *Coscinopora placenta* (non Lonsd.) mit einer zwar dürftigen Abbildung eines Bruchstücks, welche jedoch genügt, den Beweis zu liefern, dass wir es in der That mit absolut derselben Versteinerung zu thun haben, auf welche sich die Defrance'sche Beschreibung bezieht. Im Jahre 1844 führt Ferd. Roemer (d. rhein. Uebergangsgebirge S. 59) die gleiche Versteinerung von Bigge in Westphalen auf als eine Form, deren Analogie nur unter den Korallen gesucht werden könne. 1848 erscheint im Index palaeont. von Bronn *Receptaculites* als ein Polypengeschlecht „incertae sedis", dem als synonym *Ischadites* zugetheilt wird. Die Species *Receptaculites Neptuni* ist hier gradezu identificirt mit *Ischadites Koenigi* und ausserdem werden noch zwei Species (*R. Bronni* Eichw. u. *R. orbis* Eichw.) aufgeführt. In der zweiten Auflage der Lethaea (1851—1856) stellt F. Roemer *Receptaculites* anhangsweise zu den *Amorphozoen*, ohne aber sich über die so vortrefflich beschriebene innere Organisation weiter auszusprechen. Eichwald in seiner Lethaea rossica (1859) reiht das Geschlecht unter die Korallen ein und bringt es als besondere Familie mit anderen ähnlichen Formen unmittelbar nach den *Graptolithen*. In dem Werke: Klassen und Ordnungen des Thierreichs (1859) versetzt Bronn *Receptaculites* mit *Ischadites* und *Tetragonis* Eichw. an die Spitze der paläozoischen Schwämme. Quenstedt erwähnt unsere Versteinerung neben dem *Pleurodictyum* als problematische Form bei den Schwämmen (1867 Handb. der Patraf. S. 804) nach dürftigen Exemplaren, auf die seine Untersuchungen beschränkt waren. D'Omalius d'Halloy (Précis elem. d. Géologie 1868 p. 577) nimmt sie in die Liste der Versteinerungen des Kalks mit *Rhynchonella cuböides* von Virelle unter den Schwämmen auf.

In der ausgezeichneten Arbeit über die niederschlesischen Devonablagerungen endlich hat sich Dames (Zeitsch. d. d. g. Ges. Bd. XX, 1868,

S. 483) ausführlicher über die Organisation und die systematische Stellung von *Receptaculites Neptuni* und zwar zu Gunsten der Zurechnung zu den *Foramineren* ausgesprochen aus Gründen, welche ihre Erörterungen später finden sollen.

Was *Ischadites* anbelangt, welches Silurgeschlecht Murchison 1867 (Silur. S. 509 T. XII, Fig. 4) als „possibly a Sponge“ aufführt und Archiac-Verneuil (Geol. transact. of London, t. VII, P. II, p. 407) bereit zu *Receptaculites* gezogen haben, so hatte sich hierüber zuerst Austin (N. Ann. a. Mag. o. nat. hist. Vol. XV, p. 406) eingehender ausgesprochen. Er hält *Ischadites* für verwandt mit der damals von Boverbank entdeckten kleinen *Dünstervillia (Synandra elegans)*, nicht für eine *Ascidie*, wie Koenig meinte. Bei dieser Verwandtschaft müsste man freilich annehmen, dass die paläozoische Art entweder keine Spiculen oder nur ganz kleine besessen habe und dass die säulenartigen Querverbindungen kein Skelett, sondern Oeffnungen andeuten. Wir dürfen diese Ansicht Austin's gradezu auch für *Receptaculites* gelten lassen. Neuerlichst wird diese Aeusserung Austin's zwar auch von Haeckel in seinem epochemachenden Werke über Kalkschwämme (S. 340) erwähnt, ohne sich aber weiter darüber auszusprechen, ob diese Ansicht ihm begründet erscheine oder nicht.

Die Gleichstellung und Zusammengehörigkeit von *Receptaculites* und *Ischadites* scheint in England noch nicht allgemein anerkannt zu werden. Denn in Bigsby „Thesaurus siluricus“ werden beide zwar in der Reihe der Schwämme aber getrennt durch *Manon, Palaeomanon* und *Protospongia* aufgezählt. Auch der Meister in der Kenntniss der *Foraminiferen* Carpenter scheint noch keine bestimmte Stellung zu der Frage, ob *Receptaculites* zu den *Foraminiferen* gehöre, gefasst zu haben (U. Loftusia und Parkeria in Phils. transact. Vol. 159, J. 1869 bis 1870, p. 376); denn er führt an: Das Hinzufügen von *Receptaculites* in die Reihe der zweifelhaften *Foraminiferen* und die Vermuthung, dass *Stromatopora, Archaeocyathus* und Aehnliches, welche wegen mangelnder genauerer Kenntniss der inneren Struktur bis jetzt als *Spongien* betrachtet wurden, ihre nächsten Verwandten in der Kategorie der *Loftusien* u. s. w. haben, weisen auf ein Untersuchungsfeld, auf dem noch grosse Ergebnisse ausstehen.

Am genauesten ist, wie bereits erwähnt, die Art *Receptaculites occidentalis* Salt. aus Canada von Salter und Billings beschrieben worden. Es dürfte daher zweckdienlich erscheinen, zur Orientierung im Allgemeinen zuerst die hierüber gemachten Beobachtungen kennen zu lernen. Salter nimmt als äussere Form eine trichterförmige Scheibe an, welche aus vielen in einfachen Reihen gestellten, an beiden Enden zu rautenförmigen Platten ausgebreiteten Zellen zusammengesetzt sei. Er fasst die mehr oder weniger cylindrischen, röhren- oder säulenförmigen Theile der Versteinerung, welche quer von einer Fläche seiner „trichterförmigen Scheibe" zur anderen gestellt sind, als hohl und bei lebenden Thieren mit Sarkode erfüllt auf und vergleicht sie zunächst mit den im Vertikalschnitt säulenförmigen, im Horizontalschnitt runden, in Quincunx gestellten Hohlräumen von *Orbitolites* (nach Carpenter's Darstellung), namentlich mit jenen von complicirterem Baue. Dadurch wird er zu dem Schlusse veranlasst, dass *Receptaculites* eine zunächst mit *Orbitolites* verwandte *Foraminifere* sei.

Bei dieser Annahme wäre die Kieselerde, welche an den versteinerten Exemplaren die als Höhlungen angesprochenen Theile ausfüllt, erst durch den Versteinerungsprocess infiltrirt und in den hohlen Räumen abgesetzt worden. Dagegen müssten die jetzt von Gesteinsmassen erfüllten Räume zwischen den vermeintlichen Zellen nach der Analogie mit *Orbitolites* ursprünglich mit Kalk ausgefüllt gewesen sein, der im Gegensatz zu der infiltrirten Kieselerde später durch Auslaugung fortgeführt worden wäre, um den Zugang der einhüllenden Gesteinssubstanz in die auf diese Art entstandenen Hohlräume zu ermöglichen. Dabei legt Salter ein Hauptgewicht auf feinere querverlaufende Röhrchen, welche die verschiedenen vermeintlichen Zellen verschiedener Reihen untereinander verbinden sollen. Billings erwähnt nichts Derartiges und auch ich sah bei den äusserst zahlreichen Präparaten sowohl in Dünnschliffen, als in Anätzungen und bei natürlich ausgewitterten Exemplaren von *Receptaculites Neptuni* nie eine Spur solcher Querverbindungen, welche selbst bei der europäischen Art vorhanden sein müssten, wenn ihnen die von Salter zugeschriebene Bedeutung wirklich zukäme. Auch fasst Billings die vermeintlichen

Zellen Salter's nicht als ursprüngliche Hohlräume für Sarkode auf, sondern als eine Art solide „Säule", wie wir später sehen werden.

Auch ohne die amerikanische Versteinerung selbst untersucht zu haben, scheint es mir denn doch nicht zweifelhaft, dass sich Salter in Bezug auf die Deutung der röhrenartigen Theile und der Zwischenräume geirrt habe. Es ist dies um so gewisser, je unbezweifelter die Zusammengehörigkeit der *R. occidentalis* und *R. Neptuni*, die ja auch Salter selbst anführt, feststeht. Es wird diess später ausführlich nachgewiesen werden. Hier sei nur vorläufig darauf hingewiesen, um die Salter'sche Annahme, die an sich schon durch den zugemutheten Kieselerdeinfiltrations- und Kalkauslaugungsprocess wenig Zutrauen erweckt, als reine Speculation erkennen zu lassen, die jeder Thatsächlichkeit entbehrt. Die so künstlich erzwungene Vergleichung mit *Orbitolites* fällt damit in sich selbst zusammen und es bedarf besserer Beweise, um *Receptaculites* den *Foraminiferen* zu erhalten!

Billings gegenüber von Salter begünstigt durch zahlreichere später in Canada gesammelte gut erhaltene Exemplare hebt als Hauptfortschritt in der Erkenntniss dieser Versteinerung den Nachweis hervor, dass das innere Integument durchbrochen sei, und dass das Ganze eine grosse innere Höhlung umschlossen habe, zu welcher von oben eine Oeffnung oder Mündung führe. Indem er zugleich die oben besprochenen Säulchen oder Röhrchen als solid, im Innern nur von einem Kanal durchzogen ansieht und sie den Spiculen gleichsetzt, wie sie sich etwa bei den Gemmulen von Süsswasserspongien zeigen, mit einem radialen sternförmigen Ausbreitung an beiden Enden (Amphidiscen), kommt er zum Schlusse, dass *Receptaculites* zur Gruppe der *Spongien* gehöre und unter diesen eine embryonale Form darstelle.

Im Einzelnen gibt er folgende Schilderung. Angesichts der Thatsache, dass man fast nur trichterförmige oder halbkugelige Exemplare findet, ist man zur Annahme gezwungen, dass diese Stücke nur die unteren Theile darstellen, von denen die oberen, in welchen sich die Oeffnung befand, abgebrochen und zerstört worden seien. Auf diese Weise reconstruirt sich aus den meist becherförmigen Resten ein mehr oder weniger kugeliger cylindrischer oder apfelförmiger Körper, der unten geschlossen, in eine stumpfe Spitze auslaufend oder auch selbst etwas eingedrückt

erscheint, während sich an dem oberen Ende bei den meisten, wenn auch nicht bei allen Arten, eine Mündung befände. Das untere Ende muss als Ausgangspunkt des Wachsthums des Thieres gelten; ein schmaler gerundeter Fortsatz an dieser Stelle würde demnach höchst wahrscheinlich die erste Zelle „den Nucleus" andeuten, von dem aus der Ansatz weiterer Theile in concentrischer und spiraliger Anordnung erfolgte.

Der uns erhaltene Rest des Thierkörpers besteht nach Billings Auffassung aus drei wesentlichen Theilen, einer Bedeckung (Integument) nach aussen (Extorhin) und innen (Endorhin) und aus dem dazwischen stehenden Röhren- oder Spiculen-Skelett. Das äussere Integument ist zusammengesetzt aus rhomboidalen Platten, die sich dicht aneinander schliessen und vom unteren Centrum auslaufend in Spiralreihen, welche nach aussen durch eingesetzte neue sich vermehren, geordnet sind, sodass die Aussenfläche ein gewürfeltes Aussehen erhält, entfernt ähnlich der Zeichnungen, die man gewöhnlich auf der Rückseite der Taschenuhren anbringt. Nach der oberen Mündung zu sollen die Reihen wieder entsprechend an Zahl abnehmen. Die Platten gegen die untere Mitte sind viel kleiner, als die in den mittleren Theilen. Wahrscheinlich habe bei einigen Arten dieses Integument eine biegsame lederartige Zusammensetzung gehabt, bei anderen seien die Platten solid und bei *R. occidentalis*, bei dem sie jetzt verkieselt sind, lassen sie sich nach Behandlung mit Säuren sogar von einander trennen.

Ganz ähnlich verhalte sich auch das innere Integument in Form und Anordnung, nur dass es durch zahlreiche, enge runde Oeffnungen durchbrochen sei und zwar an jeder Platte durch eine solche Oeffnung, welche im Winkel der vier zusammenstossenden Platten liege. Von der Mitte jeder dieser Platten laufen vier enge Kanäle als Höhlungen in der Plattensubstanz gegen die Mitte der Seiten, wo sie sich mit denen der Nachbarplatten in Verbindung setzen, während sie an ihrem Ausgangspunkte mit den centralen Kanälchen der Säulchen oder Spiculen communiciren. Billings betont nachdrücklich die Veränderlichkeit aller dieser Verhältnisse, so dass die Oeffnungen bald rund, bald unregelmässig geformt, oft mit zackigen Rändern versehen, die Integumentplatten bald scharf begrenzt, bald continuirlich, fast ohne Nähte oder

nur als ein dünnes Häutchen, das die Säulchen bedecke und die Kanäle einschliesse, erscheine.

Das röhrige Skelett besteht nach ihm aus dünnen, graden seltener gekrümmten Röhrchen oder hohlen Nadeln (Spiculae), die senkrecht quer von einem Integument zum andern gestellt seien und zwar von der Mitte einer äusseren Platte zur Mitte einer inneren verlaufend und diese mit einander verbindend. An der äusseren Platte ist der Ansatz in der Mitte mit vier Ausläufern versehen, welche gegen die vier Ecken der Platten verlaufen und hier mit den Ausläufern der Nachbarplatten zusammenstossen. Von diesen Ausläufern halten je zwei eine zum Mittelpunkte gleich abstehende Richtung in annähernd parallelen Kreisen ein; sie werden kreisförmiglaufende genannt, während die zwei anderen radiale Richtungen einhalten, und als radiale bezeichnet werden. Diese Ausläufer sind gleichfalls mit hohlen Kanälchen versehen (vergl. Fig. 354 a. a. O.) und geben an Exemplaren, an welchen das Integument zerstört ist, in den narbenartig vertieften Abdrücken der einzelnen Platten jene kreisförmig und radial gestellten linien- oder strichförmigen Zeichnungen, wie wir dieselbe so häufig an verwitterten Exemplaren sehen. Billings macht ausdrücklich die Bemerkung, dass die Porenöffnungen am inneren Integument nur bei verkieselten Exemplaren des *R. occidentalis*, bei welchen die Kalksubstanz durch Säuren entfernt wurde, gesehen worden seien, hält es aber doch für sehr wahrscheinlich, dass sie auch bei allen andern Arten dieser Gattung vorkommen. Es ist zu bemerken, dass nach der schematisirten Zeichnung (Fig. 357) in das Integument versenkte Kanälchen nur in den inneren (nicht in den äusseren) Platten, dagegen Ausläufer nur an den äusseren (nicht an den inneren) Platten vorkämen und dass erstere ihre Richtung nach der Mitte der Platten, letztere nach den Ecken der Platten einschlagen. Die grössere Pore ginge demnach von der inneren Höhlung des ganzen Gehäuses in die gleichfalls hohlen Räume zwischen den Spiculen, ohne mit letzteren selbst in Verbindung zu treten. Sie sind es, durch welche der die Gesteinsmasse bildende Schlamm in das Innere eindrang und die inneren hohlen Räume mit derselben Gesteinsmasse ausfüllte, welche das umschliessende Gestein selbst bildete. Vielleicht liese sich das häufige Vorkommen des unteren Theils daraus erklären, dass

das lebende Thier mit diesem untern Theil im Schlamm eingesenkt war, wodurch dieser beim Absterben des Thiers sich erhielt, während der obere zerfiel und zerstört wurde.

An vielen verwitterten Formen kommt es vor, dass auf dem innern Abdruck des äusseren Integuments (Steinkern) nur drei Ausläufer sichtbar sind, zwei kreisförmig verlaufende und ein radialer. Billings glaubt diese Erscheinung in der Weise erklären zu können, dass einer der radialen Ausläufer tiefer unter der Oberfläche verläuft und dabei am Steinkern unsichtbar ist.

Derselbe widerlegt ferner die Ansicht Salter's, nach welchen alle die zuletzt als harte Körpertheile dargestellten Gebilde nur Hohlräume für Sarkode gewesen sein könnten, unter Anderem in überzeugender Weise besonders durch den Nachweis, dass in denselben Gesteinsstücken mit *R. occidentalis* die als feste Substanz angesprochenen Theile genau dieselbe Beschaffenheit und Masse aufzuweisen haben, wie die miteingeschlossenen *Crinoideen, Mollusken* oder *Korallen.* Im dolomitischen Gesteine dagegen fehlen diese harten Theile und erscheinen als Hohlräume in gleicher Weise bei *Receptaculites*, wie bei *Crinoideen* oder *Korallen.* Ausserdem findet man den Raum zwischen den Spiculen nie mit Kalkspath oder Kieselerde ausgefüllt, wie es doch wenigstens hier und da der Fall sein müsste, wenn dieser Raum schon anfänglich von fester Kalk-Substanz eingenommen gewesen wäre. Meine Untersuchungen an *R. Neptuni* führen mich ganz zu eben derselben Annahme.

Billings giebt aber weiter selbst zu, man werde zu der Ansicht gedrängt, dass die Kanälchen in dem Säulenskelett, das er den Spiculen der Schwämme gleichstellt, und in den übrigen Theilen des Skeletts unter sich communiciren, also ein vollständiges Kanalsystem darstellen, während diess bei der cylindrischen Höhlung der eigentlichen Schwammspiculen doch nicht der Fall sei. Er meint es könne ja gedacht werden, dass Organe hier die eine und anderswo eine sehr verschiedene Function verrichten! Soweit Billings.

Was nun den näheren Vergleich anbelangt, den Billings zwischen *Receptaculites* und den *Gemmulae* der *Spongilla* zieht, so scheint er letztere nicht selbst untersucht, sondern bloss nach Abbildungen beurtheilt zu haben. Nehmen wir an, es lägen die Gemmulae von *Spongilla fluvia-*

tilis vor (B. nennt keine Species), so können wir an ihnen auch nicht die geringsten Beziehungen auffinden, in welche sie zu *Receptaculites* gebracht werden könnten. Denn sehen wir auch zunächst ganz ab von der ungeheuerlichen Grössendifferenz — die Spiculen oder Amphidiscen der Gemmulae messen 0,01—0,015 Millim., wogegen die Säulchen von *Receptaculites* die Länge von 15 Millim. erreichen, also tausendmal grösser sind! — so zeigt sich eine Hauptdifferenz darin, dass die Gemmulen nicht etwa aus einem von einer lederartigen Hülle umschlossenen hohlen Kügelchen mit einer Oeffnung nach oben bestehen, sondern sie sind im Innern mit einer schleimig körnigen Substanz vollständig ausgefüllt, die so viel Consistenz besitzt, dass sie sich von der Hülle loslösen und selbst in Scheibchen zerschneiden lässt. In diesem Theile bemerkte ich keine Spiculen irgend einer Art. Um diesen innern Kern zieht sich nun eine Hülle von bedeutender Consistenz etwa 0,05 Millim. dick bei 0,4 Millim. Durchmesser der Gemmulen, wie sich in den leicht herzustellenden Durchschnitten erkennen lässt. Diese Hülle besteht aus drei concentrischen Lagen, einer lederartigen halbdurchsichtigen feinen Haut nach innen, einer breiteren mittleren Zone von körnig schleimiger Beschaffenheit etwa wie die Substanz im Kerntheil und aus einer dunklen körnigen äusseren dünnen Lage. Sowohl auf der innern als äussern Lage stehen hier dicht gedrängt nebeneinander in radialer Richtung zahllose kleine an beiden Enden mit strahlenförmiger Ausbreitung versehene Spiculen sog. Amphidiscen. Sie ragen in die mittlere durchsichtige Zone herein, ohne sich jedoch hier zu berühren. Einzelne in letzterer selbst wahrgenommene Nädelchen halte ich für beim Schnitte abgelöst und seitlich verschoben, da ich niemals hier zusammenhängende Reihen beobachtete. Diese Spiculen stehen mithin in doppelten und getrennten Zonen geordnet, aber ohne dass sie unmittelbar an ihren Enden sich berühren; die Spiculen jeder Zonen sind jedoch unter sich durch eine organische Masse verbunden, so dass man beim Zerdrücken mit dem Deckgläschen zusammenhängende Gruppen derselben erhält. Es gelingt selbst durch langsam gesteigerte Hitze und Glühen die organische Substanz zu zerstören, wobei begreiflicher Weise die Nädelchen, da sie aus Kieselsäure und wahrscheinlich einer organischen Substanz bestehen, gut erhalten bleiben und nach dem Glühen in der

zugegeben Flüssigkeit theils einzeln theils aber auch noch in Gruppen vereinigt schwimmen, indem, wie es scheint, ein Rest organischer verkohlter oder geschmolzener Substanz sie vereinigt hält.

Eine Verbindung der strahlenförmigen Aeste der einer Nadel mit denen der Nachbarnadel findet sichtlich nicht statt, sondern es berühren sich die Aestchen, indem sie sich etwas seitlich aneinander legen, wie es gewöhnlich auch bei den einfach spiessförmigen Schwammnadeln der Fall ist. Von einer communicirenden Verbindung der Höhlungen in den Spiculen kann aber keine Rede sein. Es besteht demnach in der That kein Homologie zwischen diesen Spiculen der Gemmulae und den Säulchen des *Receptaculites* und nur eine sehr entfernte Aehnlichkeit in Bezug auf Form und auf ihre radiale Stellung. Ob es Gemmulae anderer Arten giebt, welche nur eine Zone Spiculen enthalten und bei denen diese von der innern bis zur äusseren Decke der Hülle reichen weiss ich nicht aus eigner Untersuchung, aber auch in diesem Falle ergiebt sich keine andere, als nur eine äussere trügerische Formähnlichkeit. Von noch geringerem Belang ist die Beschaffenheit der Aussenfläche der Gemmulen, die mit gewürfelten Feldern versehen sein soll. Bei den von mir untersuchten Gemmulae der Süsswasserspongillen stehen die oberen sternförmigen Enden der Amphidiscen der äusseren Zone etwas über die Oberfläche vor und bewirken, dass die letztere eine Art getäfelte Verzierung erhält, die aber nicht entfernt jener des *Receptaculites* ähnlich ist. Ueberhaupt aber spricht zu Ungunsten dieses Vergleichs der Umstand, dass Gemmulen bei Kalkschwämmen der Jetztzeit nach Haeckel (Monogr. d. Kalkschw. I. Bd., S. 397) gar nicht vorkommen, um so viel weniger dürfen wir derartige Gebilde unter den Versteinerungen aus der Vorzeit erwarten, aus der wir ja überhaupt nur dürftige Spuren von Kalkschwämmen kennen.

Ich kann daher selbst ohne die Originale von Canada untersucht zu haben, der Annahme von Billings nicht beistimmen, dass die Säulchen seines *Receptaculites* den Spiculen der Schwämme entsprechen und dass deshalb bei der Aehnlichkeit der inneren Organisation mit den Gemmulae der *Spongilla* jene Versteinerungen als eine embryonale Spongienform zu betrachten sei.

In neuester Zeit hat Dames (Zeitschr. d. d. geol. Gesell. Bd. XX,

1868, S. 483) sehr eingehende Studien über den *Receptaculites* von Oberkunzendorf in Schlesien angestellt und deren höchst interessanten Ergebnisse mitgetheilt. Diesen nach wird die Versteinerung mit der belgischen der Art nach identificirt und unter die *Foraminiferen* eingereiht. Nach Dames besteht die Versteinerung aus rhombischen Tafeln, von denen je zwei (eine auf der äusseren Seite und eine auf der inneren Seite) durch eine cylindrische Röhre verbunden sind. Die Röhre soll sich auf der Unterseite jeder Tafel in Ausläufer theilen, welche als kleine Kanäle an den Innenseiten der Tafeln so vertheilt verlaufen, dass je eines nach einer Ecke der Tafel hinzieht, während dazwischen in jedem Viertel ein oder zwei kleinere nach dem Rand zu verlaufen. Die sich nicht berührenden Säulchen sind, wie schon Ferd. Roemer 1844 (Rhein. Uebergangsgeb. S. 59) angegeben hat, im Innern von einem Kanal durchbohrt, welche die Verbindung des inneren und äusseren Plattensystems vermitteln. Die Wände der Säulchen bestehen aus krystallinischem Kalk, während die Zwischenräume zwischen ihnen stets mit Gesteinsmasse ausgefüllt seien. Zugleich constatirt Dames an den schlesischen Exemplaren das Fehlen sowohl der vier Seitenkanälchen, welche nach Billing in der Substanz der Platten vorhanden sein sollen, als auch das der Oeffnungen in Endorhin an den Zusammenstosspunkten der Platten. Ebenso wenig konnte er etwas von einer lederartigen Decke wahrnehmen und kommt zu dem Schlusse, dass die Richtigkeit der Salter'schen Ansicht der Zugehörigkeit zu den *Foraminiferen* nicht wohl zweifelhaft sei, dass aber *Receptaculites* nicht zu der *Orbitulitiden*, sondern zu einer besonderen Foraminiferenfamilie „*Receptaculitidae*“ zu stellen sei.

Was nun meine eigenen Untersuchungen über die Organisation unseres europäischen *Receptaculites Neptuni* anbelangt, den ja beide, Salter und Billings, als normalen Typus für das Genus gelten lassen und diess auch ausdrücklich hervorheben, so muss ich sehr bedauern, dass mir kein so vorzüglich erhaltenes, namentlich kein verkieseltes Material, wie jenes von Canada zur Verfügung stand, trotz der grossen Menge von relativ schönen Exemplaren, die mir von vielen Seiten anvertraut wurden. Vor allen verdanke ich der grossen Liberalität, mit welcher mir Herr Prof. Dewalque das beste Material der belgischen

Sammlungen zur Untersuchung überlassen hat, allein die Möglichkeit eine solche Arbeit zu unternehmen, weshalb ich mich in hohem Grade gedrungen fühle, hierfür meinem wärmsten Dank Ausdruck zu geben. Ebenso freundlich wurde ich von den Sammlungen in Berlin, Breslau und Bonn unterstützt, was ich hier gleichfalls dankbarst zu erwähnen mich verpflichtet erachte.

Die Hauptschwierigkeit, welche sich mir bei genauerem Untersuchen dieser Versteinerungen (wo es nicht besonders erwähnt ist, im Folgenden immer *Receptaculites Neptuni*) in den Weg stellte, beruht auf der Ungleichheit in dem Erhaltungszustande der verschiedenen Exemplare, woher es kommt, dass kaum eines dem anderen völlig gleich sich verhält und in den Dünnschliffen sich die abweichendsten Erscheinungen zeigen. Dazu gesellt sich eine offenbar schon in der Natur des Thieres selbst gelegene grosse Freiheit in der Gestaltung seiner festen Körpertheile, wodurch gleichfalls irreleitende Schwankungen in der Form veranlasst sind.

Aeussere Form.

Unter den sehr zahlreichen Exemplaren, die mir zur Untersuchung aus Belgien und Schlesien vorliegen, finden sich keines von einer auch nur annähernd kugelförmigen Gestalt, alle sind mehr oder weniger flach kegelförmig mit den manichfaltigsten Modificationen und Verzerrungen theils in Folge besonderer Wachsthumsverhältnisse, theils durch nachträgliche Pressung, Belastung oder durch Druck. (Tafel A, Fig. 1, 2, 3.) Die Spitze des Kegels, die nach unten gekehrt gedacht werden muss, ist in der Regel stumpf, zitzen- zuweilen stielförmig zulaufend, selten fast eben oder sogar etwas concav eingedrückt. Diese Spitze als die centralste Parthie des Ganzen, muss als der älteste und zuerst gebildete Theil des Gehäuses angesehen werden. (Taf. A, Fig. 2.) Eine besondere Bildung in diesem Centrum, die sich als Embryonalzelle oder Nucleus deuten liesse, konnte ich jedoch an keinem Exemplar auffinden. Bei den regelmässig zitzenförmig zulaufenden Exemplaren zeigt sich die rautenförmige Täfelung der Oberfläche und wo diese abgewittert ist, das Ende der Säulchen bis zum centralsten Punkte stetig

fortgesetzt, nur dass im Verhältnisse zur grösseren Annäherung an dieses Centrum sowohl die Täfelchen als Säulchen kleiner werden. (Taf. A, Fig. 3.) Auch beobachtete ich niemals eine Stelle von der Art, dass man annehmen könnte, es sei hier das Gehäuse festgewachsen auf einem fremden Körper aufgesessen oder mit anderen Individuen verbunden gewesen. Es scheint daher vollständig gerechtfertigt, das Gehäuse als einzeln im Meeresschlamm theilweise wenigstens eingesenkt und festgehalten sich vorzustellen. Billings nimmt dabei, wie erwähnt an, dass der obere Theil des nach oben kugelig gewölbten, mit einer Hauptöffnung versehenen Theils bei den Vorgängen, durch welche der organische Körper in den Versteinerungszustand übergeführt wurde, abgebrochen und zerstört worden sei. Es wäre jedoch sehr auffallend, dass unter allen untersuchten Exemplaren nicht einmal, wenn auch nur ausnahmsweise ein ganzes kugelförmiges Gehäuse sich erhalten haben sollte oder doch wenigstens ein durchlöcherter Theil als Ueberbleibsel eines oberen Abschnittes sich zu erkennen gäbe. Ich vermochte daher keine Stützpunkte für diese Annahme aus den mir vorliegenden und untersuchten Exemplaren zu gewinnen.

Ist das Gehäuse als in zwei Theile zerrissen zu denken, so müsste der obere Rand zackig und uneben erscheinen und wohl auch noch die Spuren dieser gewaltsamen Trennung an sich tragen. Es ist in dieser Hinsicht allerdings auffällig, dass nur sehr vereinzelte Exemplare an dem oberen Rand so scharf ausgebildet und gut erhalten sind, um sie als unverletzte Ränder des becherförmigen Körpers ansprechen zu können. Bei den meisten Exemplaren, bei denen der obere Rand erhalten ist, erscheint derselbe in der Richtung der Säulchen senkrecht zu den Seitenflächen gestellt und gegen beide rasch abgerundet (s. T. A, Fig. 1). Die rautenförmige Feldchen, welche die innere und äussere Fläche bedecken, sieht man nur sehr selten, an einem Exemplar von Oberkurzendorf jedoch unbezweifelbar über diesen Rand fortsetzen, sodass sich die inneren und äusseren Decken über diesen Rand hin zusammengeschlossen oder verbunden haben. Es lässt sich allerdings auch selbst in diesem Falle immer noch Zweifel darüber erheben, ob dieser Zusammenschluss der oberen und unteren Seiten ein ursprünglicher organischer oder nicht vielmehr erst nachträglich in Folge eines

Seitendrucks bewirkt worden sei. Auch muss zugestanden werden, dass sich diese Randgegend häufig selbst an den gut erhaltenen Exemplaren weniger deutlich ausgebildet zeigt, als die übrigen Theile. Meistentheils ist das Gehäuse hier durch Druck sichtlich zusammengepresst, wie sich aus den schiefliegenden, aus ihrer normalen Stellung verschobenen, oft sogar zerbrochenen Säulchen entnehmen lässt, oder es liegen die Säulchen in normaler Stellung in der Randfläche selbst offen, als ob hier das Gehäuse nicht geschlossen gewesen wäre. Es lässt sich diess zu Gunsten der Ansicht auslegen, dass eben durch die gewaltsame Zerreissung des Gehäuses in zwei Theile das Innere erst nachträglich blossgelegt worden sei. Dieser Annahme könnte die Art und Weise, in welcher die eigentlichen inneren hohlen oder früher mit Sarkode erfüllten Räume bei den Versteinerungen mit Gesteinssubstanz erfüllt gefunden werden, zur Stütze dienen. Es ist diese Ausfüllungsmasse durchweg genau von derselben Beschaffenheit, wie das die Versteinerung zunächst umhüllende Material, als ob dasselbe ohne alle Hindernisse in das Gehäuse hätte eindringen können. Nicht nur dass dieselben kleineren organischen Einschlüsse aussen und innen in dem Gestein sich finden, sondern man trifft sogar grössere Stücke von *Crinoideen*-Stielen innerhalb der früheren Hohlräume des Gehäuses eingeschlossen, was voraussetzt, dass bei dem Einsinken des Gehäuses in den noch weichen Kalkschlamm ein weiter, offener Zugang ins Innere vorhanden gewesen sein musste. Es darf jedoch hier nicht unerwähnt bleiben, dass auch in anderen Richtungen als nach der erwähnten Trennung des Gesammtgehäuses in eine obere Kuppe und in einen unteren Theil, Zerreissungen, Zersprengungen, Verschiebungen zu den häufigsten Vorkommnissen bei dieser Versteinerung gehören, oder dass wenigstens Theile der Decken weggebrochen, und dadurch Oeffnungen und Risse entstanden sind, durch welche wohl auch das ungehemmte Eindringen des Gesteinmaterials in das Innere seine Erklärung findet, ohne annehmen zu müssen, dass hierzu ein völliges Zerbrechen in zwei Theile nothwendig gewesen sei. Wenn ich alle Erscheinungen berücksichtige, welche sich uns in den äusseren Umrissen und in dem Verhalten von *Receptaculites Neptuni* in den eben erwähnten besterhaltenen Exemplaren vor Augen stellen, so möchte ich es für nicht zweifelhaft erachten, dass das Gehäuse ursprünglich

schon eine Becher- und keine Kugel-Form besessen habe, ohne damit behaupten zu wollen, dass nicht andere Arten von *Receptaculites* kugelartige Formen besitzen. Dabei scheint übrigens in der Gestaltung der einzelnen Individuen eine grosse Freiheit geherrscht zu haben. Wir begegnen nämlich ziemlich regelmässig stumpfkegelförmigen Exemplaren mit wenig aus- oder eingebogener Oberfläche neben weit ausgebauchten, napfförmigen oder präsentirtellerförmigen Gehäusen, die freilich durch Druck vielfache Aenderungen erlitten haben mögen. Daher dürfte es auch kommen, dass die centrale Spitze meist etwas nach einer Seite verschoben, ja sogar selbst eingedrückt gleichsam nach oben gerichtet sich zeigt. Deshalb ist auch das Verhältniss der Grösse der Höhe und Breite eine sehr veränderliche und schwankende. An abweichendsten in dieser Beziehung ist ein fast cylindrisches Exemplar von Marche in Belgien, welches bei nur 20 Millim. Durchmesser am oberen Rande eine Länge von 35 Mm. aufzuweisen hat. Die meisten Exemplare besitzen im Mittel einen Durchmesser von etwa 75—100 Mm. am oberen Becherrande bei etwa 30—49 Mm. Höhe (senkrecht gemessen).

Aussenfläche.

Wie schon Billings klar dargelegt hat, besteht das Gehäuse von *Receptaculites* aus drei wesentlich verschiedenen Theilen, einer äusseren Decke oder Hülle und aus einem System zwischen beiden senkrecht zu diesen gestellten Säulchen. Wir betrachten zuerst das Aeussere des Gehäuses.

Sehr verschiedene Verhältnisse wirken zusammen, dass die Aussenfläche unseres *Receptaculites* ungewöhnlich verschiedenartiges Aussehen zeigt. Diese äusserliche Verschiedenheit trägt nicht wenig dazu bei, das Studium dieser organischen Ueberreste zu erschweren. Die Ursache dieser Ungleichheit im äusseren Aussehen liegt vorzüglich in der Ungleichheit des Erhaltungszustandes, ins besondere in dem Grad und der Tiefe der Verwitterung oder Zerstörung des obersten und der oberen Theile des Gehäuses (T. A, Fig. 3). Eine ganz vollständige Erhaltung der äussersten Theile des Gehäuses ist nur selten zu beobachten und

wird fast an allen Exemplaren aus Belgien und den rheinischen Devonschichten vermisst, lässt sich jedoch häufiger an den Vorkommnissen aus Schlesien wahrnehmen.

Die vollständig erhaltene äussere Decke des Gehäuses besteht aus einer Lage von kleinen rhombischen Plättchen von nicht unbedeutender Dicke und oben intensiv dunkler Färbung (Taf. A, Fig. 4[a]). Indem diese Platten aneinanderstossen, bilden sie eine mehr oder weniger geschlossene Decke in ebener oder nur sehr schwach gewölbter Ausbreitung, bei welcher die nicht ganz gradlinig verlaufenden, sondern schwach gekräuselten (wie die Knochennähten) Fugen, längs welcher die einzelnen Plättchen aneinander stossen, als schmale ganz seichte von zwei Seitenstreifchen begleitete Rinnchen erscheinen. Dadurch erhält die Oberfläche ein getäfeltes Aussehen, welches jedoch weit weniger deutlich hervortritt, als, wie wir sehen werden, bei etwas verwitterten Exemplaren.

Die einzelnen Plättchen dieser Decke sind nicht genau von rhombischen Umrissen, sondern es sind die gegenüber stehenden parallelen Begrenzungslinien schwach bogenförmig gekrümmt. Oft freilich ist diess kaum merklich und dann tritt die Rautenform mehr oder weniger vollkommener hervor. Auch an den Ecken, namentlich der spitzwinkelig zusammenlaufenden Seiten macht sich häufig gleichsam eine Abstumpfung bemerkbar, so dass an die Stelle der Ecke eine Kante tritt und der rhombische Umriss dadurch in einen unregelmässig sechsseitigen übergeht (T. A, Fig. 7).

Die Oberfläche dieser gegen die Mitte beinahe immer schwach eingesenkten Plättchen ist fast glatt, nicht grobkörnig, wie sich namentlich an den prachtvoll erhaltenen Abdrücken von O. Kunzendorf in Schlesien aufs deutlichste beobachten lässt. Zuweilen zeigen sich auch einige schwache Linien parallel der Begrenzungsränder, die zwei oder dreimal gegen die Mitte des Plättchen sich wiederholend eine concentrische feine Streifung hervorrufen. Die Oberflächenschicht scheint von einer besonderen sehr dünnen Substanzlage gebildet zu werden, welche über die tiefere kalkige Hauptmasse der Plättchen ausgespannt ist. Die kohlige Beschaffenheit ist vielleicht eine Andeutung ihrer ursprünglichen häutigen oder hornartigen Beschaffenheit. Selbst die besten Dünn-

schliffe lassen wegen der auffallend starken kohligen Färbung dieser obersten Lage im Horizontalschnitte nur undeutlich zellige Struktur (Taf. A, Fig. 4[b]) wahrnehmen, die auf eine ähnliche Beschaffenheit hinzuweisen scheint, wie wir dieselbe auf der inneren Oberfläche später kennen lernen werden. Nicht viel grösser ist der Gewinn durch Herstellung von vertikalen Querschnitten, bei denen es nur höchst selten gelingt, die Oberflächenschicht in durchsichtiger Beschaffenheit zu erhalten. Es zeigt sich in diesem Falle ein oder zwei Lagen von rundlichen perlschnurartig aneinandergereihte Zellen oder auch fadenformige, nach aussen convex gekrümmte kurz gegliederte Zellchen in einer krümmlich trüben Grundmasse (Taf. A, Fig. 20[e]). Indess ist die Struktur dieser Oberflächenschicht von keiner besonderen Wichtigkeit, um sie noch weiter im Detail zu verfolgen.

Weit wichtiger ist unbedingt die Beschaffenheit der darunter liegenden verhältnissmässig dicken Plättchen, welche meist aus Kalkspath bestehen und der Oberflächenbedeckung des Gehäuses ihren festen Bestand geben, indem eines an das andere sich schildförmig anschliesst. Die Seiten, mit denen die einzelnen Plättchen aneinanderstossen, scheinen nicht ganz eben, sondern mit feinen Ein- und Ausbiegungen versehen zu sein. So lassen es wenigstens die wohlerhaltenen leistenartigen Abdrücke der Gesteinssubstanz, welche zuweilen zwischen die Fugen eingedrungen ist, vermuthen, wie sich solche bei O. Kunzendorf finden (Taf. A, F. 24). Es ist sogar nicht unwahrscheinlich, dass hierdurch Züge für feine Kanälchen angedeutet werden, welche eine Verbindung zwischen den tieferen Theilen des Gehäuses und der Aussenseite vermittelten. Ob längs dieser Fugen eine gewisse Biegsamkeit des Gehäuses möglich war, muss dahin gestellt bleiben. Doch findet man sehr häufig, dass das Gehäuse längs dieser Fugen zerbrochen und einzelne Plättchen oder ganze Gruppen derselben gegen einander verschoben sind, ja zuweilen ist fast Plättchen um Plättchen aus der ursprünglichen Lage verrückt. Besonders beachtenswerth ist der Ausschnitt, welcher sich zeigt, wenn man die Plättchen bis zu den später zu erwähnenden Kanälchen abschleift. Dieser Ausschnitt an einer Ecke der Raute entspricht einem Vorsprung des nächst benachbarten Plättchens da, wo dieses ein stärker entwickeltes Kanälchen besitzt. Dadurch scheint hier

eine Art Verzapfung der Plättchen stattzufinden. Obwohl aus der Art, wie das Gehäuse uns als Versteinerung erhalten ist, auf einen sonst nur lockeren Zusammenschluss der Plättchen geschlossen werden darf, so hält es doch schwer, einzelne Plättchen zu isoliren. Gelingt diess, so brechen sie immer an einer, wie wir später sehen werden, stets vorhandenen Einschnürung der Säulchen ab und stellen nunmehr eine rautenförmige Platte mit einer stielartigen Spitze in die Mitte, — den Rest des abgebrochenen Säulchen — dar (Fig 8[c]). In sehr seltenen Fällen spalten sich die Kalkplättchen selbst wieder in zwei Theile. Der obere dickere Theil ist unten etwas ausgewölbt, also im Ganzen concav und scheint gegen den unteren Theil der Platte durch einen Hohlraum stellenweise getrennt zu sein. Darauf weist auch die Beobachtung hin, dass sich in vielen Durchschnitten an dieser Stelle eine dünne Lage von Gesteinssubstanz eingeschoben findet (Taf. A, Fig. 19[a]). Dadurch würde es sich auch leicht erklären lassen, dass der obere Theil der kalkigen Decke so häufig gänzlich fehlt, weil er vielleicht nur locker mit dem tieferen Theile verbunden weniger schwierig sich davon loslösen konnte, und so der Zerstörung verfiel. Ist diese obere Lage der Plättchen zerstört, dann kommt eine gegen das anfängliche Aussehen sehr veränderte Beschaffenheit der Oberfläche zum Vorschein, ebenso verschieden von dem Bilde, welches uns die gut erhaltenen Exemplaren liefern, als von jenem, das uns in den Fällen entgegentritt, wenn die ganze Kalkplatte verwittert oder fortgeführt und nur der Abdruck in Form von Steinkern erhalten ist.

Es bestehen demnach die Kalkplättchen eigentlich aus drei Lagen

1) aus einer dünnen kohligen Oberflächenschicht,
2) aus einer oberen kalkspäthigen und
3) aus einer unteren kalkspäthigen Lage.

Ueber die innere Organisation dieser zwei letzteren kalkigen Plattenlagen ist es sehr schwierig, sichere Anhaltspunkte zu gewinnen, weil der Kalkspath, welche die Substanz der ursprünglich offenbar starren Plättchen nunmehr in den Versteinerungen ersetzt, durch seine krystallinische Ausbildung die Linien und Grenzen der organischen Struktur entweder wirklich zerstört, oder doch verwischt und undeutlich gemacht hat. Es giebt nur einzelne Exemplare, bei denen die Kalkspathsaus-

füllung vermuthen lässt, dass sie die ursprüngliche organische Struktur theilweise beibehalten hat. Aber auch in diesen Fällen geben Dünnschliffe bei durchfallendem Lichte wenig befriedigende Aufschlüsse. Dagegen gelingt es durch langsames successives Anschleifen und Aetzen der Plättchen, sowohl von oben her, als von unten herauf sich nach und nach ein klares Bild von der inneren Struktur der Plättchen zu verschaffen, besonders bei Exemplaren, bei welchen der Kalkspath eisenhaltig und bereits etwas verwittert ist, wie solche bei O. Kunzendorf vorkommen. Aetzt man bei solchen Exemplaren vorsichtig die oberflächliche Decke weg, so tritt uns zuerst ein strahlig fasriges Gefüge entgegen. Man nimmt nämlich bereits eine Viertheilung, wiewohl noch nicht sehr deutlich, wahr, indem von dem Mittelpunkt der Platte nach den vier Ecken der Raute Linien angedeutet sind, durch welche das Ganze in vier Feldern abgegrenzt wird. Die erwähnte Faserung hat eine radiale Richtung, so dass die Fasern von den vier zu den Ecken verlaufenden Linien wie die Federtheile von der Spuhle aus gegen den Aussenrand gerichtet sind.

Schleift oder ätzt man etwas tiefer, so treten nach und nach die erwähnten vier Linien immer bestimmter hervor, bald mehr die eine, bald mehr die andere und es zeigt sich, dass sie von fadenartigen Verzweigen herrühren, welche von dem fasrigen Theil der Plättchen abweichend zusammengesetzt, cylindrisch oder meist nach aussen etwas verdickt (Taf. A, Fig. 7) kolbenförmig, in den oberen Theil der Plättchen gleichsam hineingewachsen erscheinen und von dem unteren Theil der Plättchen auslaufen, von wo aus sie mit den Säulchen direct in Verbindung stehen. Sie erweisen sich als von den Säulchen auslaufende Kanälchen und diese umgebende Wülste, durch welche die Plättchen gleichsam wie durch Arme oder Stützbalken getragen und gehalten werden. Diess lässt die Unterseite der Plättchen deutlicher erkennen, wenn man ein Plättchen absprengt und etwa durch Säuren von anhaftender Gesteinssubstanz frei macht. Man sieht dann in der Mitte den Rest des abgesprengten Säulchens, oft nur als zitzenförmige Erhöhung angedeutet. Von diesem Centrum strahlen — in normaler Entwicklung — vier leistenförmige Arme nach den vier Ecken der Plättchen aus und verlaufen in deren oberem Theile gegen oben und aussen. Nähere

Untersuchung lehrt weiter, dass diese Stützarme im Innern einen Kanal besitzen, der mit dem Centralkanal, wie wir ihn bei den Säulchen näher kennen lernen werden, direct in Verbindung steht. Wir haben sohin ein weit verzweigtes Kanalsystem, das die Plättchen durchzieht und sie mit den übrigen festen Skelettheilen in organische Verbindung setzt. Von andern, die Plättchen durchziehenden Kanälchen vermochte ich nichts zu entdecken. Besonders deutlich zeigen sich die Stützarme mit ihrem innern Kanal in Querschnitten (Taf. A, Fig. 22) welche zugleich auch uns über die fasrige Struktur der die Substanz dieser Ausläufer bildenden Kalkmasse Auskunft geben.

Diese Stützarme (Epistyle[4]) sind nun sehr wechselnd ausgebildet, und bedingen ein sehr verschiedenartiges Aussehen der entkalkten Steinkerne. Ehe ich jedoch das Weitere über diese Theile mittheile, scheint es für das Verständniss des Ganzen passender, vorerst das Wesentliche über die Säulchen anzugeben.

Säulchen.

Zwischen je einem Plättchen des äusseren und einem des inneren Integuments ist von Mitte zu Mitte quer über eine Verbindung durch ein mehr oder weniger cylindrisches Röhrchen oder Säulchen hergestellt. Diese Säulchen werden verschieden beurtheilt und beschrieben. Salter betrachtete dieselbe als ursprüngliche Hohlräume, die erst später bei dem Versteinerungsprocess durch Kalkspath oder Gesteinssubstanz ausgefüllt worden seien, während das ursprüngliche kalkige Thiergehäuse in Folge des Versteinerungsprocesses verschwand und durch Gesteinssubstanz sich ersetzte.

Billings dagegen spricht sie unbezweifelt richtiger als ursprüngliche feste, von einem inneren Kanälchen durchzogene Säulchen an und stellt sie mit dem Amphidiscusschaft der Spongillen-Gemmulen in Parallele.

Untersucht man nun diese Theile mittelst Dünnschliffen in Längs-

---

4) Billings nennt sie Stolons, ein Ausdruck, der mir wenig zutreffend erscheint, und für den ich lieber Epistyl vorschlagen möchte.

und Querschnitten näher, so tritt uns bei *Receptaculites Neptuni* eine höchst merkwürdige Verschiedenheit entgegen. Sehen wir zunächst von den Fällen ab, dass diese Röhrchen oder Säulchen ganz ausgewittert in der That als Hohlräume sich darstellen, wie es nicht selten im thonigen Gestein der Fall ist, so findet man dieselbe theils von Kalkspath oder auch von Schwefelkies (in Folge von Zersetzung desselben auch durch Brauneisenstein), theils durch Gesteinsmaterial ausgefüllt, welches jedoch immer von dem die übrigen inneren Räume einnehmenden Gesteinssubstanz verschieden ist. In diesem letzteren Falle ist von einer inneren Struktur nichts erhalten und nichts zu beobachten. Man sieht weder ein Kanälchen in der Mitte, noch auch eine äussere Hülle oder Wandung. Die ausfüllende Gesteinsmasse grenzt sich zwar scharf von der umgebenden bald mehr kalkigen, bald mehr thonigen Umhüllung ab, aber ohne dass sich dazwischen irgend eine selbst auch nur dünnste Scheidewand bemerkbar macht, wie es wohl der Fall sein müsste, wenn die Säulchen mit einer wie immer beschaffenen Decke oder Hülle umgeben gewesen wären. Einige Exemplare, bei welchen die Ausfüllungsmasse rein thoniger Natur, jene des umhüllenden Gesteins von kalkiger Beschaffenheit war, wurden dazu benutzt mittelst sehr verdünnter Säure die Säulchen zu isoliren, um ihre Aussenseite genau untersuchen zu können. Diese erwies sich als ganz glatt; ich konnte weder Eindrücke wahrnehmen, wie sie etwa durch anliegende Spongiennadeln erzeugt worden wären, noch auch Durchlöcherungen, wie sie bei Porengängen vorkommen müssten. Nur schwache Längsstreifchen zeigten sich zuweilen gegen das äussere Ende. Zur Controlle wurden auch die Wandungen der Hohlräume untersucht, wenn durch Auswitterung oder künstlich bei kalkiger Ausfüllung der Säulchen diese durch Säuren entfernt waren. Auch diese Abdrücke lassen keinerlei Unebenheit der Säulenaussenflächen erkennen. Die Säulchen waren daher weder von grösseren Poren in den Seitenwänden durchbohrt, noch mit Spiculen bedeckt, wie man es wohl voraussetzen müsste, wenn die Säulchen als Hohlräume eines Schwammes aufgefasst würden. Bei den meisten belgischen Exemplaren besteht die Ausfüllungsmasse der Säulchen aus krystallinischem Kalkspath, welcher meist grossspäthig den ganzen Raum der Säulchen vollständig gleichmässig ohne irgend eine

Andeutung organischer Struktur ausfüllt, und auch nicht eine Spur von dem Vorhandensein eines inneren Kanals vermuthen lässt. Selbst gegen die äussere Wandung der Säulchen hin verräth meist nur eine feinere krystallinische Textur des Kalkspaths das Vorhandensein einer ursprünglichen kalkigen Säulchensubstanz. Doch beobachtete ich in Dünnschliffen von eisenhaltigen Exemplaren eine Erscheinung (T. A. Fig. 25) am äussersten Rande, die als feinste Poren gedeutet werden könnte. Es lassen sich nämlich durch Eisenoxyd dunkler gefärbte feine Striche hier bemerken, von deren Porennatur ich mich aber nicht überzeugen konnte. Sie fehlen übrigens bei den besterhaltenen schlesischen Exemplaren gänzlich. Höchst vereinzelt finden sich im Centrum der Säulchen dunklere Flecken oder in Folge der strahlig fasrigen Ausbildung des Kalkspaths um dieses Centrum schwache Andeutungen des inneren Kanals, die aber wegen der Seltenheit der Erscheinung durchaus nicht den Eindruck hervorbringen, als ob sie besondere Berücksichtigung werth wären. Würde die Untersuchung daher bloss auf die Vorkommnisse des niederrheinischen Devongebiets beschränkt geblieben sein, so würde wohl schwerlich mit Sicherheit das Vorhandensein eines inneren Kanals in den Säulchen festgestellt worden sein, das an schlesischen Exemplaren ebenso häufig wie deutlich sich wahrnehmen lässt (T. Fig. 17 u. 21). Man muss mit Recht nach der Ursache dieser so auffallenden Erscheinung fragen, die sicher nicht in einer Verschiedenheit der Organisation oder einem Speciesunterschied zwischen den rheinischen und schlesischen Vorkommnissen begründet ist. Es kann diess nur in der Art des Versteinungsprocesses liegen, bei welchem in rheinischen Devonschichten alle kalkhaltigen festen Skeletttheile der Form nach wohl erhalten blieben, während die ursprünglichen Kalktheilchen des Skeletts selbst aber mit der Zeit aufgelöst und durch in krystallinischer Ausbildung abgelagerten Kalkspath ohne Nachahmung der organischen Struktur ersetzt wurden. Einen ganz gleichen Vorgang muss bei vielen Versteinerungen des rheinischen Devonkalks stattgefunden haben, z. B. bei *Megalodus*, dessen Schale oft auch ganz durch Kalkspath ohne organische Struktur ersetzt ist. Bei den belgischen Exemplaren kommt ausserdem zuweilen auch Schwefelkies und an seiner Statt in Folge von Zersetzung Brauneisenstein als Ausfüllungsmasse der Säulchen vor. Die

Undurchsichtigkeit dieser Substanzen macht es von vornherein unmöglich, in solchen Fällen etwas über die innere Struktur zu ermitteln, so vortrefflich sonst die äussere Form und Gestalt sich erhalten hat. Zum Glück bietet sich an den schlesischen Exemplaren in grosser Uebereinstimmung sowohl an solchen aus der Berliner, wie Breslauer und Münchener Sammlung Gelegenheit, über die innere Beschaffenheit der Säulchen volle Gewissheit zu erlangen. Dr. Dames hat bereits ganz richtig an denselben das Vorhandensein eines centralen Kanälchens in den aus krystallinischem Kalk bestehenden Säulchen (a. a. O. S. 484) erkannt. Ich habe diese wichtige Beobachtung nur zu bestättigen, und kann hinzufügen, dass nach zahlreichen hergestellten Dünnschliffen dasselbe an schlesischen Exemplaren nie vergeblich gesucht wurde (Taf. A. Fig. 22°).

Der Kalk, aus welchem die meist dicken Wandungen der Säulchen bestehen, ist allerdings oft fein fasrig krystallinisch, und könnte als Aragonit angenommen werden. Ich halte die Struktur jedoch für eine uranfängliche organische, bedingt durch die ursprüngliche Beschaffenheit der Kalksubstanz, welche die Säulchen bildete, einmal, weil der Kalkspath eine eigenthümliche, federförmigstrahlige, bei reiner krystallinischer Ausbildung nicht vorkommende Faserung (T. A. Fig. 19, 21 u. 22) zeigt, bei der die feinen Fäserchen etwa so um die Höhlung des inneren Kanälchens schief geneigt stehen, wie die Fasen einer Feder zur Spuhle. Dazu kommt sodann, dass die Richtung dieser Neigung immer constant convergirend nach Aussen und divergirend nach Innen ist. Darin sehe ich einen sehr entschiedenen Beweis für die Richtigkeit der Annahme, dass dieser fasrigen Struktur eine organische Bildung zu Grund liegt, weil wohl sonst bei bloss zufällig strahliger Ausbildung des Kalkspaths die Fasern ebenso oft auswärts als einwärts geneigt vorkommen oder auch senkrecht und vertikal gestellt sich zeigen würden. Uebrigens bemerkt man zahlreiche paralle und unter dem Spaltungswinkel des Kalkspaths sich durchkreuzende Linien innerhalb der faserig streifigen Ausfüllungsmasse, welche den ferneren Beweis liefern, dass wir es hier weder mit Aragonit, noch mit fasrigem Kalkspath, sondern mit organischer Struktur zu thun haben. In Dünnschliffen gewinnt das Bild dieser Faserung eine grosse Aehnlichkeit mit jenem der Kalkstäbchen-

schicht der Muschelschalen. Diese Faserstruktur ist von ganz besonders grosser Wichtigkeit für die Beurtheilung der Natur der Säulchen. Wären diese homolog dem Amphidiskenschafte der Gemmulen, so müssten sie auch die innere Ausbildungsweise der Kalknadeln besitzen. Diese fasrige Struktur dagegen hat auch nicht die entfernste Aehnlichkeit mit jener, welche irgendwie bis jetzt bei Schwammnadeln beobachtet wurde. Es ist daher eine Gleichstellung der Säulchen von *Receptaculites* mit Nadeln von Spongien durchaus unbegründet.

Bei den Säulchen lässt sich meist eine concentrische schalige Absonderung erkennen, welche sich im Querschnitte (T. A. Fig. 21) durch concentrische dunklere Kreise, im Längsschnitte (T. A. Fig. 19) durch dunklere Längsstreifchen bemerkbar macht, während die eigentliche innere Höhlung einen sehr geringen Durchmesser zeigt. Die Linien deuten auf eine schichtenweise Verdickung der Säulchen durch Anlage neuer krustenartiger Verdickungsmassen und auf eine mit dem Alter zunehmende Verstärkung der Säulchen. Ich konnte sogar an einzelnen Exemplaren beobachten, dass an zerbrochenen Säulchen dergleichen Verdickungslagen rindenartig sich abblättern, und dass die dadurch bloss gelegte Oberfläche einer tieferen Schichtenlage ebenso vollständig glatt ist, wie die der Aussenfläche. Was die äussere Form der Säulchen anbelangt, so haben wir auch in dieser Beziehung eine höchst merkwürdige Formmannichfaltigkeit zu constatiren. Sehen wir vorerst von ihren Enden ab, so ist der Schaft der Säulchen im Allgemeinen von cylindrischer Form, jedoch nur in seltenen Fällen einiger Maassen regelmässig, meist vielmehr in der Mitte oder näher an der inneren Fläche etwas ausgebaucht und gegen die Enden zulaufend. Auf diese Weise gewinnen die Säulchen oft eine mehr Spindel- als Cylinder-ähnliche Form (T. A. Fig. 10, 11 u. 14). Nicht selten ist die äussere Wandung selbst etwas aus- und eingebogen, wellig. In noch anderen vereinzelten Fällen sind die sonst in ziemlich weiten Zwischenräumen stehenden Säulchen so dicht an einander gedrängt, dass sie sich gegenseitig berühren und die Seiten durch den Druck abgeplattet werden. Die Verjüngung nach aussen und innen ist meist eine allmählige, zuweilen aber auch eine rasche und an den Enden stellt sich regelmässig eine Einschnürung ein, die nach innen minder stark zu sein scheint, jedoch auch hier häufig beobachtet wurde. Das Verhältniss

der Länge zum Durchmesser ist sehr schwankend und erweist sich selbst an denselben Exemplaren je nach der Entfernung vom Centrum als sehr verschieden. Durchschnittlich beträgt die Länge das 4—5 Fache des Durchmessers, so dass bald langgezogene schlanke, bald kurze, dicke Sänlchen zum Vorschein kommen, abgesehen von Deformationen, welche die Säulchen durch Druck, Quetschungen und Verschiebungen reichlich erlitten haben. Sie finden sich häufig mitten entzwei gebrochen, seitlich schief gedrückt, gewaltsam gekrümmt und gebogen, selbst zusammengequetscht. In dem centralen Theile des Gehäuses sind die Säulchen stets von geringeren Dimensionen, als in dem randlichen. Beispielsweise beträgt der Durchmesser an einem Exemplar im Centrum 1 Millim. (in der Mitte gemessen) bei 8 Millim. Säulchenlänge, gegen 2 Millim. und 15 Millim. der Dimensionen an einem Randsäulchen. Ebenso wechseln auch die Zwischenräume, ia welchem die Säulchen zu einander stehen; sie sind geringer gegen die Mitte, als gegen den Rand; an einem Exemplare z. B. stehen die Säulchen 2 Millim. weit auseinander im Centrum, dagegen 4 Millim. am Rande. Doch unterliegen diese Verhältnisse, wie schon bemerkt, grossen Schwankungen. Nach Aussen und Innen stehen die Säulchen mit der Plattenhülle in direkter Verbindung. Wir haben diess bereits bei der äusseren Hülle erwähnt und gesehen, dass hier von jedem Säulchen ein in normaler Entwicklung vierarmiges Epistyl auslauft, welches mit dem oberen Theile der kalkigen Hüllplättchen gleichsam verzapft ist. Ehe die Säulchen sich zu diesem Epistyl der Plättchen ausbreiten, zeigen sie meist eine Einschnürung, welche bewirkt, dass hier die Theile der Oberflächendecke leicht abbrechen und auf diese Weise die äusseren Enden der Röhrchen unmittelbar sichbar werden. Bei gut erhaltenen ausgewitterten Exemplaren sieht man diese kragenartige Einschnürung fast bis zur Dicke des Kanälchens sehr bestimmt, wenn man senkrecht zu den Säulchen sieht (T. A. Fig.8 mit 13). Aber auch hierbei muss bemerkt werden, dass die Erscheinung nicht gleichstark bei allen Säulchen wahrzunehmen ist. Oberhalb dieser Einschnürung laufen nun die vier Arme gegen die vier Ecken der Plättchen, aber selten in gleicher Stärke und unter gleichem Neigungswinkel. In der Regel ist der zum Centrum gewendete radiallaufende Arm der am stärksten ententwickelte, der zugleich auch am weitesten gegen die Oberfläche vor-

dringt und selbst über die engeren Grenzen des zugehörigen Plättchens etwas vorragt, um, wie bereits erwähnt, in einen Ausschnitt des Nachbarplättchens eingreifend, eine Art Verzapfung zu bewirken. Weniger stark entwickelt ist in der Regel der gegenüberstehende vom Centrum weglaufende radiale Arm, und noch schwächer, häufig jedoch von gleicher Stärke zeigen sich die zwei Aestchen, welche in der Richtung der einzelnen Plättchenkreise verlaufen (T. A. Fig. 7 u. 15^b). Daher kommt es, dass, wenn man von Aussen her die Plättchen nach und nach immer tiefer abschleift oder abätzt, meist zuerst ein radialcentripetaler Ast zum Vorschein kommt, dann bei etwas tieferem Schleifen tritt weiter der radialcentrifugale hervor und endlich in noch etwas tieferer Lage erst zeigen sich die concentrischen Aestchen, die alle vier gegen Innen mit einander verbunden in ziemlich gleicher Stärke mit dem Säulchen sich vereinigen. Die Aestchen der verschiedenen Plättchen stehen nicht direkt mit einander in Verbindung, etwa in der Weise, dass sie eine ununterbrochene Kette bilden und ihr Kanälchen sich zu einem fortlaufenden Röhrennetz verbinden, sondern sie stossen, wo sie zusammentreffen, nur lose aneinander oder legen sich mit ihren Spitzen seitlich aneinander an (T. A. Fig. 4^b). Diese Verschiedenheit in der Stärke und Neigung der Aestchen oder Epistyle bedingt in erster Linie die so auffallende Verschiedenartigkeit in dem äusseren Ansehen verwitterter, ihrer Kalkhülle beraubter Exemplare. Diese Epistyle nämlich sind es vorzüglich, welche neben dem Abdruck der rautenförmigen Felder der einzelnen Plättchen ganz besonders häufig rinnenförmige Eindrücke oder netzartige[5]) Zeichnungen (schwarz von kohligen Theilen oder braun von zersetztem Schwefelkies) am Steinkerne zurücklassen. Sind die 4 Arme der Epistyle ziemlich gleichmässig entwickelt, so ergeben sich sehr regelmässige Zeichnungen von kreuzförmigen Furchen in den grubenförmig vertieften Rautenfeldern an der Stelle der verwitterten einzelnen Plättchen. Ein ganz anderes Aussehen nehmen aber jene Steinkerne an, bei welchen die radiallaufenden Epistyle sehr stark entwickelt, und die concentrisch gestellten dagegen fast

---

5) Zweifelsohne gehört in die Reihe dieser Erscheinungen auch *Protospongia fenestrata* Salt (in Quart Journ. 1864 p. 238), aus welchen Salter die gegitterte Zeichnung von Schwammnadeln ableiten zu dürfen glaubt, während Bowerbank sie auf durch Schwefelkies ersetzte Hornfibern bezieht.

bis zum Verschwinden verkümmert sind. Dann finden wir tiefe, nahe neben einander parallel verlaufende Furchen über die Oberfläche verbreitet und sehen Formen zum Vorschein kommen, die lebhaft an Eichwald's *Tretagonis* erinnern, ohne dass wir Gründe auffinden können, diese Verschiedenheiten in der Entwicklung auf andere als individuelle Eigenthümlichkeiten zu beziehen, weil mehrfacher Wechsel in dieser Beschaffenheit selbst an ein und demselben Exemplar sich bemerken lässt. Zwischen diesen beiden Extremen der Ausbildung der regelmässig kreuzförmigen Furchung und der enggestellten Kannelirung schwanken nun gewisse Mittelformen sich bald mehr der einen, bald mehr der andern Form annähernd. Am auffallendsten ist jene Mittelform, bei welcher die beiden seitlich concentrischen und der centripetale Theil ziemlich gleiche Stärke erlangen (Taf. A. Fig. 15[a] u. [b]). Ebenso eigenthümlich gestaltet sich das Aussehen, wenn nur das centripetale Epistyl zum Vorschein kommt und alsdann die Oberfläche mit einer Art herzförmiger Narben bedeckt erscheint. Dazu kommt noch der weitere Umstand, dass an ein und demselben Exemplare die Verwitterung sehr ungleich tief die Skeletttheile weggeführt hat und dass auch in Folge dieser Erscheinung verschiedenartige Oberflächenzeichen vorkommen von den einfachen Dupfen der Säulchen bis zu einer kaum angedeuteten Gitterung bei gut erhaltenen Exemplaren.

Wie schon erwähnt, schliessen sich die Plättchen der äusseren, wie der inneren Hülle bei vollständig erhaltenen Exemplaren zu sehr regelmässigen Reihen in einer Art Quincunx an einander an. Hierbei sind die Rauten der Plättchen so gestellt, dass sie mit zwei Ecken gegen das Centrum und gegen den Aussenrand liegen; dadurch entstehen in der Anordnung zwei Systeme schief ansteigender Reihen, welche in Folge der nach Aussen wachsenden Grösse der Plättchen und nicht selten durch Einschieben neuer Reihen (T. A. Fig. 3) in gekrümmten Linien verlaufen und dem Ganzen ein ungemein zierliches Aussehen verleihen.

Sehr ähnlich wie nach Aussen verhält sich auch die Struktur der inneren Hülle. Verfolgen wir zunächst die Säulchen, so sehen wir sie auch in der Richtung zur inneren Fläche an Dicke annehmen und endlich nahe an dem inneren Integument sich einschnüren, um über der Einschnürung ziemlich so, wie bei dem äusseren Integument be-

schrieben wurde, sich zu einer Stütze auszubreiten, welche der eigentlichen kalkigen Deckplatte zur Unterlage dient. Bei unserer Species erweist sich diese innere Ausbreitung jedoch nicht entschieden vierarmig, sondern es strahlen von den Säulchen eine grössere Anzahl dickerer unregelmässiger Aeste aus, welche selbst wieder Seitenverzweigungen zu besitzen scheinen. Sie zeigen sich nie in der Art mit der Hauptplatte verwachsen, dass sie durch dieselben gleichsam hindurchreichen. Daher gewahrt man bei allmähligem Abschleifen der Hülle nicht jene vierstrahligen Zeichnungen, welche uns an den Plättchen der äusseren Hülle entgegengetreten sind, sondern es kommt zuerst eine Art zelliger Struktur und tiefer dann eine verzweigte strahlige Zeichnung zum Vorschein, welche allerdings unzweideutig auf die ursprüngliche vierarmige Strahlen hindeutet (T. A. Fig. 8^b). Dass auch in diesen Plättchen Kanälchen verlaufen, ist nicht zu zweifeln; sie sind aber sehr schwierig zu erkennen, weil sie viel enger sind, als die an der äusseren Hülle. Ich habe sie gleichwohl ganz sicher beobachtet. Im Uebrigen sind diese unteren Plättchen nach Innen stark gefaltet, wie der Durchschnitt T. A. Fig. 18 lehrt, in dem zahlreiche Gesteinslamellen in diese Plättchen hereinragen. Es bestehen demnach auch die Plättchen des inneren Integuments aus einer Hauptkalklage und einer von den Säulchen ausgehenden strahligen Unterlage. Ueber die erstere breitet sich endlich noch eine meist kohlig schwarze undurchsichtige, sehr dünne oberflächliche Schicht aus, wodurch die dreifache Uebereinanderlage genau wie an den Plättchen der äusseren Hülle nachgewiesen ist; nur besitzt die Oberflächenlage im Inneren eine sehr deutliche, an Abdrücken scharf hervortretende Körnelung, die sich selbst in Dünnschliffen nachweisen lässt. Wenn man ein Plättchen mit seiner oberen Fläche auf Glas befestigt und nun von Innen her sorgfältig schleift bis zur Durchsichtigkeit, so treten zuletzt die warzenartigen Erhöhungen, welche die Oberfläche bedecken, als kleine rundliche helle Kreise in der nur halbdurchsichtigen braunen Zwischenmasse hervor (T. A. F. 5^b). Sie scheinen demnach Zellen zu bilden, welche von einer stark pigmentirten Wandung umschlossen werden. Aehnliches haben wir auch in dem Querschnitt der äusseren Hülle gesehen, doch konnte auf der Oberfläche selbst eine solche deutliche Körnelung nicht wahrgenommen werden, wie auf

der inneren Hülle an schlesischen Exemplar ganz ausgezeichnet zum Vorschein kommt.

Nach sehr sorgfältigen und an vielen Exemplaren wiederholten Beobachtungen kann ich auf das Bestimmteste versichern, dass bei *Receptaculites Neptuni* eine Durchbohrung des inneren Integuments, wodurch die inneren Hohlräume (ursprüngliche Sarkoderäume) zwischen den Säulchen mit der Aussenwelt in direktem Verkehr gestanden wären, weder in den Ecken der Plättchen, wie Billings bei der canadensischen Art angiebt, noch auch in der Mitte[6]) derselben vorkommt, dass diese Durchlöcherung mithin als Charakter des Genus nicht gelten kann. Ich bin vielmehr der Ansicht, dass die erwähnte Communikation nur durch Kanälchen an den Nahträndern der Plättchen vermittelt wurde, in welche sicherlich auch die Kanalverzweigungen der Säulchen auslaufen. Selbst an Exemplaren, bei denen die Plättchen ganz dicht an einander schliessen, machen sich in Dünnschliffen des Querschnitts feine Streifchen mit zickzackförmigem oder gewundenem Verlaufe bemerkbar, die man als die Gesteinsausfüllung derartiger Kanälchen ansehen muss (T. A. Fig. 18[i]). Dieser Annahme widerspricht auch die Beschaffenheit der Plattenränder nicht. Da nemlich die Plättchen des inneren Integuments dicker, als die der äusseren Decke sind, so lassen sie sich auch leichter isoliren. An manchen thonigen Exemplaren gelingt diess sogar sehr leicht. Die schmalen Ränder, mit welchen die einzelnen Plättchen an einander stossen, gestatten jedoch gerade an diesen thonigen Exemplaren, bei denen die thonige Gesteinsmasse zwischen die Fugen eindringend sich an diese Ränder angelegt hat, nicht ihr Relief sehr scharf zu beobachten. Soweit diess möglich ist, sieht man hier feine Kerbungen, Erhöhungen und Vertiefungen in vertikaler Richtung, die sich auf Kanälchen beziehen lassen. An Steinkernexemplaren, bei denen die zwischen die Nahtränder eingedrungene Thonsubstanz zuweilen als eine dünne Lamelle

---

6) An einigen Exemplaren sieht man allerdings in der Mitte der Plättchen deutliche Oeffnungen als Fortsetzungen der Kanälchen in den Säulchen. Es ergiebt sich jedoch bei näherer Untersuchung, dass diess nur als Folge einer theilweisen Abwitterung oder der Zerstörung der höheren Lage der Plättchen hervortritt und bei vollständig erhaltenen Exemplaren nie vorkommt. Sehr täuschend ist diese Erscheinung besonders, wenn die ganze obere Masse der Plättchen weggebrochen ist (T. A. Fig. 11).

sich erhalten hat und den Abdruck der Plattränder liefert, erkennt man gleichfalls diese Furchung an der krausenartigen Faltung dieser Lamellchen (T. A. Fig. 13). Cylinerische Absonderungen scheinen jedoch nicht vorhanden zu sein, welche man als direkte Abdrücke vom Kanälchen ansehen könnte.

Es erübrigt noch Einiges über diejenigen Theile der Versteinerungen mitzutheilen, welche constant und in jedem Falle von Gesteinssubstanz ausgefüllt sich zeigen. Es sind diess die Zwischenräume zwischen den einzelnen Säulchen und den Integumenten, welche nicht Zellen- oder Kammer-artig abgetheilt, sondern in unmittelbarem Zusammenhang unter sich stehen. Ich habe die Ausfüllungsmasse dieser Räume an sehr vielen Exemplaren mittelst Dünnschliffen untersucht und nie eine innere Struktur insbesondere nie eine Spur einer Spongiennadel darin aufgefunden, obi wohl von sonstigen kleinen Ueberresten manche dieser Ausfüllungsmassen gradezu strotzen. Selbst grössere Thierreste, Brachiopoden und Crinoideen-Stiele, gesellen sich zuweilen den kleineren bei und beweisen, da sie durch Poren nicht an ihre jetzige Fundstelle gelangt sein können, dass das Gehäuse in sehr vielen Fällen in zerbrochenem Zustande in dem versteinernden Kalkschlamm eingeschlossen werde. Immerhin ist es auffallend, dass man nicht auskrystallisirten und krystallinischen Kalk in diesen ursprünglichen Hohlräumen abgelagert findet, wie zu erwarten wäre, wenn letztere nur durch feine Kanälchen mit der Aussenwelt in direktem Verkehr gestanden hätten. Auch diese Thatsache deutet auf die leichte Zerbrechlichkeit des Gehäuses. In den seltenen Fällen, in welchen Schwefelkies oder als dessen Zersetzungsprodukt Brauneisenstein in den Hohlräumen vorkommt, konnte auch an diesen eine organische Form nicht erkannt werden. Diess alles drängt zur Annahme, dass diese Hohlräume bei Lebzeiten des Thiers von Sarkode ausgefüllt waren, die keine Spur einer Struktur an der Versteinerungsmasse zurückliess. Die wenigen Fälle, in welchen die Säulchen so dicht gedrängt neben einander stehen, dass kaum ein Zwischenraum für Sarkodeausfüllung vorhanden ist, dürften als abnorme Verhältnisse zu betrachten sein, welche gegen die herrschende Regel nicht ins Gewicht fallen. Eine Querverbindung der Säulchen untereinander durch Zwischenröhrchen oder Lamellen kommt nicht vor.

Fassen wir nun die Ergebnisse der bis ins Einzelne durchgeführten Untersuchung zusammen, so erkennen wir in *Receptaculites Neptuni* den Ueberrest eines Thierkörpers, dessen weiche Sarkodesubstanz durch ein aus einem System von Kalksäulchen und Kalkplättchen bestehendes festes Gerüste eingeschlossen war. Diese Skeletttheile waren von einem System von Kanälchen durchzogen, während die Sarkodenräume direkt unter sich und mit der Aussenwelt in Verbindung standen. Da die Stellung, Verbindung und hauptsächlich die kalkig fasrige Struktur der Säulchen nicht zulässt, letztere als homologe Bildung den Kalknadeln der Schwämme gleichzustellen, ausserdem jede Spur von Nadeln sonst fehlt, auch die Gesammtorganisation der Versteinerung, insbesondere das Fehlen freier Radialtuben, dann das Vorhandensein eines dicken kalkigen Integument auf der äusseren und inneren Seite jede Aehnlichkeit mit *Spongien* vermissen lassen, dagegen die innere Organisation mit jener der *Foraminiferen* sehr wohl in Uebereinstimmung steht, so erachte ich es nicht für in Frage gestellt, dass *Receptaculites* den *Foraminiferen* zugezählt werden muss.

Die Gründe zu dieser Zuweisung beruhen ganz auf den Ergebnissen eigener Untersuchung und sind nicht mit jenen identisch, welche Salter zu einem gleichen Schlusse geführt haben, deren Unrichtigkeit jedoch schon längst durch Billings erläutert wurde. In dieser Beziehung stimme ich mit letzterem vollständig überein, dass die Zwischenräume zwischen den Säulchen nicht ursprünglich Kalkschale und die Säulchen ursprünglich Kanalräume gewesen seien. Nach meiner speciellen Schilderung dieser Theile glaube ich nicht noch einmal auf eine weitere Erörterung dieser Frage eingehen zu dürfen. Es ist also nur eine reine Zufälligkeit, dass Salter für *Receptaculites* richtig die Forminiferennatur in Anspruch nahm. Von einer näheren Vergleichung mit *Orbitolites* kann natürlich um so weniger die Rede sein.

Billings, der, wie erwähnt, unsere Versteinerung für eine Spongie erklärte, stützte sich bei dieser Annahme allein auf die Natur der Säulchen, die er für Amphidiscen-artige Gebilde einer embryonalen Schwammform erklärte. So viel Verlockendes besonders im Sinne der Entwicklungslehre diese Auffassung an sich hat, so muss ich mich doch entschieden dagegen aussprechen, weil ich weder in den Säulchen, noch

im Uebrigen irgend eine homologe Bildung mit Schwämmen, sei es in ihrem reifen, sei es in ihrem embryonalen Zustande, festzuhalten vermag.

Unter den Paläontologen, welche sich in neuerer Zeit eingehenden mit der Untersuchung von *Receptaculites* beschäftigten, hat sich Dames gleichfalls wohl aus anderen Gründen, wie Salter, ganz bestimmt zu Gunsten der Foraminiferennatur ausgesprochen, dabei jedoch, wie mir scheint, mit Unrecht, vielleicht noch von der Salter'schen Ansicht befangen, die Verwandtschaft mit der Familie der *Orbitolitiden* aufrecht erhalten. Er hält es bei dieser Einreihung für zweckmässig, eine eigene Familie-*Receptaculitidae* aufzustellen (a. a. O. S. 487), welche den natürlichen Kreis der *Receptaculites*-ähnlichen organischen Körper in sich schliesse.

Indem ich *Receptaculites* den *Foraminiferen* zutheile, glaube ich zunächst auf Verwandtschaftsverhältnisse mit den *Dactyloporideen* hinweisen zu dürfen, welche einen Anschluss von *Receptaculites* an diese Familie natürlich erscheinen lässt. Ausser der Aehnlichkeit im Kanalsystem und der dichten Beschaffenheit der Schale ist es besonders die Zusammensetzung des Gehäuses aus einzelnen Plättchen (wie z. B. bei *Thyrsoporella cancellata*), welche beide Gruppen von *Foraminiferen* in ihrer natürlichen Stellung einander näher bringt. Immerhin aber besitzt *Receptaculites* Eigenthümlichkeiten genug, um eine gewisse Selbstständigkeit im System für sich in Anspruch nehmen zu dürfen. Es muss dabei hervorgehoben werden, dass von allen Thierresten der nachpaläolithischen Zeit keine einzige bis jetzt mir bekannt geworden ist, an welche *Receptaculites* sich enger anschlösse, als an die *Dactyloporideen,* dass dagegen innerhalb der paläolithischen Zeit selbst bereits eine Menge von Formen bekannt sind, welche mit *Receptaculites* als Genus vereinigt oder neben demselben als selbstständiges Geschlecht gestellt, eine Arten-reiche Familie bilden. Ihr Hauptcharakter besteht in der Zusammensetzung der äusseren und inneren dichten Wände des Gehäuses aus Einzelplättchen, welche durch dazwischen stehende Säulchen gehalten werden und die Sarkode rings einschliessen, sowie in dem Vorhandensein eines verzweigten Kanalsystems.

Was nun zunächst den Umfang des Species *R. Neptuni* anbelangt, so halte ich mich für überzeugt, dass sämmtliche Formen aus dem belgischen Devon, aus den Rheinlanden (Gerolstein) und aus dem oberschlesischen Fundorte Oberkunzendorf einer einzigen Species angehören. Selbst untersucht habe ich Exemplaren aus folgenden belgischen Fundorten[7]):

Boussu en Fagne mit Exemplaren, bei welchen Schwefelkies die Ausfüllung der Kanälchen bewirkt, wodurch die kreuzweise Zeichnung der Oberflächenfelder besonders schön hervortritt.

Charlemont mit thonigen verdrückten Exemplaren.

Chimay (Provinz Hennegau) sehr reiche Fundstelle, welche wohl die zuerst bekannten Exemplare geliefert hat. Neben den gewöhnlichen Kalkexemplaren kommen hier auch thonige vor, in denen selbst die Säulchen durch homogene Thonmasse ersetzt ist. Andere (Maladerie) zeichnen sich durch die gute Erhaltung des äusseren Integumentes besonders aus.

Comblain la Tour liefert ein kohlartiges Exemplar mit der Höhlung der inneren Fläche, welche bis zu der zweiten Lage der Plättchen abgewittert ist und die Kanalöffnungen zeigt.

Couvin mit sehr verwitterten Exemplaren.

Eprave au château romain mit z. Th. rostigen u. kiesigen Stücken.

Hampleau mit sehr grossen Exemplaren.

Marche mit dem erwähnten kleinen, fast cylindrischem Exemplare.

Marenne mit einem sehr *Crioideen*-reichen Gestein und weissspäthigen Ausfüllungen.

Nismes mit sehr gut erhaltenen Stücken.

Villers en Fagne mit gewöhnlichen Stücken.

Vodelée mit einem rothen Kalk und einer anscheinend etwas abweichenden Form, über die Zuverlässigeres zu ermitteln der schlechte Erhaltungszustand unthunlich macht.

Was die Synonymie mit *Coscinopora placenta* Goldf. (non Lonsd.) anbelangt, so hat es damit nach dem Goldfuss'schen Original seine Richtig-

7) Durch die nicht genug zu schätzende Liberalität von Hrn. Prof. Dewalque in Liege war ich in der glücklichen Lage, ein sehr umfangsreiches Material aus Belgien vergleichen zu können.

keit. Damit stimmt aufs genaueste ein Exemplar der Breslauer Sammlung, das mir Geh. Rath Römer zur Untersuchung mitgetheilt hat, überein. Als Fundort ist bei letzterem Gerolstein angegeben, während Goldfuss nur mit Zweifel die Eifel angiebt (T. A. Fig. 10 u. 11). Beide Exemplare zeichnen sich dadurch merkwürdiger Weise aus, dass auf der Innenseite die Plättchen in der Mitte die als Fortsetzung des Kanals der Säulchen zu erkennenden Oeffnungen zeigen. Ich halte diess nur für Folge der Zerstörung der äusseren Plättchenschicht Auch *Coscinopora sulcata* Goldf. gehört nach Roemer (II. Aufl. Leth. S. 158) zu derselben Art, und wurde nur irrthümlich als aus Schweizer Jurakalk stammend angegeben. Ich zweifle nicht an der Richtigkeit dieser Annahme

Bronn in seinem Nomenclator zieht auch *Ischadites Koenigi* Murch. zu derselben Art. Ein blosser Blick auf Murchison's Abbildung genügt jedoch, um uns zu belehren, dass hier von einer Artidentität nicht die Rede sein kann. Das allerdings nicht umfassende Material, das ich unter dem Namen *Ischadites Koenigi* aus verschiedenen Sammlungen zu untersuchen Gelegenheit fand, hat mich auf das Bestimmteste von dieser Art-Verschiedenheit überzeugt, wie andren Seits zugleich aber auch eine generelle Uebereinstimmung kennen gelehrt. Davon später ein Mehreres.

F. Roemer (II Leth. Bd. I S. 157) führt *Receptaculites Neptuni* ausser den rheinischen Fundorten: Vicht bei Stollberg unfern Aachen, aus dem Kalk der Eifel und auf der rechten Rheinseite aus den Lenne- und Calceolaschiefer von Plettenberg, Elspe, Bigge, Ramsbeck, Schönebeck, Gemmersbach u. s. w. noch von Oberkunzendorf an, von welcher Fundstelle mir gleichfalls sehr zahlreiche Exemplare zur Untersuchung aus der Berliner Universitätssammlung vorliegen. Obwohl bei letzteren die Säulchen durchschnittlich schlanker, als bei den belgischen Stücken sind, vermochte ich doch keinen specifischen Unterschied von letzteren aufzufinden. Von gleicher Lokalität stammt auch das Untersuchungsmaterial, welches Dames (D. geol. Z. XX S. 485) in seiner vortrefflichen Arbeit benützt hat.

Aus Frankreich finden wir eine Fundangabe im Devongebiete S. der Loire bei d'Archiac (Paléont d. l. France p. 52).

Auch Hall führt unsere Species freilich mit Fragezeichen aus dem silurischen Trentonkalke von Carlisle in Pensylvanien (Palaeont. of N. York 1847 Vol. I p. 68 Pl. 24 F. 3) auf und giebt bei der Beschreibung die Felder der Oberfläche als „Cells“ an, in denen sich die Oeffnungen der Säulchen „cylindric tube“ befänden. Die Form ist sicher mit *Receptaculites Neptuni* sehr verwandt. Indessen gestattet weder Beschreibung, noch die sehr dürftige Abbildung ein Urtheil über die Species zu fällen. Salter zieht diese Art fragweise zu seinem *R. occidentalis.*

Was endlich die Stellung der Schichten anbelangt, in welchen sich die genannte Art findet, so kommt unmittelbar mit derselben sowohl in Belgien, als bei Oberkunzendorf *Rhynchonella cuböides* vor und zwar ohne *Stryngocephalus Burtini.* In Uebereinstimmung mit *Gosselet* (Mem. sur le terr. prim. d Belgique 1860) und Dames (a. a. O. S. 506) glaube ich diesen Horizont auf die Grenze zwischen Ober- und Mitteldevon (mit einer Hinneigung zur oberdevonischen Stufe) setzen zu müssen.

Wir dürfen diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne noch einen Blick auf den Umfang der Formen geworfen zu haben, welche in die Gruppe dieser so eigenthümlichen Organismen zu gehören scheinen. Die hauptsächlichsten sind folgende.

A) Zu *Receptaculites* selbst bereits gezogen:

Receptaculites australis Salter (a. a. O. Pl. X F. 8—10) aus Neusüdwales.

„ *Bronni* Eichw. (a. a. O. S. 429 Pl. 27 F. 2) aus Untersilur-Kalk von Reval und auch von Galena.

„ *calciferus* Billings (Geol. surv. of Canada 1865 S. 378 297 F. 358) aus dem calciferous R. von Mingan Islands.

„ *canadensis* Billings (a. a. O. Fig. 362) *Ischadites can.* Bill. olim (geol. of Can. p. 309).

„ *carbonarius* Roem. (Jahresber. d. Schlesis. Gesells. 1871) aus dem schlesischen dem Kohlenkalk äquivalenten Schiefer von Rothwaltersdorf (Dames a. a. O. S. 488).

„ *elegantulus* Billings[8]) mit *R. calciferus.*

8) Diese und mehrere der folgenden Angaben aus Bigsby's Thesaurus siluricus 1868 S. 3 u. 4.

Receptaculites forniculosus Schloth. spec.
Escharites forn. Schloth.
R. orbis Eichwald.
„ *fungosus* Hall (Geol. Survey of Wisc. 1860) aus den Galenaschichten von Wisconsin.
„ *globularis* Billings von Wisconsin.
„ *hemisphaericus* Hall (a. a. O.) aus den Niagaraschichten von Wisconsin.
„ *infundibuliformis* Eaton aus den Obersilurschichten von N. York.
„ *insularis* Billings von Gamache Bay.
„ *Jonesi* Billings (a. a. O. Fig. 363) aus den unteren Helderbergschichten von Gaspé.
Oceani (Eichw ?). Nach Andrian aus den Kohlenschichten von Dobschan in Zipser Comitat (J. d. geol. K. 1859 S. 554)
„ *Jowensis* Owen (Rep. geol. Survey of Wis.) (Billings a. a. O. Fig. 364) aus dem Trentonkalk von Ottowa.
„ *occidentalis* Salter (Fig. a. Desc. of Canadian org. rem. Dec. I 1859 P. 43. 399. Pl. X F. 1—7) aus Canada.
„ *orbicularis* Hall von N. York. (?)
„ *orbis* Eichw. (Leth. ross. 1859 V L. S. 428 Pl. 27 Fig. 1) syn. *R. forniculosus* Schloth. spec. = *Escharites forniculosus* Schloth. (Petref. I S. 343). Vergl. Lethaea II Aufl. I S. 158 aus Untersilurkalk von Reval.
„ *Oweni* Hall. Billings (a. a. O. F. 359).
„ *subturbinatus* Hall aus Gallenaschichten von Illinois und Wisconsin.

B) Als *Ischadites* Koenig bezeichnet:

Ischadites antiquus Salter von N. Wales.
„ *altaicus* Eichw. (a. a. O. S. 437 Pl. 27 F. 4).
Zamia rossica Kutorga. (Verh. d. Min. Ges. zu Petersb. 1872 S. 7 Pl. 2 F. 3) aus rothem Korallenkalk vom Altai.
„ *bohemica* Barr. aus g^2 von Hlubocep in Böhmen.

Ischadites Eichwaldi Schmidt (Arch. f. Naturk. Liv. Estl- und Kurlands Ser. I Bd. II S. 232) aus untersilurischem Kalk von Wesenberg u. Haljal (Eichwald, Leth. ross. S. 436, Pl. 27, Fig. 3).

" *Grindrodi* Salter aus Wenlockschichten von Malvern.

" *Koenigi* Murch. (Siluria) aus den oberen Ludlowschichten und tiefer von Shropshire und aus 'E^2 in Böhmen.

" *occidentalis* Salter aus Untersilurschichten von Murray Bay, Huron.

" *tesselatus* Winch a. Marcy aus den Niagaraschichten von Chicago und Shropshire.

C) Als *Tetragonis* Eichwald aufgeführt:

Tetragonis Murchisoni Eichw. (a. a. O. S. 431 u. Urwelt v. Russl. Heft 2 S. 81 Pl. III F. 18) aus Untersilurkalk von Reval und Wesenberg.

" *sulcata* Eichw. (a. a. O. S. 432 Pl. 27 Fig. 5) aus untersilurischem Orthoceratitenkalk von Kirna.

" *parvipora* Eichw. (a. a. O. S. 433 Pl. 27 F. 6) aus Untersilurkalk von Reval.

" *Danbyi* M'Coy (Brit palaez. foss. Vol. 2 p. 62 Pl. I, D Fig. 7—8) aus unteren Ludlowschichten von Kendal.

D) Unter verschiedenen Bezeichnungen:

Escharites forniculatus Schloth. (Pet. I S. 343) = *Rec. orbis* Eichwald nach Roemer.

Coscinopora placenta Goldf. und *sulcata* Goldf. = *Rec. Neptuni* Def.

Coscinopora sulcata Owen (non Goldf.) (Rep. of geol. explor. of Jawa 1844 T. 7 F. 5 und Geol. Surb. of Wisconsin etc. etc. 1852 S. 633).

Escharipora recta (Hall) Eichw. a. a. O. S. 433 Pl. 27 Fig. 8).

Scyphia cornucopiae Goldf. (v. Dechen. Handb. v. d. la Beche S. 517) nach Roemer (a. a. O. S. 159).

Ohne Originalexemplare gesehen und untersucht zu haben, dürfte es gewagt erscheinen, über den Werth dieser unterschiedenen Gattungen und Arten entgültig entscheiden zu wollen. Soweit die Beschreibungen

und Abbildungen ein Urtheil zu fällen gestatten, möchte es gleichwohl kaum in Zweifel zu ziehen sein, dass die sämmtlichen Formen einem Genus zugehören und dass nur geringe Formunterschiede und durch den verschiedenen Grad der Abwitterung und Zerstörung hervorgerufene, nur scheinbare Verschiedenheiten allein Veranlassung zur Aufstellung mehrerer Genera gegeben zu haben scheinen. Auch Billings spricht sich in gleichem Sinne aus.

Direkt zu untersuchen hatte ich Gelegenheit nur: *Escharites forniculosus* Schl. (Original), dann ausser *Coscinopora placenta*, dessen Identität mit *Receptaculites Neptuni* bereits erörtert wurde, *Receptaculites* spec. Roemer von Galena in Illinois und *Ischadites Koenigi* aus dem Obersilur von Wisby auf Gotland, wozu zweifelohne auch die im Diluvialgeröll von Sadewitz in Schlesien ziemlich häufig gefundenen Stücke, gewiss gleichfalls von Gotland (oder Schweden im Allg.) verschwemmt, gehören (Breslauer Sammlung).

Von Schlotheims *Escharites forniculosus* zeigt das mir aus der Berliner Sammlung vorliegende Original, welchem die Etiquette: „Einzelne Stücke mit erhaltener feiner, netzförmiger Kruste des *Escharites fornicolosus*“ beiliegt, eine unzweideutige Uebereinstimmung mit *Receptaculites.* Es scheint ebenso wenig zweifelhaft, dass diese Form identisch ist mit Eichwald's *Receptaculites orbis*, wie dieser Autor selbst (a. a. O. S. 428) bestättigt, wesshalb nach allgemeinem Gebrauch dieser Art der Name *Receptaculites forniculosus* Schlothh. spec. zukommt. An dem von mir untersuchten Exemplare hat die äussere, freilich stark verwitterte Oberfläche das Eigenthümliche, dass die aus Kalkmaterial bestehenden rippenartig vorstehenden Zwischentheile zwischen den einzelnen Rautenfeldern sehr breit und von zahlreichen Pünktchen oder mäandrinisch verschlungenen Grübchen dicht besetzt sind, während die tiefer liegenden inneren Theile der Rauten die runden, von einer schwachen Wulst umzogenen, sonst glatten, gegen den allgemeinen Durchmesser der Säulchen am Ende etwas erweiterten Mündungen der Säulchen und nur angedeutet die von diesen auslaufenden vier Epistyle (Ausläufer) erkennen lassen. Man bemerkt die Durchbrechung der Zwischentheile an den Ecken durch diese Epistyle deutlich. Doch sind sie so dürfte erhalten, dass sie auf der abgewitterten Oberfläche nicht jene kreuzförmig-netz-

artigen Zeichnungen hervorrufen, welche bei so vielen Arten sich zeigen. Die abgewitterte innere Seite der Versteinerungen trägt keine oder doch nur schwache Andeutungen einer rautenförmigen Zeichnung, es stehen hier vielmehr die den Mündungen der Säulchen entsprechenden rundlichen, etwas erweiterten Vertiefungen in der Mitte flacher Grübchen, die den Rautenfeldern in ihrer inneren Fläche entsprechen, und deren Abdruck im Gestein darstellen.

In diesen Grübchen zieht sich zunächst um das Säulchen (ausgewittert ein rundes Loch) ein glatter Kranz mit einer schwachen Hohlkehle und nach aussen schwache radiale Fältchen, während der übrige Theil deutlich fein gekörnelt ist. Die Körnelung rührt offenbar von kleinen Punktgrübchen her, welche die innere Seite der Plättchen bedeckten. Was aber ganz besonders an dem mir vorliegenden Exemplar merkwürdig erscheint, das sind kleine warzenartige Erhöhungen, regelmässig zwischen den Säulchenenden so gestellt, dass sie ihrer Lage nach in einem Ecke der Plättchen, die nach schwachen Resten der erhaltenen inneren Hülle gleichfalls rautenförmig gestaltet sind, zu stehen kommen. Sie machen ganz den Eindruck von kleinen Zapfen, die als Ausfüllung von runden Löchern durch Gesteinsmaterial gelten können. Sind sie diess, so haben wir hier die von Billings an der canadensischen Art angegebene Durchlöcherung der inneren Hülle, durch welche die in den Zwischenraum zwischen den Säulchen vorfindliche Sarkode mit der Aussenwelt in Verbindung stand. Bei *Receptaculites Neptuni* konnten keine derartige Verbindungslöcher nachgewiesen werden. Es verdient vielleicht erwähnt zu werden, dass an dem vorliegenden Exemplare die kegelförmige Spitze des Gehäuses der Art eingedrückt ist, dass dieselbe wieder nach aufwärts gerichtet erscheint.

Die Säulchen sind verhältnissmässig dünn, schlank und beiderseitig ohne nennenswerthe Einschnürung in die Epistyle erweitert.

Ueber die innere Struktur der Säulchen konnte ich an den Dünnschliffen nichts ermitteln, da dieselbe ganz von spathigem Kalk ausgefüllt sind.

Eine Reihe von Exemplaren aus den obersilurischen Schichten von Wisby auf der Insel Gotland lag mir theils aus der Breslauer Sammlung unter der Bezeichnung *Receptaculites* spec., theils aus anderer Samm-

lung unter der Bezeichnung *Ischadites Koenigi* Murch. vor. Diese Exemplare zeichnen sich durch eine ausserordentlich verschiedene Grösse und die damit zusammenhängende äussere Beschaffenheit aus. Sie sind vorherrschend von kugeliger Form und stimmen in so hohem Grade mit der Abbildung von *Ischadites Koenigi* Murch. überein, dass ich diese Bestimmuug für richtig erachte, soweit sich diess ohne Autopsie englischer Exemplare, die mir nicht zur Disposition standen, überhaupt beurtheilen lässt.

Die kugeligen oder besser eiförmigen Exemplare von beiläufig 25 Millim. Höhe und 20 Millim. Durchmesser sind auf der Aussenfläche — wo diese besser erhalten ist — mit jenen rautenförmigen, in schiefen Reihen geordneten und in sehr zierlicher Weise übereinander reichlich vorkommenden Zeichnungen versehen, wie wir sie als die Aussenseite der Hüllen bei *Receptaculites* kennen gelernt haben. Sie sind von schwärzlicher Farbe und bestehen aus Brauneisenstein, der durch Zersetzung von Schwefelkies entstanden ist. Eine schwache Abwitterung lässt nun zunächst Streifchen von Mergel der Art, wie er das ganze Gehäuse ausfüllt, zwischen den Rautenfeldern hervortreten. Noch tiefer abgewitterte Stücke zeigen endlich jene merkwürdigen sich kreuzenden Striche und Linie, welche den tiefer liegenden Epistylen (Ausläufern) angehören und meist zugleich mit den kleinen rundlichen Flecken der Säulchenenden in den von den vier Rautenseiten her zulaufend gegen das Innere schwach vertieften Feldern sichbar werden.

In Bezug auf die Entwicklung der vier von jedem Säulchenende auslaufenden Epistyle herrscht nun eine grosse Mannichfaltigkeit, indem bald die radial gestellten, bald die concentrischen stärker ausgebildet sind. Die von jedem Säulchenende auslaufenden zwei horizontal gerichteten Epistyle sind stets gleichstark entwickelt; herrschen sie vor, so tritt die fast continuirlich ringförmig fortlaufende Streifung in den Vordergrund. Bei den radialen Epistylen zeigt sich meist nur der eine im Uebergewicht, und es entstehen auf diese Art Zeichnungen von der Form eines lateinischen T, aufrecht oder umgekehrt, je nachdem der stärkere Arm der centripetale oder der centrifugale ist.

Ist die Abwitterung noch stärker, so sieht man nur mehr die ab-

gebrochenen Enden oder Querschnitte der Säulchen, die im Innern oft noch aus unzersetztem Schwefelkies bestehen.

Der untere geschlossene Theil des Gehäuses ist meist eingedrückt, nicht spitzig zulaufend, und hier sind die Rautenfeldchen äusserst klein und fein. Am oberen Ende des Gehäuses ist eine grosse trichterförmige Oeffnung von durchschnittlich 5—8 Millim. Weite, welche das Gehäuse durchbricht und in den innern ganz gleichmässig mit Gestein ausgefüllten Raum führt. Die Wandung dieser trichterförmigen Oeffnung ist etwa unter 45° geneigt und etwa 4 Millim. dick bis zum inneren Hohlraum. Unter dem mir zur Verfügung stehenden Materiale befand sich kein Stück, an welchem Theile der inneren Hülle entblösst gewesen wären. Ich kann daher über deren Beschaffenheit nicht Näheres angeben.

Zerschneidet man ein Exemplar senkrecht in zwei Hälften, so kommen auf den Durchschnittsflächen sehr zahlreiche Säulchen zum Vorschein, welche stets senkrecht von der äussern zur innern Fläche gestellt sind, und von Unten nach Oben stetig an Länge und Durchmesser zunehmen, genau so wie bei *Receptaculites.* Auch zeigen sie ganz dieselbe Beschaffenheit und gegenseitige Stellung. Die meisten sind mit Brauneisenstein oder Schwefelkies, selten mit Kalkspath erfüllt, viele aber sind gänzlich oder theilweise zerstört und verschwunden. Ueber ihre innere Struktur lässt sich durch Dünnschliffe nichts feststellen. An der Oeffnung oben laufen sie der Neigung der Wände parallel und eine gefärbte Linie des Querschnitts deutet hier den Abschlus des Gehäuses an. Die Säulchen selbst sind sehr schlank und zart, in der Mitte etwas ausgebaucht und nach Aussen in die vier Epistyle allmählig erweitert, während nach Innen die Ausbreitung gegen die innere Decke mehr unregelmässig wulstig zu sein scheint.

Dieser vorherrschenden Form stehen Bruchstücke von derselben Fundstelle gegenüber, welche sich durch eine beträchtlichere Grösse und becherförmige Ausbreitung unterscheiden. Sie scheinen jedoch durch Zwischenformen und Uebergänge mit der ersteren enge verbunden zu sein. Nur reichliches Material, das mir abgeht, lässt es entscheiden, ob wir es mit einer besonderen Art zu thun haben oder mit einer bloss durch das Alter bedingten Abänderung.

Auch aus dem Diluvialgerölle von Sadewitz in Schlesien liegen mir

aus der Breslauer Sammlung höchst interessante vorzüglich erhaltene Exemplare vor.

Ein solches Exemplar von kugelig-eiförmiger Gestalt und von der Grösse der Gotlander Stücke besitzt eine obere enge Oeffnung und von dem unteren centralen Theile nach Oben rasch an Grösse zunehmende Plättchen von sechsseitigem Umrisse, welcher in der Weise aus der Rautenform hervorgeht, dass die beiden Ecken der Raute, welche radial gestellt sind, durch eine Linie abgestumpft sind, wie diess auch an *R. Neptuni,* wenn auch weniger stark, vorzukommen pflegt. Die einzelnen Plättchen sind durch feine Rinnen getrennt, gegen Innen selbst etwas vertieft, an den Rändern mit einzelnen den Rändern parallelen Linien, gegen die Mitte durch eine kreuzförmige Zeichnung, welche den Epistylen entspricht, verziert. An abgewitterten Stellen zeigen sich die radialen Epistylen, besonders die centripetalen, kräftig ausgebildet. Die Säulchen verhalten sich wie bei den Gotländischen Formen; im centralen untern Theile sin l ihre Enden so fein wie Nadelstiche und nehmen gegen die obere Oeffnung bis zu 0,35 Millim. Dicke und 5 Millim. Länge zu, während die Plättchen oben 1,5—2 Millim. Durchmesser besitzen. Ausser des mehr sechseckigen Umrisses dieser Plättchen zeigt sich sonst kein spezifischer Unterschied weiter und es dürften auch die auf sekundärer Lagerstätte in Schlesien aufgefundenen Formen derselben Art zugehören und den analogen Schichten Schwedens entstammen. Aus dieser Untersuchung geht unzweideutig hervor, dass wenigstens diese Form von Gotländischen *Ischadites* auch nicht im Geringsten von der Organisation des *Receptaculites* abweicht und daher kein Grund besteht, sie als besonderes Genus getrennt zu halten. Dasselbe scheint von allen sog. *Ischadites* zu gelten. Was insbesondere die Eichwald'schen Species anbelangt, so deutet der russische Paläontologe selbst bestimmt genug die Uebereinstimmung mit *Receptaculites* an und wenn der Mangel innerer Organisation bei ersterem als Unterscheidungsmerkmal gelten sollte, so beruht diess sichtlich auf einer irrthümlichen Annahme, da selbst die Zeichnung von *Ischadites altaicus* (a. a. O. T. XXVII Fig. 4) unzweideutig die Säulchen angiebt, wie das Gleiche auch von dem typischen englischen *Ischadites Koenigi* Murch. gelten darf.

Das Eichwald'sche Genus *Tetragonis* (a. a. O. S. 430) ist für

Formen aufgestellt, welche bis zu dem Hervortreten der sich in Längs- und Querstreifen kreuzenden Epistyle (sulci longitudinales et transversi) abgewittert sind, und welche zwar quer ziehende Säulchen (tubus cellulae) besitzen, aber keine Oberflächen-Zellen (plaques rhomboïdales) aufzuweisen hätten. Dass dieses vermeintliche Fehlen der Plättchen der äusseren Hülle nur Folge des Verwitterungszustandes ist, bedarf wohl kaum eines Nachweises. Und so stehe ich nicht an, auch diese unter *Tetragonis* eingereihten Formen als entschieden zu der Gruppe von *Receptaculites* gehörig zu erklären Ob bei diesem Umfange das Genus nicht vielleicht in mehrere Untergattungen zutheilen sei, mag einstweilen dahin gestellt bleiben, jedenfalls müssten diese Subgenera auf andern Unterscheidungsmomenten aufgebaut werden, als die sind, wodurch *Ischadites* und *Tetragonis* abgetrennt sind.

Noch erübrigt unter den verwandten Formen auf *Protospongia* hinzudeuten; namentlich ist es *P. fenestrata* Salter, über deren Natur sich Carter (An. a. Mag. of Nat. hist. 1849) Salter und Bowerbank (in Quart. J. 1864 S. 238, 239) letzterer in dem Sinne ausgesprochen haben, dass die genannte Versteinerung als Reste der durch Schwefelkies ersetzten Hornfasen einer *Spongia*, ähnlich wie bei *Spongionella* zu betrachten sei, während Salter dieselbe für wahre Spiculae erklärt, und meint, dass die Bowerbank'sche Annahme vielleicht auf *Ischadites* und *Tetragonis* anwendbar sei. Ich halte es dagegen für sehr wahrscheinlich, dass auch bei dieser Vesteinerung in der rautenförmigen Abgrenzung und in den darin kreuzweise verlaufenden Streifchen eine Zugehörigkeit zu der grossen Gruppe der *Receptaculites* sich verräth.

Dass noch Manches aus dem paläolithischen Reiche der Versteinerungen, namentlich aus den Gruppen der Schwämme, eines näheren sorgfältigen Studiums in Bezug auf innere Struktur und auf die Stellung, welche sie in der Reihe der organischen Wesen einzunehmen haben, werth wäre, darf wohl kaum hier noch weiter betont werden. Es steht wohl sicher zu erwarten, dass auf diese Weise eine Anzahl von Zwischenformen zwischen den in der jetzigen Lebewelt weiter auseinander gerückten Klassen und Ordnungen der einfachen organisirten Thiere sich werde auffinden lassen, welche geeignet sind, dem kaum mehr anzuzweifelnden Gesetze der continuirlichen Entwicklung alles Organische auf Erden zu immer festerer Stütze zu dienen.

Erklärung der Abbildungen auf Tafel A.

Figur 1 bis Figur 25 verschiedene Darstellungen von *Receptaculites Neptuni* Defr. und zwar:

„ 1 ein napfförmiges Exemplar in natürlicher Grösse von Aussen gesehen von Chimay.

„ 2 ein becherförmiges Exemplar mit einseitig gewendeter Zuspitzung nach unten und abgerundetem oberen Rande in natürlicher Grösse von Chimay.

„ 3 ein Theil der äusseren Hülle von Unten gesehen in natürlicher Grösse von Chimay; die Oberfläche ist theils erhalten (a), theils (b) bis zu den Epistylen und den Enden der Säulchen abgewittert. Bei c setzt sich in den nach schiefen Reihen geordneten Rautenfeldern der Oberflächendecke eine neue Reihe ein.

„ 4 eine doppelt vergrösserte Parthie der Aussenfläche der Figur 3; die Rautenfelder und ihre äussere Beschaffenheit darstellend, a) mit guterhaltener b) mit bis zu den Epistylen verwitterter Oberfläche.

„ 4b ein Thleil dieser Aussenfläche im Dünnschlifle 20 mal vergrössert, um die Zusammensetzung und Beschaffenheit der äussersten Lage (? Epidermis) der Rautenplättchen, welche die äussere Hülle zusammensetzen, zu zeigen.

„ 5 ein nach Innen blossgelegtes trichterförmig vertieftes Exemplar in natürlicher Grösse von Oben gesehen, um die Zusammensetzung der inneren Decke aus ähnlichen Rautenplättchen und wo diese abgewittert sind, die inneren Enden der Säulchen zu zeigen. Der obere Rand ist abgebrochen oder unvollständig erhalten und zeigt desshalb die querlaufenden Säulchen (s). Fundort: Chimay.

„ 5b ein Theil der inneren Oberfläche in ihrer äussersten (? Epidermis) Schicht mit ausgezeichnet feiner Punktirung in Dünnschliffen 20 mal vergrössert. Diese feine Punktirung rührt von Grübchen in der Oberflächenschicht her, weil auf dem Steinabdrucke dafür kleine Wärzchen erscheinen. Exemplar von O. Kunzendorf.

„ 6 ein Theil der äusseren Oberfläche von Figur 3, die verschiedene Art darstellend, in welcher durch tiefere oder seichtere Abwitterung die Oberflächenzeichnung sich ändert.

„ 7 ein Theil der äusseren Oberfläche von einem Exemplar von O. Kunzendorf, künstlich abgeschliffen bis zum deutlichen Hervortreten der Epistyle, von welchen der centripetale über die engeren Grenzen des zugehörigen Plättchens hinaus reicht und in einen Ausschnitt des Nachbarplättchens hinein greift.

„ 8 ein Theil der inneren Oberfläche von Figur 5 in natürlicher Grösse mit den sichbaren Enden der Säulchen und ohne Andeutungsn von vierstrahligen Epistylen.

„ 8b ein Theil der inneren Oberfläche eines Exemplar's von Oberkunzendorf, schwach abgeschliffen in natürlicher Grösse.

„ 9 das Bruchstück eines Exemplars von Original zu *Coscinopora placenta* Goldf., die Rautenfelder der äusseren Hülle darstellend in natürlicher Grösse in ganz übereinstimmender Beschaffenheit mit einem Exemplar der Breslauer Sammlung von Gerolstein. Bei s ist die Oberfläche der Plättchen bis zum Hervortreten der Epistyle künstlich abgeschliffen.

Figur 10 Dasselbe Bruchstück von der Seite gesehen; dasselbe zeigt in der Auswitterung die die einzelnen beiden Hüllen verbindenden Säulchen (s... s.) und ihre äussere (a) und innere Ausbreitung (i) an den Hüllen in natürlicher Grösse.

„ 11 dasselbe Bruchstück die innere Hülle zeigend mit Vertiefungen (s) in Mitte der Rautenfelder, als ob hier eine Durchlöcherung vorhanden gewesen wäre. Diese Vertiefungen entsprechen den Enden der Säulchen und sind entstanden durch Wegbruch der äusseren Lage der Hülle.

„ 12 ein Theil der inneren Hülle nach der Auswitterung des Kalkes, den Abdruck der Innenseite dieser Hülle in der umgebenden Gesteinsmasse zeigend von O. Kunzendorf.

„ 13 ein Theil von Figur 12 zweimal vergrössert, um die hin- und hergeschlungene Faltelung der zwischen den Plättchen eingedrungenen Gesteinsmasse, die kragenartige Einschnürung der Säulchenenden und die radiallaufenden Rippchen (im Abdrucke) der Epistyle zu zeigen.

„ 14 ein Stückchen des Gehäuses, die innere Fläche und die Säulchen zeigend, welche in einem Querbruche in Folge von Verwitterung blossgelegt sind an einem Exemplar von Ober-Kunzendorf.

„ 15a ein Stückchen der äusseren Fläche eines abgewitterten Exemplar von Ober-Kunzendorf mit den sehr vorherrschenden radialen und nur angedeuteten parallelen Epistylen und der feinen Faltelung der Säulchenenden, da wo sie eingeschnürt sind.

„ 15b desgleichen eine einzelne Gruppe der von einem Säulchenende ausgehenden Epistyle und das Ende der Säulchen oberhalb ihrer Einschnürung.

„ 16 ein Querschnitt durch das Gehäuse eines Exemplares von Ober-Kunzendorf die Durchschnitte der äusseren (a-ai) und der inneren (i-ia) Hülle mit ihren doppelten Lagen (a) und (ai), dann (i) und (ia), die Säulchen in kalkspathtiger Ausfüllung, (s) die Zwischenräume von Gesteinssubstanz ausgefüllt und die Durchschnitte einzelner Epistyle (0) zeigend.

„ 17 ein Querdurchschnitt in einem Dünnschliffe wie Figur 16 an einem aus schwarzem Kalk bestehenden Exemplar von Ober-Kunzendorf: a) die äussere, i) die innere Hülle, beide zerbrochen, mit zwischen die Fugen eingedrungener Gesteinssubstanz, in der Mitte mit den Querschnitten der Epistyle und den feinen Höhlungen in denselben. Die Säulchen sind schief durchschnitten und zeigen ihre strahlige fasrige Struktur und ihre innere Höhlung; an den Enden erkennt man an der eingedrungenen Gesteinssubstanz ihre Einschnürungen. r sind die Zwischenräume. Natürliche Grösse.

„ 18 ein Querschnitt im Dünnschliffe in 5 maliger Vergrösserung (Ober-Kunzendorf) mit den beiden äusseren (a und ai) und den inneren Hüllen (i und ia), einer äusseren schwarzen Oberflächenschicht (e-e) den Säulchen (s) und zahlreichen, in der inneren Hülle sichtbaren, von Gesteinssubstanz gebildeten Lamellen, welche voneiner starken Faltelung der inneren Epistyle herrührten; in der äussern Hülle zeigen sich die Durchschnitte von Epistylen und ihren innern Höhlungen. Alle Skeletttheile sind durch Kalkspath ersetzt, die Zwischenräume (r) durch Gesteinssubstanz ausgefüllt.

„ 19 ein Querschnitt im Dünnschliffe in 5 maliger Vergrösserung, die innere Struktur eines Säulchens darstellend an einem Exemplar des schwarzen Kalkes von Ober-Kunzendorf. Hier ist die strahlig-fasrige Struktur der Säulchen und der inneren Kanäle sehr deutlich zu sehen. Die übrigen Buchstaben wie bei Figur 18. Die parallelen Längsstreifen der Säulchen deuten die schalige Zusammensetzung ihres Kalkkörpers an.

„ 20 stellt einen Durchschnitt ähnlich wie in Figur 19 in dem oberen Theile dar, um die äussere Lage der Hülle, welche eine zellige Struktur zu besitzen scheint (e) zu zeigen. Bei z sieht man die Art der Aneinanderlage der Epistyle verschiedener, aber benachbarter Säulchen.

Figur 21 ein Säulchen im Querschnitte von Oben gesehen mit ringförmig abwechselnd helleren und dunkleren Lagen der Faserstruktur und in der Mitte mit der Oeffnung des Kanälchens in 5 maliger Vergrösserung an einem Exemplar von Ober-Kunzendorf.

„ 22 ein Querschnitt durch das Gehäuse eines vorzüglich erhaltenen Exemplares von Ober-Kunzendorf, mit den Säulchen (s), den Durchschnitten der äusseren Epistyle, ihren Kanälchen (0) und den unregelmässigen Epistylen der inneren Hülle (i).

„ 23 ein in merkwürdiger Weise ausgewittertes Exemplar im Mergelkalk in 8 theilige pyramidale Stückchen gespalten und in der Mitte mit den runden Enden der Säulchen versehen.

„ 24 ein Stückchen der ausgewitterten Oberfläche bis zu beginnender Blosslegung der Epistyle, die zackig gewundenen Ränder der Plättchen besonders deutlich zeigend.

„ 25 ein Stückchen eines Säulchens im Längsschnitte, welches bei kalkspathiger Ausfüllung am Rande eine Art Wandung und eine Durchlöcherung derselben durch Poren zu zeigen scheint. Diese Erscheinung rührt jedoch nur von einer Art Inkrustirung her. Dünnschliff in 20 maliger Vergrösserung.

„ 26 und 27 *Receptaculites forniculosus* Schloth spec. Originale der früheren Schlotheimischen Sammlung.

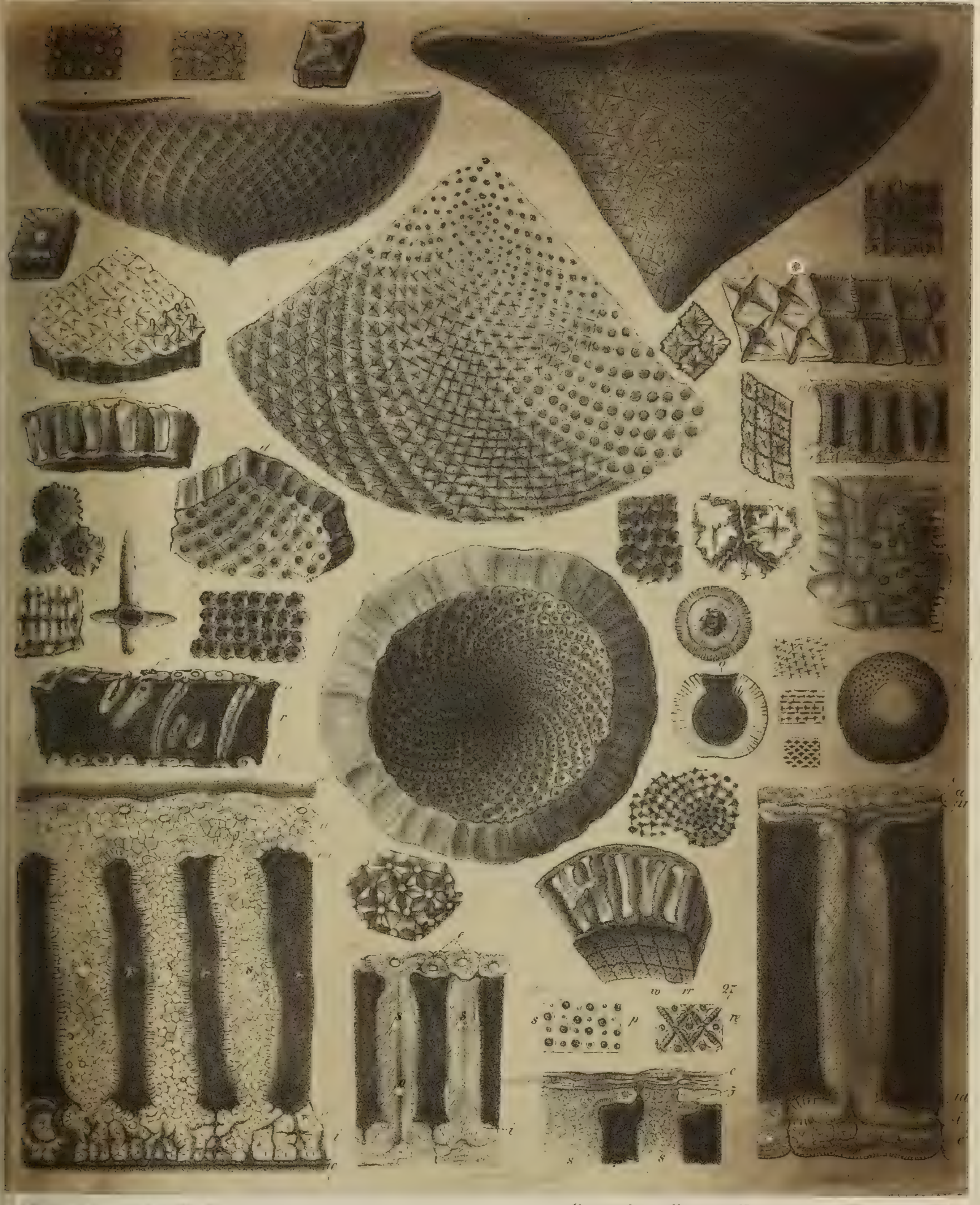
„ 26 ein Stückchen der abgewitterten inneren Hülle darstellend mit den Ausgängen der Säulchen (s) und eigenthümlichen warzenförmigen Erhöhungen (p), vielleicht Abdrücke von grösseren Porenlöcher durch die innere Hülle.

„ 27 ein Stücken der abgewitterten äussern Oberfläche mit den dicken Zwischenwülsten (w), den Ausgängen der Säulchen (s) und den vier Epistylen (Ausläufer) und zwar den stärker entwickelten radialen (r r) und den schwächer parallel laufenden (r e).

„ 28 ein Exemplar des sogenannten *Ischadites Königi* Auct. von Wisby auf Gotland in natürlicher Grösse von oben gesehen mit der grossen Oeffnung.

„ 29 dasselbe durschgeschnitten in natürlicher Grösse, die grosse Oeffnung (0) und die diese einschliessende trichterförmige Wand, sowie rings die radial gerichteten Säulchen zeigend.

„ 30 die Ueberreste der Epistyle der äusseren Oberfläche an etwas abgewitterten Exemplaren derselben Art.



Gümbel: Beitr. z. Kenntniss v. Receptaculites.


NATURAL H.STORY.

Beschreibung

eines

Apparates zur Untersuchung der gasförmigen Ausscheidungen des Thierkörpers.

Von

Carl Voit.

Beschreibung

eines

Apparates zur Untersuchung der gasförmigen Ausscheidungen des Thierkörpers

von

Carl Voit.

(Mit Tafel I. II. III.)

Vor nunmehr 15 Jahren hatten die von Bischoff und mir gewonnenen Resultate über den Eiweissverbrauch des fleischfressenden Thieres zu dem Baue des grossen Respirationsapparates im physiologischen Institute durch Pettenkofer geführt.

Es hatte sich bekanntlich durch mühsame Untersuchungen ergeben, dass man im Stande ist, die Grösse des Umsatzes der stickstoffhaltigen Stoffe, vor Allem des Eiweisses im Thierkörper aus dem im Harn und Koth ausgeschiedenen Stickstoff, so weit genau als es für Fragen der Art zu wissen nöthig ist, zu entnehmen[1]). Aber über den Verbrauch der stickstofffreien Stoffe wie der Fette oder Kohlehydrate konnte nichts aus diesen Untersuchungen des Harns und Koths entnommen werden, es mussten zu dem Zwecke alle Ausscheidungsprodukte des Körpers, also auch die gasförmigen, in den Kreis der Untersuchung gezogen werden.

Jedoch war aus den annähernden Berechnungen von Bischoff und mir schon so viel zu ersehen, dass in der Zersetzung der stickstofffreien

1) Voit, physiologisch-chemische Untersuchungen 1857 S. 1. — Annalen der Chem. u. Pharm. 1862. Suppl. Bd. 2. S. 238. — Zeitschrift f. Biologie 1866. Bd. 2. S. 6 u. 189.

Stoffe und in der Aufnahme des Sauerstoffs dieselben mächtigen Verschiedenheiten vorkommen, wie in der Zersetzung der stickstoffhaltigen Stoffe, und dass die Erkenntniss des gesammten Stoffzerfalles im Thierkörper für die Entwicklung der Lehre von der Ernährung von wesentlicher Bedeutung sei.

Es gelang nun Pettenkofer einen Apparat zur Untersuchung des Gaswechsels auszudenken und herzustellen [1]), der wie die damit angestellten Controlversuche beweisen, genaue Resultate gibt und der ferner, wie die vielen mit ihm gemeinschaftlich von Pettenkofer und mir [2]) an Hunden und Menschen ausgeführten Versuche darthun, allen Anforderungen entspricht. Man sollte wenigstens denken, der Apparat habe nach der Bereicherung unserer Kenntnisse über die Vorgänge im Thierkörper durch die Respirationsversuche am Hunde bei Hunger, bei ausschliesslicher Zufuhr von Fett und Kohlehydraten, bei Fütterung mit Fleisch, dann mit Fleisch und Fett, Fleisch und Kohlehydraten, ferner durch die Untersuchungen über den Stoffverbrauch des normalen, des diabetischen und des leukämischen Menschen sich bewährt und seinen Zweck erfüllt.

Ueberblicken wir sämmtliche Arbeiten, zu welchen der Apparat vorwaltend oder nebenbei gedient hat, so gewahren wir darunter theils Thatsachen, welche gegenwärtig bereits schon als selbstverständlich angesehen und ohne Nennung der Autoren weiter verwendet werden, theils solche, welche zwar feststehen, aber vorläufig noch ignorirt werden.

Es gelang uns zu zeigen, dass bei dem hungernden Hunde wirklich nur Eiweiss und Fett zerstört wird, da der in 24 Stunden ausgeschiedene und bestimmte Stickstoff und Kohlenstoff, auf Eiweiss und Fett berechnet, genau so viel Sauerstoff zur Verwandlung in die Endprodukte, welche durch Nieren, Darm, Haut und Lungen ausgeschieden werden, braucht, als in der gleichen Zeit durch die Respiration aus der Luft in den Kreislauf eintritt. Die Zwischenglieder werden also in dieser Zeit völlig in die Ausscheidungsprodukte umgewandelt. — Das Gleiche

1) Pettenkofer, Annalen der Chem. u. Pharm. 1862. Suppl. Bd. 2. S. 1,

2) Pettenkofer u. Voit, Zeitschrift f. Biologie 1866. Bd. 2. S. 459. — 1867. Bd. 3. S. 380. — 1869. Bd. 5. S. 319 u. 369. — 1871. Bd. 7. S. 433. — 1873. Bd. 9. S. 1 u. 435. —

stellte sich bei Zufuhr von reinem Fleisch heraus; es war bei mittleren Mengen von reinem Fleisch möglich die Elemente der Einnahmen genau in den Ausgaben wieder zu finden d. h. den Körper damit auf seiner Zusammensetzung zu erhalten, und den Verlust von Eiweiss und Fett zu verhüten. Bei geringeren Mengen von Fleisch wurde noch Eiweiss und Fett vom Körper abgegeben, bei grösseren gelangte sowohl Eiweiss als auch Fett zum Ansatze. Von ganz besonderer Bedeutung für die Auslegung der unter dem Einflusse der Fette und Kohlehydrate erhaltenen Versuchsresultate und für die Entwicklung der Lehre von der Fettbildung im Thierkörper wurde der letztere von uns zum ersten Male sicher geführte Nachweis, dass bei der normalen Zersetzung des Eiweisses Fett sich abspaltet. — Durch Zusatz von Fett oder Kohlehydraten zu einer kleinen Menge von Fleisch erhält sich der Körper auf seiner Zusammensetzung, während man ohne die stickstofffreien Substanzen zum gleichen Zwecke bedeutende Fleischmengen braucht. — Es gelingt leicht schon durch geringe Gaben von Fett eine gewisse Menge von Fett am Körper zum Ansatz zu bringen; das Fett wird im Körper ungleich schwerer zerstört als das Eiweiss, denn während letzteres unter Umständen ganz zerfällt, kann ersteres abgelagert werden. Es lassen sich die hier stattfindenden Verhältnisse ganz einfach ableiten, wenn man bedenkt, dass bei dem Zerfalle des Eiweisses stets eine gewisse Menge von Fett als Produkt auftritt und dass dieses leichter weiter angegriffen wird als das aus dem Darme aufgenommene Fett. — Die Bedeutung der Kohlehydrate stellte sich nach unseren Untersuchungen als eine ganz andere dar, als bis dahin angenommen worden war. Während der Nachweis einer Ablagerung von Fett im Organismus bei Fütterung mit Fett sehr leicht gelingt, ist ein solcher für die Kohlehydrate, selbst bei den grössten Quantitäten derselben, nicht möglich; stets erschien, auch in den äussersten Fällen, der Kohlenstoff der Kohlehydrate in den Ausscheidungen wieder und es blieb nur so viel Kohlenstoff zurück als dem aus dem Eiweiss möglicherweise entstandenen Fett entspricht. Im Thierkörper werden, wie aus unseren Versuchen unwiderleglich hervorgeht, ganz bedeutende Mengen von Zucker bis zu Kohlensäure und Wasser zerlegt und oxydirt, während die meisten Physiologen auf nicht

beweisende Versuche gestützt[1]) annehmen, dass der Zucker im Thier nicht verbrenne, und Viele darauf eine Erklärung der Zuckerharnruhr aufbauen. Die Kohlehydrate unterscheiden sich demnach in ihrer Wirkung auf die stofflichen Vorgänge im Thierkörper in ganz bestimmter Weise von den Fetten; sie schützen nur das aus dem gleichzeitig zersetzten Eiweiss hervorgegangene Fett vor dem weiteren Zerfalle. In Verhütung der Fettabgabe vom Körper thun 175 gr. Kohlehydrate die gleichen Dienste wie 100 gr. Fett; man wird sich in dem Getriebe der Zersetzungen im Thierkörper nur dann zurecht finden, wenn man die von uns gefundenen Thatsachen festhält, dass am leichtesten das Eiweiss und die Kohlehydrate zerlegt werden, jedoch ungleich schwieriger die Fette, mögen sie aus dem Darm eingetreten sein oder im Körper aus dem Eiweiss sich abgetrennt haben. — Es konnten nach allen diesen Erfahrungen über die Gesammtzersetzung im Körper unter dem Einflusse der verschiedensten Nahrungsstoffe angegeben werden, welche Stoffe und wieviel davon man darreichen müsse, um einen Körper auf seiner Zusammensetzung zu erhalten oder auf eine gewünschte Zusammensetzung zu bringen, wodurch in das eigentliche Gebiet der Ernährung eingedrungen wurde.

Vor Allem wichtig für die Vorstellungen über die Zersetzungen im thierischen Organismus wurde die Verfolgung der Sauerstoffaufnahme. Früher hatte man die Idee, der Sauerstoff wäre die nächste Ursache für die Zersetzung; man meinte, es werde in einen Thierkörper eine bestimmte Menge von Sauerstoff aufgenommen, der dann die Stoffe oxydire. Aus unseren Versuchen ging dagegen hervor, dass die Sauerstoffaufnahme unter sonst gleichen äusseren Verhältnissen äusserst verschieden ist, und dass die Stoffe im Thierkörper nicht nach ihrer Verwandtschaft zum Sauerstoff zerstört werden und dabei eine gewisse Menge von Sauerstoff in Beschlag nehmen müssen. Ich habe an vielen Stellen[2]) ausgesprochen, dass der Sauerstoff nicht die nächste Ursache des Zerfalles der Stoffe ist; die Bedingungen des Zerfalles

1) Scheremetjewski, Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss., 1868 S. 154; siehe dagegen Voit, Zeitschr. f. Biologie 1873. Bd. 9. S. 508.

2) Zeitschr. f. Biologie 1869. Bd. 5. S 169; 1870. Bd. 6. S. 388; 1871. Bd. 7. S. 197, 455, 465, 493; 1872. Bd. 8. S. 383; 1873. Bd. 9. S. 32, 436, 526.

finden sich in den Zellen des Organismus, die Sauerstoffaufnahme richtet sich umgekehrt nach der Menge der Zerfallprodukte und ist eine secundäre. Obwohl ich den fundamentalen, früher von allen Physiologen getheilten Irrthum, dass der Sauerstoff der Zerstörer im Thierkörper sei, aufgedeckt und namentlich Liebig gegenüber meine auf die ausgedehntesten Versuche gegründeten Vorstellungen vertheidiget habe, so nehmen die einen doch keine Notiz davon und behalten wohlgemuth die falsche Meinung bei, Andere, welche auf anderem Wege zu der gleichen Vorstellung wie ich gekommen sind, verschweigen beharrlich, dass längst vor ihnen aus zahlreichen Bestimmungen der Gesammtaufnahme von Sauerstoff in den Körper während 24 Stunden das Gleiche erschlossen worden ist.

Nachdem wir von der früheren allgemein gehegten Vorstellung einer direkten Verbindung des Sauerstoffs mit dem Kohlenstoff und Wasserstoff der Stoffe im Thierkörper uns losgelöst hatten, konnte ich [1]) es aussprechen, dass es sich im Körper um allmähliche Spaltungen handle, bei denen der vorhandene Sauerstoff nach und nach eintritt; ich hob zugleich hervor, dass bei den meisten sogenannten Verbrennungen z. B. des Holzes, des Fettes etc. es ebenso ist, da auch dabei durch die Anzündungstemperatur erzeugte Spaltungsprodukte sich allmählich mit dem Sauerstoff verbinden. Ich kam so durch unsere Versuche für den Gesammtkörper zu der gleichen Ansicht, welche früher schon Hermann [2]) gestützt auf seine Beobachtungen für die thätigen Muskeln, welche trotz Abwesenheit von freiem Sauerstoff fortfahren Kohlensäure zu bilden, ausgesprochen hat, dass nämlich bei der Muskelarbeit nicht eine Oxydation, sondern eine Spaltung einer complicirten Substanz stattfindet. Pflüger [3]) schliesst aus seiner Beobachtung, nach welcher Frösche ohne eine Spur von Sauerstoff noch lange fortfahren Kohlensäure zu bilden, ebenfalls, dass bei dem Lebensprocesse nicht eine direkte Oxydation, sondern eine Dissociation sauerstoffreicher Verbindungen gegeben sei und findet den Keim dieser Ansicht in der vorzüglich gegen mich gerichteten Abhandlung von Liebig [4]) über die Quelle der Muskelkraft, ohne von den

1) Voit, Zeitschr. f. Biologie 1869. Bd. 5. S. 169; 1870. Bd. 6. S. 321.
2) Hermann, Gas- und Stoffwechsel der Muskeln 1867.
3) Pflüger, Arch. f. d. ges. Physiologie 1872. Bd. 6. S. 52.
4) Liebig, Sitz.-Ber. d. k. Akad. d. Wiss. 1869. II. S. 432.

früheren ganz bestimmten Angaben von Hermann und denen von mir nur das Geringste zu erwähnen.

Wir haben mit dem grossen Respirationsapparate nicht nur Untersuchungen an Hunden, sondern auch an Menschen angestellt, und zwar an gesunden und kranken. An normalen Menschen wurden dabei zum ersten Male alle Ausscheidungsproducte controlirt und die Grösse der Umsetzungen festgestellt und zwar bei Hunger und verschiedenster Kost bei einem kräftigen Arbeiter und einem schlecht genährten Individuum. Es wurde beim Menschen die wichtige Thatsache gefunden, dass die Sauerstoffaufnahme und die Kohlensäureabgabe bis zu einer gewissen Grenze zeitlich von einander unabhängig sind. Ferner wurde dargethan, dass bei der Arbeitsleistung unter gesteigerter Sauerstoffaufnahme viel mehr Fett, aber nicht mehr Eiweiss verbraucht wird. Man schreibt die Auffindung dieser Thatsache gewöhnlich Anderen zu, welche eine Vermehrung der Kohlensäureausscheidung bei der Arbeit nachwiesen; daraus vermag man aber selbstverständlich nicht den Schluss zu ziehen, dass dabei mehr Fett zerstört worden ist, da der gleiche Effect ebenso von einer gesteigerten Eiweisszersetzung herrühren könnte. — Die Versuche an einem an hochgradigem Diabetes leidenden Menschen ergaben, dass derselbe bei gleicher Kost mehr Eiweiss und Fett zersetzt als ein gesunder kräftiger Arbeiter und dabei weniger Sauerstoff aufnimmt als letzterer. Da bei Gesunden bei reichlicher Nahrungszufuhr eine ebenso grosse Zersetzung stattfinden kann wie bei dem Diabetiker, oder bei schwächlichen Menschen bei gleicher Kost eine ähnlich geringe Sauerstoffaufnahme, ohne dass Zucker im Harn bei ihnen auftritt, so mussten wir schliessen, dass nicht die reichliche Zersetzung für sich allein oder die geringe Sauerstoffaufnahme für sich allein zur Zuckerausscheidung führt, sondern das Missverhältniss im Gang der Zersetzung und der Sauerstoffaufnahme. Wir haben damit keine Theorie des Diabetes aufstellen wollen, wie Manche meinen, ja wir haben es in unserer Hauptarbeit[1]) wohlweislich vermieden das Wort „Wesen des Diabetes“ zu gebrauchen; wir studirten einfach die Zersetzungen im Leibe eines Diabetikers und sagten ausdrücklich, es werde die Kenntniss der Abweichung

1) Pettenkofer und Voit, Zeitschr. f. Biologie 1867. Bd. 3. S. 380.

der Zersetzungen von den normalen zum Verständniss des abnormen Processes beitragen, mag eine solche Störung die Ursache der Krankheit oder nur ein Symptom derselben sein. Wir zogen aus den von uns gefundenen Thatsachen die nächsten Schlussfolgerungen, und man wird immer mit diesen Thatsachen rechnen müssen, wenn man die Vorgänge bei der Zuckerharnruhr verstehen will. —

Es geht aus unseren Versuchen mit dem Respirationsapparate klar hervor, welches Ziel wir dabei im Auge hatten; wir wollten die Grösse der Stoffzersetzungen im Körper unter verschiedenen Umständen kennen lernen, indem wir alle Ausscheidungsprodukte bestimmten. Nach einem anderen Prinzipe gebaute Apparate für die Bestimmung der abgegebenen Kohlensäure und des Wassers und des aufgenommenen Sauerstoffs hätten wohl ebenfalls zu diesem Zwecke dienen können, denn das Wesentliche an der Sache ist nicht der Apparat, sondern der Rückschluss aus den Zersetzungsprodukten auf das im Körper zersetzte Material.

Darum sind auch die Resultate der bekannten Respirationsuntersuchungen von Regnault und Reiset[1]) mit den unsrigen gar nicht zu vergleichen, denn die beiden haben nicht den mindesten Zusammenhang mit einander. Die französischen Forscher wollten nur über die Grösse der Kohlensäureausscheidung und der Sauerstoffaufnahme bei verschiedenen Thieren und über einige andere Fragen des Gasaustausches Untersuchungen anstellen; wir dagegen machten unsere Versuche, um über die im Körper zersetzten Stoffe weitere Aufschlüsse zu erhalten, die wir durch Bestimmung der Eiweisszersetzung allein nicht erreichten. Desshalb nahmen auch Regnault und Reiset auf die Zusammensetzung der eingenommenen Nahrung und die übrigen Ausscheidungen gar keine Rücksicht, während dies für unsere Versuche ein unumgängliches Erforderniss ist.

Den bis dahin gebrauchten Respirationsapparaten klebten vorzüglich zwei Mängel an; sie nöthigten erstens unter Umständen zu athmen, unter denen Menschen und Thiere nicht zu athmen gewöhnt sind, und vor Allem vermisst man zweckmässige Controlversuche über den Grad der Genauigkeit der Angaben derselben.

---

1) Regnault und Reiset, Annal. d. Chem. u. Pharm. 1850. Bd. 73. S. 269.

Der von Regnault und Reiset ursprünglich erdachte Apparat war nur für kleinere Thiere gebaut und liess eine Bestimmung des abgegebenen Wassers nicht zu. An kleinen Thieren hätten wir aber unsere Ernährungsversuche nicht anstellen können, da wir neben den gasförmigen Ausscheidungsprodukten mit Einschluss des Wassers auch die durch Harn und Koth entleerten genau kennen mussten, und die völlige Aufsammlung des auf die Versuchszeit treffenden Harns nur bei grösseren Thieren gelingt.

Der später von Reiset nach dem nämlichen Principe hergestellte, für die Untersuchung der Kohlensäureabgabe und der Sauerstoffaufnahme bei Schafen eingerichtete Apparat ermunterte nicht sehr zur Adoptirung des Prinzips für ein in grösserem Maassstabe herzustellendes Instrument, denn Reiset gelangte damit zu unglaublichen und unmöglichen Resultaten, abgesehen davon, dass er nicht weiter vorging als früher mit Regnault, und die Fragen, welche sich jetzt an Untersuchungen der Art knüpfen, gar nicht kannte.

Apparate, bei welchen die Thiere gebunden und in eine ungewohnte Lage gebracht, oder durch Ventile irgend welcher Art zu athmen genöthiget werden, sind für unsere Zwecke nicht brauchbar, da wir zur Genüge erfahren haben, welch' grossen Einfluss auf die Zersetzung des Fettes oder der Kohlehydrate im Thierkörper solche Veranstaltungen durch Herbeiführung von allerlei Körperbewegungen ausüben.

Das Princip des Pettenkofer'schen Respirationsapparates, das Versuchsthier unverletzt und ungebunden nicht in eine stagnirende Luft oder unter sonst ungewohnte Verhältnisse zu bringen, sondern in einen beständig und beliebig mit gewöhnlicher atmosphärischer Luft zu ventilirenden Raum zu setzen, die wechselnde Luft genau zu messen, kleine Bruchtheile der ein- und austretenden Luft fortlaufend auf gewisse Bestandtheile zu untersuchen und die Differenz dann auf den ganzen Luftstrom zu rechnen, endlich die Fehlergränzen des Apparates und der Methoden durch Controlversuche zu ermitteln, hat sich so bewährt, dass wir es nicht verlassen werden und den Widerstand dagegen nicht begreifen.

Ich weiss recht wohl, dass von Manchen, die sich als exakte Naturforscher rühmen, gewisse Einwendungen dagegen gemacht werden, wie

z. B. ein so grosser und complicirter Apparat könne unmöglich genaue Resultate geben, oder es müsse durch Diffusion ein Verlust eintreten, da der Versuchsraum nicht luftdicht geschlossen sei, und was derlei Redensarten noch mehr sind, welche dann bei Leuten, die sonst weiter nichts von dem Apparate wissen und denen die Zwecke, die dadurch verfolgt werden sollen, gleichgültig sind, keine Theilnahme für denselben erwecken. Man sollte bei solchen Einwendungen bedenken, dass wir doch auch einige Kritik besitzen, welche wir thatsächlich wohl mehr angewandt haben als jene mit ihren unbewiesenen Behauptungen. Denn es wird stets in jenen Kreisen stillschweigend darüber hinweggegangen, dass wir unseren Apparat auf die Genauigkeit seiner Angaben durch viele Controlversuche[1]) geprüft haben; aber so voreingenommen scheint man in der Wissenschaft heut' zu Tage noch sein zu können, dass man den Angaben eines Apparates, der wie kein anderer untersucht worden ist, Misstrauen entgegenbringt, während man ohne Weiteres denen anderer Apparate Glauben schenkt, an denen nie Controlbestimmungen gemacht worden sind.

Solche Controlversuche geben allein die Gewissheit der Zuverlässigkeit der Resultate und es ist die Pflicht eines Jeden, der sich über den Gaswechsel eines Thierkörpers unterrichten will, seinen Apparat durch Entwicklung einer bekannten Menge von Kohlensäure und Wasser auf den Grad der Genauigkeit der Angaben zu prüfen und zugleich die eigene Geschicklichkeit zu controliren. Es könnten sich nämlich auch Leute finden, welche, die vielen von uns gemachten Erfahrungen unbeachtet lassend, nicht zum Ziele kommen, und dann die Schuld dem Apparate und nicht sich selbst zumessen. —

Der Pettenkofer'sche Apparat war für Menschen und grössere Thiere eingerichtet worden; gewisse Fragen konnten aber nur an kleineren Thieren oder an einzelnen Theilen des Körpers erlediget werden, so z. B. die nach der Aenderung des Gaswechsels bei Blutentziehungen, bei der Einwirkung gewisser Arzneimittel, bei verschiedenen Temperaturen der umgebenden Luft, bei winterschlafenden Thieren, an dem Arm eines Menschen. Der grosse Apparat wäre zur Untersuchung an

---

1) Siehe hierüber: Zeitschrift f. Biologie 1875. Bd. 11. S. 126--186.

Kaninchen, Katzen, Murmelthieren etc. viel zu massig und die Resultate wegen der geringen absoluten Mengen von Kohlensäure, Wasser und Sauerstoff nicht genau genug gewesen. Es stellte sich daher das Bedürfniss heraus für die kleinen bei solchen Thieren vorkommenden Werthe ebenfalls eine Genauigkeit von 1—3 % zu erhalten.

Ich habe schon seit mehreren Jahren einen solchen kleineren Apparat im physiologischen Institute aufgestellt und mit der Zeit alle möglichen Verbesserungen an ihm angebracht, bis er endlich diejenige Form angenommen hat, welche er jetzt definitiv besitzt. Es sind auch, um alle seine Eigenschaften kennen zu lernen, schon zahlreiche Versuche mit ihm ausgeführt und zum Theil auch veröffentlicht worden[1]. Aengstliche Gemüther haben, weil der Apparat nicht schon längst beschrieben worden ist, allerlei Befürchtungen gehegt. Es vermögen sich eben Manche bei der fieberhaften Hast unserer Zeit, das was man den Tag über Alles angestellt hat und gefunden zu haben glaubt, am nämlichen Abende der erstaunten Mitwelt vorzuführen, nicht vorzustellen, dass Jemand eine fertige Sache einige Jahre sich selbst überlässt; sie würden es viel leichter begriffen haben, wenn der Apparat mit allem Pomp beschrieben worden wäre, und dann, nachdem er zu einigen dürftigen Versuchen gedient, vom Schauplatz wieder verschwunden wäre, wie es so häufig geschieht.

Dieser kleine Respirationsapparat ist nach dem von Pettenkofer bei seinem grossen Apparate angewendeten Principe gebaut. Das Thier befindet sich dabei, wie vorher schon angegeben worden ist, in einem genügend ventilirten, hinreichend grossen Raume; das Volum der gewechselten Luft wird genau gemessen, ein bekannter Bruchtheil derselben, einmal ehe sie in den Raum eintritt und dann nachdem sie die gasförmigen Ausscheidungen der Haut und Lunge des Thieres aufgenommen hat, auf den Gehalt an Kohlensäure, Wasser etc. untersucht, und die Differenz auf die ganze Luftmenge berechnet.

---

1) J. Bauer, über die Zersetzungsvorgänge im Thierkörper unter dem Einflusse von Blutentziehungen, Zeitschrift f. Biologie 1872 Bd. 8. S. 567. — H. v. Böck u. J. Bauer, über den Einfluss einiger Arzneimittel auf den Gasaustausch bei Thieren, a. a. O. 1874 Bd. 10. S. 336. — Fr. Erismann, zur Physiologie der Wasserverdunstung durch die Haut, a. a. O. 1875 Bd. 11. S. 1. —

Schon Pettenkofer hat hervorgehoben, wie solche Differenzbestimmungen den grossen, gewöhnlich unterschätzten Vortheil haben, dass dabei die constanten Fehler der Untersuchung eliminirt werden, weil alle Operationen gleichheitlich sowohl bei der einströmenden als auch bei der abströmenden Luft ausgeführt werden, und nur die Differenz der beiden Bestimmungen zu ermitteln ist, welche noch richtig gefunden werden kann, wo eine absolute Bestimmung an ganz unvermeidlichen Fehlern leiden würde.

Es war unthunlich, den Pettenkofer'schen Apparat in seiner Form einfach zu copiren und entsprechend zu verkleinern; es musste eine ganze Reihe von wesentlichen Aenderungen daran vorgenommen werden, sowie auch an dem grossen Apparate seit seiner Beschreibung durch Pettenkofer mancherlei Verbesserungen angebracht worden sind, welche hier ebenfalls theilweise Erwähnung finden werden.

Der kleine Apparat ist auf den dieser Abhandlung beigegebenen drei Tafeln abgebildet. Die erste Tafel enthält eine Ansicht derjenigen Vorrichtungen, welche auf der einen Seite einer durch die Röhre D gezogen gedachten senkrechten Ebene aufgestellt sind, die zweite Tafel eine Ansicht der auf der andern Seite dieser Ebene befindlichen Vorrichtungen; auf der dritten Tafel sind einige Details aufgenommen. Die Herstellung der beiden ersten Tafeln geschah in der Art, dass zunächst von jeder Seite des Apparates ein photographisches Bild hergestellt wurde, und zwar bei Tafel I von links her, bei Tafel II von rechts her gesehen; dadurch gelang es, ein ganz naturgetreues Bild des immerhin complicirten Apparates mit den richtigen Dimensionen und Verhältnissen zu gewinnen, wie es dem Zeichner sonst wohl kaum zu geben möglich gewesen wäre. Die Photographien dienten nun dem Zeichner als Grundlage für die weitere Ausführung.

Das Thier befindet sich in dem Raume H (Tafel I u. II). Derselbe stellt einen auf einer Tischplatte stehenden Würfel mit einer Seitenlänge von 40 cm., also einem Kubikinhalte von 64 Liter dar. Er besteht aus einem soliden Rahmen von Zink, in welchen Scheiben von dickem Glase eingesetzt sind; die an der vorderen Seite befindliche in Metall gefasste Glastafel lässt sich in einem Falz auf- und abbewegen und dient als Thür zum Einbringen des Thieres. Um diesen Kasten gehörig

zu ventiliren, ist eine Oeffnung für das Wegsaugen der Luft und eine zweite Oeffnung für das Eintreten frischer Luft angebracht. Die Letztere findet sich in der auf Tafel I dem Beschauer zugekehrten Glasfläche; es ist zu dem Zwecke ein rundes Loch von 2,7 cm. Durchmesser an der oberen linken Ecke eingebohrt und in dieses ein unter rechtem Winkel abgebogenes, wohl lakirtes Rohr a von Eisenblech mit Kautschukdichtung und Ueberwurfschraube, welche in ein am Rohr befindliches Gewinde eingreift und eine Metallplatte jederseits an das Glas andrückt, befestiget. Der eine kürzere Schenkel des Rohres sieht nach Aussen, der längere Schenkel befindet sich im Kasten und geht bis auf den Boden desselben herab. Die Oeffnung für das Wegsaugen der Luft aus dem Kasten ist an der der Eingangsthüre gegenüber liegenden Seite; sie ist in der Mitte der betreffenden Glastafel angebracht und auf die gleiche Weise mit einem Blechrohre b versehen, dessen kurzer Schenkel nach Aussen mündet, und dessen längerer Schenkel nach aufwärts bis nahe an die Decke des Kastens reicht. Die Luft tritt demnach bei der Ventilation unten in den Kasten ein, streicht über das Thier weg und tritt oben aus.

Bis auf die Ein- und Austrittsöffnung und die Lücken zwischen dem Rahmen und dem Falze der Thüre ist der Kasten völlig luftdicht geschlossen. Es ist dem Pettenkofer'schen Apparate von gedankenlosen Leuten öfters der Vorwurf gemacht worden, dass er nicht luftdicht schliesse und dass desshalb durch Diffusion ein Austausch der im Kasten befindlichen Luft gegen die äussere Zimmerluft stattfinden müsse, wodurch natürlich die Resultate ganz unzuverlässig würden. Dem gegenüber hat schon Pettenkofer dargethan, dass Undichtigkeiten an der Kammer keinen nachtheiligen Einfluss auf die Genauigkeit des Versuches ausüben; denn es tritt durch jede Oeffnung Luft von der gleichen bekannten Zusammensetzung hinein, und es ist ferner die Geschwindigkeit dieser einströmenden Luft unter allen Umständen grösser als die Geschwindigkeit der Diffusion, so dass von Innen nach Aussen nie ein Austausch stattfindet, so wenig als bei einem gut ziehenden Ofen Rauch oder ein Verbrennungsprodukt aus den tausend Ritzen entweicht. Pettenkofer hat dies für seinen grossen Apparat dadurch bewiesen, dass er im Innern der Kammer penetrant riechende Dämpfe entwickelte und

an den Spalten und Oeffnungen der Thüre beobachtete; so lange die Ventilation der Kammer durch die Saugcylinder im Gange ist, lässt sich ausserhalb von dem Geruche nicht das Mindeste wahrnehmen. Für diejenigen, welche sich von vorgefassten Schulmeinungen nicht frei machen können, dienen jedoch am besten die Controlbestimmungen zur Widerlegung ihrer Vorstellungen, nach denen die in der Kammer entwickelte Kohlensäure und das Wasser völlig in dem aus ihr gesogenen Luftstrome enthalten sind.

Es ist jedoch auch möglich die kleine Kammer bis auf die Eintrittsöffnung vollkommen zu verschliessen. Man kann nämlich leicht und rasch durch einige wurstförmige Streifen von Klebwachs die Spalten an der Thüre verkleben. Man ist dann im Stande, die Dichtigkeit der Kammer zu prüfen, indem man Leuchtgas durch das Eintrittsrohr einleitet und dann wenn man sicher ist dadurch alle atmosphärische Luft aus dem Kasten verdrängt zu haben, nach dem Absperren des Austrittsrohres durch einen Kautschukstopfen die undichten Stellen mit einem Lichte aufsucht. Wo eine solche sich vorfindet, tritt bei dem starken Drucke entzündbares Gas aus, wornach man leicht jede Undichtigkeit beseitigen kann. Auf eine andere einfache Art der Prüfung der Dichtigkeit der Kammer werde ich noch bei der Prüfung der Dichtigkeit der Leitung bis zu den kleinen Saugcylindern zurückkommen. Der angegebene Verschluss an der Thüre wird dann angebracht, wenn man ausschliesslich durch die Eintrittsöffnung Luft zuleiten will, wenn z. B. das Thier in wasserfreier oder mit Wasser gesättigter Luft oder in kohlensäurefreier Luft athmen soll.

Der Raum H, in welchem das Thier sich befindet, muss nun ausgiebig ventilirt werden, so dass keine grössere Menge von Wasser, Kohlensäure und anderen Zersetzungsprodukten sich darin anhäuft als in einer normalen Luft, in der wir zu athmen gewohnt sind.

Nach den Angaben von Pettenkofer fängt die Luft eines Raumes, in welchem Thiere geathmet haben, bei 1 ‰ Kohlensäure zu riechen an, bei 10 ‰ ist sie für uns auf die Dauer unerträglich geworden; eine gute Luft soll nicht mehr als 2 ‰ Kohlensäure enthalten.

Die Ventilation geschieht bei dem Pettenkofer'schen Apparate bekanntlich durch zwei grosse alternirend auf- und abgehende Saugcylinder,

welche die Luft aus der Kammer durch eine grosse Gasuhr saugen und durch ein fallendes Gewicht getrieben werden, das seinerseits durch eine mittelst eines sehr sinnreichen Regulators entsprechend wirkende Dampfmaschine aufgezogen wird. In der Aufhängung der Saugcylinder und in der Einrichtung der Ventile derselben sind seit der Beschreibung durch Pettenkofer einige zweckmässige Aenderungen vorgenommen worden.

Die Ventilation am kleinen Apparate wird nicht durch Saugcylinder und eine Dampfmaschine besorgt, sondern durch die Bewegung der Trommel der messenden Gasuhr B, deren Axe mit der Axe eines oberschlächtigen Wasserrades C in Verbindung steht. Die an der hinteren Wand angebrachte Eintrittsöffnung der Gasuhr steht durch das 172 cm. lange und 3 cm. im Durchmesser haltende Blechrohr D in luftdichter Verbindung mit dem Athemraum, so dass die Gasuhr bei der Drehung ihrer Trommel Luft aus der Kammer ansaugt und zugleich die Messung des Luftstromes besorgt. An Stelle der durch die Gasuhrtrommel aus der Kammer genommenen Luft tritt alsbald frische Luft von Aussen in die Kammer ein, ohne dass eine irgend erhebliche Druckdifferenz dabei entsteht.

Bei dem grossen Pettenkofer'schen Apparate ist zwischen dem Kasten und der grossen Gasuhr eine Befeuchtungsvorrichtung angebracht, damit nicht die die Gasuhr passirende Luft Wasser entführt, wodurch die Messung ungenau wird. Da die in die grössere Gasuhr eintretende Luft von dem Versuchsraume kommt und stets nahezu mit Wasserdampf gesättiget ist, so ist am kleinen Apparate die Befeuchtungsvorrichtung vorläufig weggelassen worden, um grössere Widerstände in der Hauptleitung zu vermeiden; anfangs wurde die Gasuhr häufig aufgefüllt und geaicht, später stellte es sich heraus, dass wenn man vor jedem Versuche die Gasuhr auffüllt und dabei gewisse noch zu erwähnende Vorsichtsmaassregeln gebraucht, dann die Angaben der Gasuhr so übereinstimmende sind, dass sowohl die Befeuchtungsvorrichtung als auch die wiederholte Aichung unnöthig ist.

Die grössere Gasuhr meines Apparates ist eine solche für 5 Flammen und zeigt bei einer Umdrehung 6,7 Liter an. Sie ist anders construirt als die früher an dem Versuchstisch des grossen Apparates verwendeten Uhren. Wenn nämlich beim Umdrehen der Trommelaxe wegen der an den Leitungen vorhandenen Widerstände nicht entsprechend Luft ein-

treten kann z. B. bei stärkerer Ventilation, so reicht die gewöhnliche Construktion nicht aus, da bei derselben in dem angegebenen Falle wegen des ungenügenden Uebereinandergreifens der Schaufeln der Trommel die niedrige Wasserschicht durchbrochen und die Luft ohne die Trommel bewegt zu haben von der Austrittsöffnung her eingesaugt wird. Dies ist jetzt durch Verlängerung der Scheidewände für den Eintritt und Austritt der Luft in die einzelnen Kammern der Messtrommel vermieden, wodurch die Wasserschichte auf einer Seite höher gehoben und auf der anderen Seite tiefer gesenkt werden kann, ohne dass Luft von dem empfangenden in den abgebenden Theil der Messtrommel übertritt. An der Uhr sind vier Zifferblätter, jedes in 10 Grade getheilt, angebracht; ein Grad des oberen Zifferblattes entspricht 1 Liter, von dem der zehnte Theil noch abgeschätzt werden kann; ein Grad des nächsten Zifferblattes zeigt 10, einer des folgenden 100 und einer des letzten Blattes 1000 Liter an, so dass also eine ganze Umdrehung des letzteren 10000 Liter entspricht.

An der aus der hinteren Wand des Gehäuses der Gasuhr hervorstehenden und in einer Stopfbüchse laufenden Axe der Trommel ist ein 8 cm. im Durchmesser haltendes Kammrad (Taf. II. c.) angesteckt, in welches ein zweites gleich grosses, an der Axe des Wasserrades befindliches Kammrad d eingreift. Die Gasuhr steht auf einer gusseisernen Platte, welche durch drei Stellschrauben so gestellt wird, dass die Kämme der beiden Räder genau in einander passen.

Das oberschlächtige aus wohl lakirtem Eisenblech verfertigte Wasserrad C hat einen Durchmesser von 60 cm. und besitzt 24 Kammern, von denen jede 330 cub. cm. Wasser fasst. Das Rad ist durch ein Doppelkreuz von soliden Eisenstäben getragen; die Axe desselben läuft in zwei Lagern, welche in zwei starken eisernen Trägern angebracht sind. Die Träger des Rades und der eiserne Tisch der Gasuhr sind auf einer grossen Eisenplatte befestiget.

Die Kammern des Rades werden von Wasser beschlagen, welches aus einem Reservoir (Taf. I. E) abfliesst. Das etwa 9 Liter Wasser fassende Reservoir aus Eisenblech steht auf einem 1,17 Meter hohen Träger, der auf der Eisenplatte fest eingelassen ist; der Boden des Reservoirs ist 67 cm. über der nächsten Kammer des Wasserrades.

In e befindet sich das Abflussrohr für das das Rad treibende Wasser; das Kautschukrohr f führt das Wasser aus der Wasserleitung zu; durch das Kautschukrohr g, welches an ein in dem Reservoir befindliches Ueberlaufrohr angesteckt ist, fliesst das überschüssig zuströmende Wasser ab. Durch diese Vorrichtung wird das Wasser im Reservoir stets auf gleichem Stand erhalten und fällt mit gleicher Kraft auf das Rad.

Die zur Bewegung des Rades und des ganzen Apparates nöthige Wassermenge ist eine sehr geringe. Bei mittlerer Geschwindigkeit braucht man dazu in einer Stunde 177 Liter Wasser, aber schon mit 61 Liter in der Stunde lässt sich eben der Apparat treiben, für die grösste Geschwindigkeit bei völlig geöffnetem Hahn fliessen 360 Liter Wasser in der Stunde ab.

Das auf das Rad gefallene und von den Schaufeln wieder entleerte Wasser sammelt sich in einem zwischen den Trägern unterhalb des Rades liegenden Troge i von Eisenblech, von welchem es durch das Kautschukrohr h abläuft. Damit kein Wasser beim Entleeren der Kammern umherspritzt, ruhen in dem Troge die die untere Hälfte des Rades umgebenden Backen k von Eisenblech.

Die Bewegung des Rades und der Gasuhrtrommel ist bei gleich vertheilten Widerständen eine ganz gleichmässige und continuirliche, während bei der Ventilation durch Saugcylinder am todten Punkt die Bewegung des Luftstroms auf einen Moment unterbrochen wird.

Die Grösse der Ventilation kann variirt werden je nach der Menge des auf das Rad auffallenden Wassers, welche durch die Stellung des Abflusshahnes am Reservoir regulirt wird. Man ist dadurch im Stand, zwischen 450 und 3400 Liter Luft in der Stunde durch den Versuchskasten gehen zu lassen. Der letztere Luftwechsel ist so bedeutend, dass man leicht den Raum für die Thiere noch grösser machen und für Hunde von einem Gewichte von 10—12 Kilo die genügende Ventilation geben könnte. Da bei einer Umdrehung des Wasserrades auch die Trommel der Gasuhr sich 1 Mal dreht, so werden also bei jeder Umdrehung 6,7 Liter Luft aus dem Versuchsraume weggenommen; in 1 Stunde macht demnach das Rad 67 bis 507 Umdrehungen.

Bei einer mittleren Ventilation von 1500 Liter in der Stunde bei Versuchen mit einer grossen Katze befanden sich in der aus dem

Apparate kommenden Luft zwischen 1,8 und 3,0 ‰ Kohlensäure, während die eintretende Luft 0,55 bis 1,20 ‰ enthielt.

Da der Versuchsraum einen Cubus von 40 cm. Seitenlänge darstellt, so fasst er 64 Liter und hat einen Querschnitt von 1600 □ cm. Bei einer Ventilation von 450 Liter in der Stunde treffen auf 1 Sekunde 125 cc. Luft und also für 1 Sekunde $\frac{125}{1600} = 0{,}08$ Meter Geschwindigkeit; bei einer Ventilation von 3400 Liter in der Stunde treffen auf 1 Sekunde 944 cc. Luft und daher für 1 Sekunde $\frac{944}{1600} = 0{,}60$ Meter Geschwindigkeit. Weil nun erst bei einer Geschwindigkeit der Luft von 1 Meter in der Sekunde das Gefühl des Zuges entsteht, so befindet sich das Thier auch in dieser Beziehung unter normalen Verhältnissen.

Wir haben schon mehrmals, auf den erfahrenen Rath des Herrn Prof. Linde hin, ernstlich daran gedacht, auch an dem grossen Respirationsapparate das gleiche Princip der Bewegung anzuwenden. Es würden dann die beiden Saugcylinder, der Regulator und die Dampfmaschine wegfallen, und man hätte nur einen durch Wasser getriebenen Motor, z. B. ein von den Gebrüdern Hax in Frankfurt gebautes Tangentialrad mit der Axe der grossen Gasuhr in Verbindung zu setzen. Die Widerstände, welche dabei überwunden werden müssen, sind nur geringe. Bei dem kleinen Apparate ist, wie schon angegeben, auch die Befeuchtungsvorrichtung weggelassen worden, da von der aus dem Kasten tretenden wasserreichen Luft nur wenig Wasser aus der grösseren Gasuhr entführt wird, welches man nach jedem Versuche wieder ergänzt. Der Vortheil der neuen Einrichtung für den grossen Apparat bestände zunächst in der wesentlichen Ersparniss bei der ersten Anlage, vor Allem aber in der Bequemlichkeit bei der Benützung desselben. Bei einem Versuche mit dem grossen Apparate muss man jetzt mehrere Stunden vorher die Dampfmaschine anheizen, und man hat dabei beständig, Tag und Nacht, einen geübten Heizer nöthig; man entschliesst sich daher der Kosten und der Unbequemlichkeit halber nur schwer zu ausgedehnten Versuchsreihen mit demselben. Dies ist bei dem kleinen Apparate ganz anders; man braucht nur den Wasserhahn zu drehen und kann somit jeden Augenblick den Apparat in Gang setzen, ohne einer Bedienung und Aufsicht zu bedürfen. Es würde bei dem Betriebe durch Wasser ein Versuch mit dem grossen Apparate keine grössere

Mühe machen als mit dem kleinen; wenn die Nebenvorrichtungen stets bereit gehalten werden, so ist in Zeit von 1½ Stunden Alles für einen 24 stündigen Versuch fertig.

Durch die ventilirende Gasuhr wird das Volumen der aus dem Versuchsraum gezogenen Luft auch zugleich gemessen. Pettenkofer hat das Verdienst, zuerst auf die Brauchbarkeit dieses Instrumentes für wissenschaftliche Zwecke aufmerksam gemacht zu haben. Er hat gezeigt, dass man durch Aichung mit bekannten Luftmengen die Gasuhr zu einem der genauesten Messinstrumente machen kann; es lässt sich dann mit ihr das Volumen eines Luftstroms so genau messen, als man irgend einen kubischen Raum durch sein Volumen oder sein Gewicht Wasser zu ermitteln vermag. Die bei dem Athmen eines Thieres eintretende Aenderung des Volumens der Luft, dadurch, dass der aufgenommene Sauerstoff nicht nur zur Bildung von Kohlensäure, sondern auch von Wasser und anderen sauerstoffhaltigen Zersetzungsprodukten, welche zum Theil nicht gleich aus dem Körper austreten, verwendet wird, hat nach den Auseinandersetzungen von Pettenkofer [1]) bei der starken Verdünnung mit Luft keinen Einfluss und ist ganz zu vernachlässigen, da sie selbst bei den ungünstigsten Voraussetzungen nicht 0,1 % des Luftstroms beträgt. Ebensowenig bringt die durch eine Aenderung in der Temperatur und in dem Feuchtigkeitsgehalte stattfindende Volumsänderung bei der Anordnung des Apparates einen irgend beachtenswerthen Fehler hervor.

Es handelt sich nun, nachdem der für das Thier bestimmte Raum gehörig ventilirt und die Menge der gewechselten Luft gemessen ist, die eintretende und die mit den gasförmigen Abscheidungsprodukten des Thieres beladene Luft genau zu untersuchen. Es ist unmöglich aus der gesammten Luft durch Absorptionsapparate diese stets nur in geringer Menge vorhandenen Produkte völlig wegzunehmen, die Apparate hätten dabei zu grosse Dimensionen angenommen. Desshalb hat Pettenkofer die atmosphärische Luft wie sie ist, mit allen ihren Bestandtheilen in die Kammer eintreten lassen, und nur einen genau gemessenen Bruchtheil der ein- und austretenden Luft fortlaufend der Untersuchung

---

1) Annalen der Chem. u. Pharm. 1862. Suppl. Bd. 2. S. 11.

unterworfen. Hätte er die eintretende Luft vorher von Kohlensäure und Wasser befreit, so hätte, wenn die Absorption auch ganz gelungen wäre, der ganze Apparat absolut luftdicht schliessen müssen und die Luft nur an einer Stelle eindringen dürfen, was nur schwer und mit grossen Umständlichkeiten zu erreichen ist; ausserdem wären für das Thier durch den Aufenthalt in einer trockenen Luft, wenigstens in Beziehung der Wasserverdunstung, ungünstige und abnorme Verhältnisse gesetzt gewesen. Bei dem kleinen Apparate ist es, wie ich vorher schon angegeben habe, möglich, den Versuchsraum luftdicht zu schliessen und eine ihres Wassers oder ihrer Kohlensäure beraubte Luft eintreten zu lassen; jedoch wird dieses Verfahren nicht für gewöhnlich, sondern nur bei bestimmten Fragen benützt.

Es ist ungleich einfacher und genauer einen bekannten Bruchtheil der eintretenden Luft auf ihren Gehalt an Kohlensäure, Wasser etc. zu untersuchen und durch den Vergleich mit der Zusammensetzung eines Theils der austretenden Luft das, was das Thier dazu geliefert hat, zu bestimmen. Es handelt sich also dabei, da die eintretende Luft schon Wasser und Kohlensäure enthält, wesentlich um die Ermittelung der Differenzen in der ein- und austretenden Luft, woraus der schon vorher berührte grosse Vortheil der Eliminirung der constanten Fehler der Untersuchung erwächst.

Man untersucht einen gemessenen und immer gleichen Bruchtheil der Gesammtluft mit aller Schärfe. Je genauer die Bestimmung des Wassers oder der Kohlensäure ist, desto kleiner kann der Bruchtheil der untersuchten Luft werden, von dem aus auf die Gesammtluft gerechnet werden soll. Da man nun nach den Angaben von Pettenkofer selbst bei ziemlich langen Absorptionsröhren in 1 Stunde nur etwa 5 Liter Luft durchleiten darf, wenn man auf eine vollständige Absorption der Kohlensäure zählen will, so musste er bei seinem grossen Apparate bei einem Gesammtluftstrome von 20000 Liter und mehr in 1 Stunde das Ergebniss der Untersuchung des Bruchtheiles der Luft mit 4000 multipliciren d. h. er konnte nur etwa 0,025 % der Gesammtluftmenge untersuchen. Dieser Umstand verlangt nun eine ausserordentliche Ausbildung in der Bestimmung des Wassers und der Kohlensäure, was auch den Bemühungen Pettenkofers gelang. Jedoch vermochten nur

die Controlversuche darüber Aufschluss zu geben, ob es wirklich möglich ist, aus der Untersuchung eines so kleinen Bruchtheiles auf das Ganze zu rechnen. In der That, es konnte unter solchen Verhältnissen der Kohlenstoffgehalt einer im Respirationsapparate brennenden Stearinkerze oder das darin aus einem Kolben verdampfte Wasser genauer als auf 1 % wieder gefunden werden. Dies stellt sich nun bei dem kleinen Apparate ungleich günstiger, da mit ihm die gleiche Menge Luft wie am grossen Apparate untersucht wird, die Gesammtmenge der Luft jedoch um Vieles kleiner ist. Die Menge der untersuchten Luft beträgt dabei nämlich in der Stunde gewöhnlich 7 Liter, die Menge der Gesammtluft etwa 1600 Liter, so dass das Resultat der Untersuchung nur mit 228 zu multipliciren ist und bis zu 0,44 % der Luft analysirt werden.

Es ist klar, und Pettenkofer hat dies besonders hervorgehoben, dass bei der Bestimmung der Differenzen in der ein- und abströmenden Luft während der ganzen Dauer eines Versuches stets der gleiche Bruchtheil der Gesammtluft untersucht werden muss. Wenn während eines Versuches die äussere Luft in ihrer Zusammensetzung nicht wechselte und namentlich wenn in dieser Zeit das im Apparate befindliche Thier stets die gleiche Menge von Kohlensäure etc. abgeben würde, dann wäre es gleichgültig, ob zeitweise mehr oder weniger der Luft zur Untersuchung käme. Da dies aber nicht der Fall ist, und das Thier z. B. kurze Zeit nach der Nahrungsaufnahme ansehnlich mehr Kohlensäure ausscheidet als später, so würde man, falls in der ersten Zeit ein grösserer Bruchtheil der Luft durch die Absorptionsapparate geleitet würde, im Ganzen eine viel zu grosse Kohlensäureausscheidung berechnen.

Die Wegnahme eines bestimmten Bruchtheiles der Gesammtluft zur Untersuchung geschieht auch bei meinem kleinen Apparate durch kleine Pumpen, deren Bewegung von dem Wasserrade ausgeht, welches auch die Gasuhrtrommel in Bewegung versetzt. Diese Pumpen saugen eine Probe der Luft an, und drücken dann dieselbe durch die Absorptionsapparate für Wasser und Kohlensäure.

Die Vorrichtungen dazu können nur durch die Zeichnungen der beigegebenen Tafeln klar gemacht werden. Ich habe schon gesagt, dass eine durch die Röhre D gezogene senkrechte Ebene die Einrichtungen

für die Untersuchung der Luftproben in zwei Theile scheidet; der eine Theil, nämlich die Pumpen mit den Ventilen, die Apparate für die Absorption des Wassers und für die Wiederbefeuchtung der Luft sind auf der Tafel II. gezeichnet, der andere Theil, die Barytwasserröhren mit den Gasuhren auf der Tafel I.

An der Axe des Wasserrades (Tafel II.) befindet sich ein 10 cm. langer Krummzapfen l mit einem Schlitz, in welchen mittelst eines Schraubenzapfens die Stange m befestiget wird. Bei der Drehung des Wasserrades wird der Krummzapfen mit herumgedreht und dadurch die Stange in hin- und hergehende Bewegung versetzt. Die Stange bewegt nun denjenigen Theil des Apparates, welcher das Auf- und Niedergehen der Pumpen zu besorgen hat. Zu dem Zwecke ist in der Tischplatte eine 32 cm. hohe, feste Messingsäule n eingelassen, die an ihrem oberen Ende eine Stahlaxe trägt, auf welcher in einer Hülse der vertikal stehende, 22 cm. lange Messinghebel o drehbar ist. In das untere Ende des Hebels greift in einen Schlitz die Fortsetzung der Stange m ein. Die letztere verdünnt sich nämlich nahe ihrem Ende zu einem drehrunden Stab, welcher in die mit dem Hebel o verbundene Röhre eingesteckt und in beliebiger Tiefe durch eine Schraube q fixirt werden kann. Das obere Ende des Hebels trägt eine Hülse, in welcher ein 32 cm. langer Stahlstab durch eine Schraube festgehalten wird; an dem Stahlstab werden die vier Rollen tragenden Messingklötze p festgeschraubt. Ich habe, da in der Zeichnung der Tafel II. dieser Theil des Apparates nicht genau zu übersehen ist, auf der Tafel III. Fig. 1. eine weitere Abbildung desselben, und zwar von Oben her gesehen, gegeben, wo die Stellung der vier an dem Stahlstab befestigten Klötze p mit den Rollen besser heraustritt. Es ist klar, dass bei der hin- und hergehenden Bewegung des unteren Theiles des Hebels der obere Theil mit dem Stahlstabe die entgegengesetzte Exkursion ausführt; durch feine Striche an der Drehungshülse ist angezeigt, wie weit der Hebel aus der vertikalen Stellung nach beiden Seiten abgelenkt wird.

Auf den Rollen des Stahlstabes sind die Darmsaiten (Taf. III. Fig. 1. s.) aufgewickelt, an welchen die vier kleinen Saugpumpen auf- und abbewegt werden; jede der Rollen ist auf ihrer Axe durch eine starke Feder fixirt. Links und rechts von der Säule n steht ein aus

Messing gefertigter Träger, an dessen oberem Querstück je zwei Führungsrollen t angebracht sind, über welche die an den Saugcylindern der Pumpen in einem Häckchen eingehängten Darmsaiten laufen. Bewegt sich der obere Theil des Hebels o nach rechts, so werden dadurch die beiden links stehenden Saugcylinder gehoben, und die rechts stehenden gesenkt; umgekehrt ist es bei der Bewegung des Hebels nach links.

Die Einrichtung der Saugpumpen, wie sie sich jetzt auch an dem Versuchstische des grossen Respirationsapparates nach der Angabe Pettenkofer's findet, ist aus der Zeichnung der Tafel II. leicht ersichtlich. Ein 13,7 cm. hohes und 6,4 cm. im Durchmesser haltendes festes Glas ist bis auf 2,2 cm. von seinem Rande mit Quecksilber gefüllt; am Boden des Glases ist eine U förmig gebogene Glasröhre durch eine 2 cm. dicke Schicht von Wachs, das im geschmolzenen Zustande eingegossen wird, befestiget, so dass sie mit ihrem einen, inneren Ende 2,6 cm. über das Niveau des Quecksilbers herausragt. Ueber dieses innere Ende der Röhre wird ein 12 cm. hoher und 3,5 cm. weiter, oben geschlossener Glascylinder gestülpt, welcher oben eine Messingfassung trägt, an welcher der die Darmsaiten aufnehmende Stahlstab von 9,5 cm. Höhe senkrecht eingelassen ist; über den Stahlstab wird ein mit einem Deckel versehenes Messinggefäss geschoben, in dessen Inneres Schrote zur Ausgleichung des Gewichtes und zur Beschwerung des Glascylinders gelegt werden. — Das andere äussere Ende der Glasröhre ist unter rechtem Winkel abgebogen und durch ein Kautschukrohr mit dem einen Arm eines 3 armigen Gabelrohres in Verbindung gesetzt; die beiden anderen Arme sind mit den zwei Ventilen verbunden. Als Ventil dient ein in der Mitte bauchig ausgetriebenes Glasgefäss mit zwei nach aufwärts gerichteten Schenkeln, dessen Form und Stellung aus der in $1/2$ der natürlichen Grösse gegebenen Zeichnung, Fig. 2 auf Tafel III., ersichtlich ist. Die beiden Ventile enthalten Quecksilber und sind in entgegengesetzter Richtung geneigt, so zwar, dass das Quecksilber den tieferen Theil absperrt, in dem einen den linken Schenkel, in dem anderen aber den rechten Schenkel. Die Ventile sind zwischen den an dem kleinen Träger befindlichen federnden Gabeln durch Schrauben eingeklemmt,

welchen Gabeln durch die unteren Schrauben jede beliebige Neigung gegeben werden kann.

Das Spiel der Pumpen wird nun leicht verständlich sein. Bewegen sich die Cylinder nach aufwärts, so saugen sie sich durch das Ventil u (das Eintrittsventil) voll mit Luft, während das Ventil v absperrt; bewegen sich die Cylinder dagegen durch ihre Schwere nach abwärts, so drücken sie die vorher aufgesaugte Luft durch das Ventil v (das Austrittsventil) fort, während jetzt das Ventil u schliesst.

Die Einstellung der Ventile kann so fein gemacht werden, dass ein sehr schwacher Druck hinreicht die kurze Quecksilbersäule in dem tieferen Schenkel etwas herabzudrücken und den Weg frei zu machen. Zu dem Zwecke muss der Grösse der Ausbauchung an dem unteren Theil des Ventils und der Länge des horizontalen Theiles des angesetzten Glasrohres besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Ich benütze die gleichen Ventile, um bei tracheotomirten Kaninchen die Inspirationsluft von der Exspirationsluft zu scheiden; während in den gewöhnlich angewendeten Müller'schen Flaschenventilen das absperrende Quecksilber oder das Wasser mit Gewalt hin- und hergeschleudert wird, und nicht ganz kräftige Thiere den Widerstand nur während kurzer Zeit überwinden, sieht man an den neuen Ventilen bei feiner Einstellung kaum eine Bewegung des Quecksilbers und die Kaninchen athmen stundenlang ohne Aenderung der Athmung durch dieselben.

Auch bei den Versuchen am Respirationsapparate sollen die Ventile nicht stärker geneigt werden als nöthig ist, um eben mit Sicherheit das Absperren zu bewirken, und dies geschieht, wenn beim Durchtreten der Luft an der Oberfläche des Quecksilbers eine Kräuselung wahrzunehmen ist; bei stärkerer Neigung treten grössere Widerstände und schleudernde Bewegungen des Quecksilbers auf, was zu einem Mitreissen von Quecksilberkügelchen und zu Unregelmässigkeiten im Luftstrome führt. Die von Pettenkofer den Saugpumpen gegebene Form ist zum Gelingen des Versuches ganz wesentlich, da sie es erlaubt, langsam und allmählich eine Probe der Luft anzusaugen, und dieselbe nachher ebenso langsam und allmählich durch die Absorptionsapparate zu drücken, so dass möglichst lange Zeit für die Absorption gegeben ist. Ich würde nach meinen Erfahrungen sehr davon abrathen, irgend

eine Aenderung daran anzubringen; man wird nach zeitraubenden Misserfolgen wieder zur ursprünglichen Vorrichtung zurückkommen.

Es ist möglich, mehr oder weniger Luft durch einen Hub der Saugcylinder ansaugen zu lassen. Es kann dies auf mehrerlei Weise geschehen. Einmal indem man die Stange m in dem Schlitze des Krummzapfens l an dem Wasserrad oder in dem Schlitze an dem unteren Theil des Hebels o verschiebt; und endlich dadurch, dass man die Darmsaiten, an welchen die Saugcylinder hängen, durch geringere oder grössere Aufwickelung an den Rollen kürzer oder länger macht, wodurch die Cylinder dann mehr oder weniger aus dem Quecksilber gehoben werden.

Um die Exkursionen des Hebels o nach beiden Seiten ganz gleich zu machen, wird die Stange m in der mit dem unteren Schlitz des Hebels o verbundenen Hülse so weit eingesteckt und durch die Stellschraube q festgehalten, bis dieses Ziel erreicht ist; es werden dann die vier Saugcylinder bei gleicher Saitenlänge gleich hoch gehoben. Durch Einlegen von Schroten in die auf den Cylindern befindlichen Gefässe werden die ungleichen Gewichte und Widerstände auf beiden Seiten äquilibrirt, und die Cylinder zugleich so beschwert, dass sie von selbst im Quecksilber herabsinken.

Die vier Pumpen nehmen zwei Proben der in den Kasten einströmenden äusseren Luft, und zwei Proben der aus dem Kasten austretenden inneren Luft zur Untersuchung weg. Die dem Beschauer auf der Tafel II. zugewendeten beiden Pumpen gehören für die äussere Luft und sind mit A I und A II bezeichnet, die von ihm abgewendeten Pumpen J I und J II sind für die innere Luft bestimmt. Man bemerkt, dass, da die entsprechenden Pumpen auf entgegengesetzten Seiten der Drehungsaxe des Hebels stehen, ohne Unterbrechung Proben der äusseren und inneren Luft zur Untersuchung gelangen.

Die Pumpen machen bei einer Umdrehung des Rades und der Gasuhrtrommel einen Auf- und Niedergang. Wenn im Mittel 1788 Liter Luft in der Stunde durch die grosse Gasuhr ventilirt werden, so werden 11,6 Liter durch eine der kleinen Gasuhren angegeben, so dass darauf 267 Umdrehungen der grösseren Gasuhr und ebensoviele Auf- und Niedergänge der Cylinder der kleinen Saugpumpen treffen. Mit

einem Hub der letzteren werden daher etwa 43 cc. Luft angesaugt und beim Herabsinken wieder fortgedrückt; die 43 cc. Luft passiren in 13 Sekunden die Absorptionsapparate.

Die Eintrittsventile der beiden Pumpen für die äussere Luft stehen mit einer langen Glasröhre A in Verbindung, welche dicht über der Eintrittsöffnung der Luft zu der Kammer mündet (Tafel I.); die Glasröhre liegt dort auf der Deckscheibe des Kastens, biegt dann rechtwinkelig ab und geht gerade fort bis zum oberen Querstück des ersten rechts liegenden Trägers, wo sie sich gabelt, was am besten aus der Ansicht von Oben in der Figur 1 der Tafel III. zu ersehen ist. Der eine unter rechtem Winkel sich abzweigende Schenkel A II geht dem Querstücke des Trägers entlang nach vorne und biegt dann gegen das Eintrittsventil der Pumpe A II ab. Der andere Schenkel A I geht in gerader Richtung weiter nach dem anderen linksseitigen Träger, biegt dort ebenfalls nach vorne ab und wendet sich schliesslich nach abwärts zu dem Eintrittsventil der Pumpe A I.

Die für die innere Luft bestimmten Pumpen nehmen ihre Luft aus der Hauptröhre D weg, an welcher ein engeres Seitenrohr J von Blech angesetzt ist. Mit letzterem ist durch einen Kautschukschlauch eine Glasröhre mit luftdicht eingeschliffenem Glashahn befestiget, mit deren anderen Ende mittelst eines kurzen Schlauchs die längere Glasröhre J in Verbindung steht. Diese Glasröhre theilt sich ebenfalls an dem ersten, rechts liegenden Träger in zwei Schenkel; der eine J II begiebt sich gleich nach abwärts zu dem Eintrittsventil der Pumpe J II, der andere J I biegt erst in der Höhe des Eintrittsventils der Pumpe J I nach abwärts ab, um sich mit diesem Ventil zu vereinen.

Die von den Pumpen beim Niedergehen fortgedrückte Luft passirt die Absorptionsapparate für Wasser und Kohlensäure, und zuletzt die Gasuhren, woselbst sie gemessen wird.

Von dem Austrittsventil jeder Pumpe geht eine passend gebogene Glasröhre (A I u. II, J I u. II) aus; diese vier Glasröhren sind in der hölzernen Brücke F in Rinnen eingesteckt und durch einen aufgeschraubten Deckel festgehalten; sie münden sämmtlich etwa 5 cm. hinter der Brücke. In einer Entfernung von 37 cm. von der ersten Brücke steht eine zweite G, in welche ebenfalls vier mit den Befeuchtungs-

apparaten in Zusammenhang stehende Glasröhren eingesteckt sind. Zwischen den in den beiden Brücken befindlichen Glasröhren befindet sich ein Zwischenraum, in den die Absorptionsapparate für das Wasser eingeschaltet werden.

Es sind dies kleine Glaskölbchen von der auf Tafel III. Fig. 3 in $^1/_2$ der natürlichen Grösse gegebenen Form; sie werden durch die mit einem luftdicht eingeriebenen Glasstopfen verschliessbare Mündung mit kleinen in concentrirter Schwefelsäure getränkten Bimssteinstückchen gefüllt.

In der in Gemeinschaft mit meinem Bruder E. Voit und mit J. Forster herausgegebenen Abhandlung[1]: „über die Bestimmung des Wassers mittelst des Pettenkofer'schen Respirationsapparates“ ist eingehend dargelegt worden, warum wir diese Form der Schwefelsäurekölbchen gewählt haben, und warum früher schon die ursprünglich von Pettenkofer ihnen gegebene, dem Liebig'schen Kugelapparate entlehnte Form verlassen wurde. Die neuen Kölbchen thun ganz ausserordentlich gute Dienste. Es sind stets zwei hinter einander gespannt, damit durch das zweite noch die letzte, meist nur Bruchtheile eines Milligramms betragende Spur des Wassers weggenommen wird. Wir haben schon 12 Versuche mit den nämlichen Kölbchen und derselben Füllung in gleicher Aufstellung gemacht und im zweiten noch immer nur eine Gewichtsvermehrung von einigen Milligrammen gefunden. Man muss sich jedoch hüten die schon öfters benützten, reichlich Wasser enthaltenden Kölbchen in zweiter Linie aufzustellen, da dann nach unserer Erfahrung durch den trockenen Luftstrom der verdünnten Schwefelsäure Wasser entzogen wird und die Kölbchen an Gewicht verlieren.

Das Gewicht der gefüllten Kölbchen beträgt zwischen 60 und 90 gr.; es wird dasselbe auf einer feinen Wage, meist nach der Methode durch Schwingungsbeobachtungen, auf $^1/_{10}$ mgr. genommen. Je kleiner der Bruchtheil der untersuchten Luft gegenüber dem Gesammtluftstrom ist, desto genauer muss die Bestimmung des Bruchtheils sein. Man kann leicht berechnen, wie weit man in einem gegebenen Falle in der Bestimmung der Kohlensäure und des Wassers genau sein muss, um in dem Gesammtluftstrom keinen grösseren Fehler als 1 % zu erhalten. Eine solche Berechnung lehrt uns auch, dass man mit grossen und

1) Zeitschrift f. Biologie 1875. Bd. 11. S. 126.

schweren, viel über 100 gr. wiegenden Absorptionsapparaten für das Wasser, welche man nicht so sicher wägen kann, den Fehler ganz enorm vermehrt, ohne dadurch irgend einen Vortheil in der Absorption des Wassers zu gewinnen.

Zur Füllung der Kölbchen werden die gewaschenen Bimssteinstückchen geglüht und noch heiss in die Schwefelsäure geworfen, damit sie sich vollsaugen, dann in einen Trichter abtropfen gelassen und in die Kölbchen gebracht; nach der Füllung werden die beiden Zugangsröhren zu dem Kölbchen durch ein kleines, an dem einen Ende mit einem soliden Glasstopfen versehenes Kautschukrohr verschlossen.

Ein besonderes Augenmerk muss auch auf die Kautschukverbindungen gerichtet werden. Die dazu benützten Kautschukschläuche werden zuvörderst auf ihre Dichtigkeit geprüft und zwar durch ein Quecksilbermanometer. Man bläst in den mit dem Manometer verbundenen Schlauch Luft ein, so dass der äussere Schenkel der Quecksilbersäule sich erhebt, und verschliesst dann den Schlauch mit einem Glasstopfen. Ist der Schlauch brauchbar, so bleibt der Unterschied in dem Stande des Quecksilbers in den beiden Schenkeln des Manometers bestehen. Man findet auf diese Weise sehr häufig Fehler in den Kautschukschläuchen. Auf dieselbe Weise wird auch die Dichtigkeit der Schwefelsäurekölbchen nach dem Füllen untersucht.

Bei unseren früher beschriebenen Irrfahrten in der Wasserbestimmung hatten wir auch bemerkt, dass nach dem Trocknen der Luft durch das erste Schwefelsäurekölbchen von dem folgenden Kautschukrohr Wasser weggenommen und im zweiten Kölbchen wieder abgelagert wird. Wir haben daher eine Zeit lang die zur Verbindung der Kölbchen unter einander und mit den Glasröhren zwischen den beiden Holzbrücken gebrauchten Kautschukröhrchen im Exsikkator über Schwefelsäure aufbewahrt und vor und nach dem Versuche gewogen. Wir sind jetzt davon ganz abgekommen, da wir es vorziehen, die Glasröhren ganz an einander stossen zu lassen, so dass keine Kautschukfläche frei bleibt, was auch für den vollständigen Verschluss von Bedeutung ist.

Die durch die Schwefelsäurekölbchen getrocknete Luft gelangt nun in Flaschen, in welchen sie sich wieder mit Wasserdampf sättiget, damit beim Durchgange durch die mit einem bestimmten Volum der Baryt-

lösung gefüllten Kohlensäureabsorptionsapparate das Volumen dieser Lösung durch Entziehung von Wasser sich nicht vermindert. Die Befeuchtungsflaschen sind von derbem Glase, 13,5 cm. hoch und 6,5 cm. breit, und mit in Wasser getränkten Bimssteinstückchen gefüllt. Sie sind mit einem doppelt tubulirten Kautschukstopfen verschlossen; die eine der durchtretenden Glasröhren, welche mit der von der Brücke kommenden in Verbindung steht, reicht bis nahe an den Boden des Gefässes, die andere zur Barytwasserröhre führende nur bis dicht unter den Stopfen. Von Zeit zu Zeit muss das Wasser in dem Gefässe erneuert werden; es wird dann so viel Wasser aufgegossen, bis sich nach völliger Durchtränkung der Bimssteinstücke nach einigem Stehen eine die Mündung der ersteren Glasröhre nicht erreichende Schicht Wasser am Boden angesammelt hat. —

Die Luft tritt aus dem Befeuchtungsapparate in ihrem weiteren Fortgange durch Kautschukschläuche in die zur Absorption der Kohlensäure bestimmten Barytwasserröhren. Dieser Theil des Apparates befindet sich auf der andereu Seite der durch das Rohr D gelegt gedachten senkrechten Ebene, und ist auf der Zeichnung der Tafel I. aufgenommen. Jede der vier Luftproben tritt durch zwei mit Barytwasser gefüllte Röhren, eine längere und eine kürzere. Die Röhren für die innere Luft (J Ia u. J Ib, J IIa u. J IIb) sind an den hinteren Trägern der oberen für die Aufstellung der kleinen Gasuhren bestimmten Tischplatte befestiget, die für die äussere Luft (A Ia u. A Ib, A IIa u. A IIb) an den vorderen Trägern.

Die Vorrichtung zur Aufstellung der Barytwasserröhren ist auf Tafel III. Figur 4 eigens abgebildet, und zwar von Oben und von der Seite gesehen. Der eine Theil derselben dient zur Befestigung an dem Träger, der andere Theil ist das Lager für die Barytröhren. Die Klemmvorrichtung stellt einen Messingklotz dar, an dessen einem Ende ein halbcylindrischer Ausschnitt angebracht ist; dieser Ausschnitt wird in die Trägerstange eingesteckt und dort in passender Höhe durch eine Klemmschraube befestiget. Der zweite Theil besteht aus einem Messingbacken, der mittelst einer Axe auf dem entsprechenden Backen der Klemmvorrichtung gedreht und in bestimmter Stellung durch eine Schraube festgestellt werden kann. Der Messingbacken trägt das Lager

für die Barytröhre; zu beiden Seiten des Lagers befinden sich Vorsprünge, jeder mit einer Schraube versehen, durch welche der durch Schlitze eingeschobene Lagerdeckel festgeschraubt wird. Lager und Deckel sind mit Kauschukplatten gefüttert, um das Zerdrücken der Röhren zu vermeiden. Durch die Drehung des Backens kann der Röhre jede beliebige Neigung gegeben werden; für gewöhnlich stehen jedoch bei den Versuchen mit dem kleinen Apparate die Röhren nur sehr wenig geneigt, um die Widerstände für den Durchtritt der Luft so klein als möglich zu machen.

Die grösseren Barytwasserröhren haben eine Länge von 110 cm. und eine Breite von 2,8 cm. und fassen 540 cc. Flüssigkeit; die kleineren Röhren sind 60 cm. lang und 2,4 cm. breit, und fassen 180 cc. Flüssigkeit. An dem Austrittsende jeder Röhre ist eine Kugel angeblasen, die sich zu einem Ansatzstücke für die Kautschukröhre verengert. In die Eintrittsöffnung wird ein Kautschukpropf eingeschoben, in dessen Bohrung eine Glasröhre steckt, welche an ihrem im Innern der Barytröhre befindlichen Ende ein Stückchen eines engen Kautschukschlauches trägt.

Je nach der Zeitdauer des Versuches und der Grösse des Thieres ist die Menge und Concentration des in die Röhren eingefüllten Barytwassers verschieden. Gewöhnlich nehme ich für einen sechsstündigen Versuch bei einem bis zu fünf Kilo schweren Thiere in die grösseren Röhren für die innere Luft 240 cc. Barytwasser, von welchem für 30 cc. etwa 70 cc. der Oxalsäure (1 cc. = 1 mgr. Kohlensäure) zur Neutralisation nöthig sind; in die grösseren Röhren für die äussere Luft kommen 240 cc. eines schwächeren Barytwassers (für 30 cc = 30 cc. der Oxalsäure). In die vier kleineren Röhren werden 50—100 cc. des schwächeren Barytwassers gebracht.

Die Barytwassermischungen werden nach der Angabe Pettenkofers in etwa 6 Liter Flüssigkeit haltenden Flaschen (siehe Tafel III. Fig. 5.) aufbewahrt, aus denen sie mit Saugpipetten aus einem Heberrohre mit Quetschhahn ausgezogen werden, während die dafür eintretende Luft über Bimsstein geht, welcher zur Absorption der Kohlensäure mit Natronlauge befeuchtet ist. In solchen Flaschen ändert sich der Gehalt des Barytwassers nur sehr allmählich. Zu dem Barytwasser muss aus dem von Pettenkofer[1]) angegebenen Grunde etwas Chlorbariumlösung zugefügt werden.

1) a. a. O. S. 27.

Die durch die Pumpen weggedrückte Luft soll Blase für Blase durch das Barytwasser streichen. Der Grad der Schrägstellung der Röhren bedingt die Geschwindigkeit der durchtretenden Luftblasen, welche sich nicht zu grösseren Blasen vereinigen dürfen. Es ist Manchen unverständlich geblieben, dass aus den durchrückenden Luftblasen alle Kohlensäure entfernt wird, da das Centrum der Luftblase doch eine gewisse Entfernung von dem Barytwasser hat; aber durch die beständige, zum Theil rollende Bewegung der Blasen auf dem doch ziemlich langen Wege kommen alle Theilchen der Luft mit dem Barytwasser in Berührung, wie die Resultate der Controlversuche beweisen. —

Es bleibt jetzt nur noch übrig, das Volum der vier Luftproben zu messen, und dies geschieht in den vier auf der oberen Tischplatte aufgestellten kleineren Gasuhren, wo die Luft kohlensäurefrei und mit Wasserdunst gesättiget anlangt und nach der Messung entweicht.

In der schon citirten Abhandlung: „über die Bestimmung des Wassers mittelst des Pettenkofer'schen Respirationsapparates[1])“ ist besonders hervorgehoben worden, dass die Gasuhren, wenn man genaue Resultate erhalten will, sorgfältigst geaicht werden müssen. Dies ist nun bei der gewöhnlichen Construktion der Gasuhr nicht möglich, da dabei die Uebertragung auf den letzten Zeiger durch eine Spindel ohne Ende geschieht; sind die Windungen der Spindel nicht völlig gleich geschnitten, was meist der Fall ist, so fallen die Angaben der Gasuhr verschieden aus; da man nämlich nie weiss, welcher Gang der Spindel eben benützt wird, so ist man nicht im Stande, durch eine Aichung den wirklichen Werth der Drehung zu bestimmen. Es wurden daher schon seit längerer Zeit die gewöhnlichen Gasuhren für unsere Respirationsapparate verworfen und andere gewählt, bei welchen der die Unterabtheilungen angebende Zeiger fest mit der Axe der Trommel verbunden ist und sich mit ihr bewegt. Befindet sich dieser Zeiger an einem bestimmten Theilstriche des Zifferblattes, so hat die Trommel einen bestimmten und stets den nämlichen Stand, so dass sich jetzt durch Aichung der wirkliche Werth einer Trommelumdrehung und auch der eines Theiles einer Drehung leicht ermitteln lässt. Eine ganze

1) a. a. O. S. 145.

Umdrehung des kleineren Zeigers der Gasuhr entspricht etwa 2,4 Liter; da der Kreis in 100 Grade getheilt ist, so kann bis auf 24 cc. abgelesen und auf 2,4 cc. geschätzt werden. In der That stimmen drei hinter einander mit einem Wasservolum von nahezu 44 Liter gemachte Aichungen der gleichen Gasuhr bis auf diesen Werth unter einander überein. Solche Uhren sind in guter Ausführung von L. A. Riedinger in Augsburg oder von der Gasapparatenfabrik zu Schaffhausen zu beziehen.

Wir legen den grössten Werth auf die genaue Aichung der Gasuhren, denn man braucht nur eine kleine Rechnung zu machen, um zu ersehen, welche bedeutende Fehler bei der Berechnung von einem kleinen untersuchten Luftvolum auf ein grösseres dann gemacht werden, wenn die Luftvolumina nicht genügend bekannt sind oder gewisse Fehlergränzen eingeführt werden. Die Wenigsten sind sich dessen bewusst, und meinen, wenn die Gasuhr einige Male mit einem geringen Luftvolumen geaicht ist und bis auf einige Prozente übereinstimmende Werthe gibt, dieselbe ohne Weiteres benützen zu können. Unser Aichapparat ist jetzt so vervollkommnet worden, dass man auf das Genaueste und sehr rasch die jeweiligen Angaben der Gasuhr feststellen kann.

Obwohl die Aichvorrichtung in der Abhandlung über die Bestimmung des Wassers[1]) beschrieben worden ist, so komme ich doch wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes nochmals darauf zurück. In der Figur 6 der Tafel III. ist der Apparat in $^1/_{20}$ der natürlichen Grösse abgebildet.

Das aus einem Aspirator auslaufende Wasser von bekanntem Volum verdrängt ein gleiches Volum Luft aus einem Glasballon, welche Luft dann durch die Gasuhr getrieben wird und nach der Messung entweicht.

Der auf einem Holzgestelle stehende Aspirator fasst etwa 44 Kilo Wasser; ein wesentlich geringeres Volumen darf nicht genommen werden, da sonst die Genauigkeit der Aichung leidet. Der Aspirator ist aus starkem Zinkblech; an dem oberen Theile befindet sich ein Rohrstutzen zur Füllung des Apparates, an dem Boden ist ein messingenes Ausflussrohr mit Hahn angebracht, an welches das zum Glasballon führende Kautschukrohr angesteckt wird. Zwischen dem Boden und dem Hahn ist ein unter rechtem Winkel abgehendes Messingrohr an-

1) a. a. O. S. 147.

gesetzt, in welches eine als Wasserstandsmesser dienende senkrechte Glasröhre eingesteckt wird; an dem Glasrohr befindet sich, in der Höhe des verjüngten oberen Theiles des Aspirators, eine Marke, bis zu welcher man das Wasser einfüllt. Nach der vollständigen Füllung wird der Aspirator auf einer auf 1 gr. noch ausschlagenden Dezimalwaage gewogen, die Temperatur des Wassers genommen, und nach dem Auslaufen des Wassers der Aspirator wieder gewogen. Der von uns benützte Aspirator fasst nach einer Anzahl von Wägungen, deren grösste Differenz bei verschiedener Temperatur 40 gr. beträgt, 43720 gr. Wasser. In der oben citirten Abhandlung[1]) ist eine Reihe solcher Wägungen vorgeführt worden.

Als Gefäss für das Ablaufen des Wassers aus dem Aspirator dient ein gewöhnlicher, in einem Zinktrog stehender Schwefelsäureballon. Derselbe ist durch einen dreifach tubulirten Kautschukstopfen verschlossen; in der einen Oeffnung steckt ein bis auf den Boden des Ballons reichendes und an seinem unteren Ende aufgebogenes, als Syphon wirkendes Glasrohr, dessen oberes Ende das vom Aspirator kommende Kautschukrohr aufnimmt; die zweite Oeffnung trägt ein dicht unter dem Stopfen mündendes Glasrohr, um den Ballon mit der Gasuhr durch einen Kautschukschlauch in Verbindung zu setzen; die dritte Oeffnung endlich ist durch ein Thermometer verschlossen. Eine im Umkreis der Ballonmündung angebrachte, über den Kautschukstopfen hervorstehende Messingfassung erlaubt durch Eingiessen von Wasser einen völlig luftdichten Verschluss herzustellen.

Ist der Aspirator gefüllt und der Ballon mit der Gasuhr verbunden, so treibt man zunächst mit dem Munde Luft durch das für den Aspirator bestimmte Kautschukrohr, bis der Zeiger der Gasuhr sich bewegt, wodurch die Spannung in dem Ballon und der Uhr hergestellt wird, damit im Momente des Eintretens von Wasser in den Ballon der Zeiger der Uhr sich zu bewegen beginnt. Sobald die Spannung eingetreten ist, drückt man die Kautschukröhre mit den Fingern ab und steckt sie an das Ausflussrohr des Aspirators. Nun verschliesst man die Wasserstandsröhre am Aspirator, weil sonst beim Abfliessen des Wassers Luft

1) a. a. O. S. 148.

durch die enge Röhre hineingerissen wird, liest die Gasuhr ab und öffnet den Hahn. Sofort beginnt der Zeiger der Gasuhr sich zu bewegen. Während des Ablaufens des Wassers notirt man von Zeit zu Zeit die Temperatur an dem Thermometer des Ballons und der Gasuhr; nach Vollendung des Abflusses öffnet man den Verschluss an der Manometerröhre, erhebt den Aspirator, um alles Wasser aus dem Kautschukschlauch zu entfernen, und liest dann abermals den Stand der Gasuhr ab.

Durch einen Flaschenzug wird darnach der volle Ballon in die Höhe gehoben, und durch einen Heber in wenigen Minuten das Wasser wieder in den Aspirator übergefüllt.

Das Wasser im Aspirator, im Ballon und in der Gasuhr, sowie die darin befindliche Luft sollen wo möglich die gleiche Temperatur haben, da Reduktionen wegen der oft raschen und ungleichen Aenderung der Temperatur zu keinen genauen Resultaten führen. Es wird desshalb ein grösserer Wasservorrath in dem nach Norden gelegenen Raume, in welchem auch die Uhren und die Aichapparate stehen, aufbewahrt, und die Aichung an solchen Tagen vorgenommen, an denen nur geringe Temperaturschwankungen vorkommen. Man erhält dann bei mehrmaliger Aichung derselben Gasuhr für 43,720 Liter Luft nicht mehr als 2,4 cc. Differenz.

Da das in den Ballon einfliessende Wasser häufig eine etwas niedrigere Temperatur besitzt als die Zimmerluft, und da sich desshalb die aus dem Ballon durch das Wasser verdrängte erkältete Luft auf ihrem Wege bis zur Gasuhr wieder erwärmt, so muss in diesem Fall das Volumen der bei einer gewissen Temperatur verdrängten Luft entsprechend der Temperatur der in die Gasuhr eintretenden Luft nach bekannten Regeln vermehrt werden.

Der Wasserstand der Gasuhren ist von Zeit zu Zeit zu ergänzen. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass das etwas enge mit Windungen versehene Ueberlaufrohr der Gasuhr dem Ablaufen des Wassers einen gewissen Widerstand entgegen setzt und desshalb das Ausfliessen erst beginnt, wenn das Niveau des Wassers in der Uhr höher steht als dem unteren Rande der Oeffnung entspricht. Legt man aber, wenn das Wasser nach dem Auffüllen nicht mehr freiwillig abfliesst, den Finger oder einen Glasstab an die Oeffnung an, so folgt noch Tropfen auf

Tropfen. Man erhält auf diese Weise stets den gleichen Wasserstand, und die Aichungen geben nur sehr geringe Unterschiede. Es ist auch dadurch, wie ich schon angegeben habe, eine öftere Aichung der grösseren Gasuhr ganz überflüssig geworden. Zum Beweise dafür theile ich die Resultate mehrerer unter solchen Cautelen angestellter Aichungen dieser Gasuhr mit:

Luft durch den Ballon in cc.	Luft durch die Gasuhr in cc.	Angabe der Gasuhr in cc.	1000 cc. der Uhr entsprechen in cc.
43720 bei 18,02⁰	43733 bei 18,35⁰	43350	1008,8
43720 bei 17,83⁰	43733 bei 17,79⁰	43320	1009,2
43720 bei 17,76⁰	43733 bei 17,76⁰	43300	1009,7

Vor Beginn eines Versuches müssen nun nach der Zusammenstellung aller Vorrichtungen die Leitungen auf ihre Dichtigkeit geprüft werden. Es ist dies absolut nothwendig, da es auch bei aller Aufmerksamkeit nicht möglich ist, alle Undichtigkeiten von vorne herein zu vermeiden, und viele Versuche in Folge davon unbrauchbar würden. Oft hat sich eine seichte Rinne an der inneren Oberfläche einer Kautschukröhre als Ursache der Undichtigkeit herausgestellt. Eine solche Prüfung ist nun glücklicher Weise leicht und sicher möglich.

Die Hauptleitung muss von dem Abgange des Hauptrohres an der Kammer bis zur messenden grösseren Gasuhr dicht sein, weil sonst nicht aus der Kammer, sondern von Aussen kommende Luft in die Ritzen eindringt. Die Prüfung der Dichtigkeit dieser Hauptleitung braucht nur selten vorgenommen zu werden und geschieht wie die der Kammer einfach mit Leuchtgas, das man mit vollem Drucke in das Rohr D eintreibt, bis dieses ganz damit gefüllt ist, wornach man im Dunkeln untersucht, ob nirgends entzündbares Gas entströmt

Die Prüfung der Dichtigkeit der Leitungen für die zu untersuchende Luft ist viel einfacher und muss vor jedem Versuch gemacht werden.

Um sich von der Dichtigkeit bis zu den Pumpen zu überzeugen, sperrt man den Eingang der Glasröhre A für die Probe der eintretenden Luft mit einem durch einen Glasstopfen geschlossenen Kautschukrohr ab, und ebenso den Eingang zur Glasröhre J für die Probe der aus der Kammer kommenden Luft durch Drehen des Glashahnes. Darauf hebt man nach einander die Cylinder der Pumpen, wobei bei völliger Dichtigkeit das Quecksilber in den Cylindern und in den Austrittsventilen mit in die Höhe gezogen wird und längere Zeit unverrückt auf seinem Stande bleibt. Bei der geringsten Undichtigkeit tritt Luft ein und das anfangs gehobene Quecksilber sinkt zusehends herab. Auf die gleiche Weise prüft man auch die Dichtigkeit der Kammer, indem man die Eintrittsöffnung verschliesst, und einen der Saugcylinder für die innere Luft erhebt.

Zur Untersuchung der Dichtigkeit der Leitungen von der Pumpe ab bis zur Gasuhr, welche wegen der vielen Verbindungen ungleich schwieriger herzustellen ist, verschliesst man den Kautschukschlauch dicht an der kleinen Gasuhr mit einem Quetschhahn, erhebt die betreffende Pumpe, die sich mit Luft vollsaugt, und senkt sie dann allmählich wieder nieder. Als Führung lässt sich an jedem neben der Pumpe stehenden Träger in einer Hülse eine kleine Messingplatte x, welche auf Tafel III. Fig. 7 eigens abgebildet ist, verschieben und in beliebiger Höhe mittelst einer Schraube feststellen; in ihr befindet sich ein Loch zum Einschieben und Führen der Pumpenstange. Da für die Luft der Ausweg abgesperrt ist, so lastet die ganze Schwere der Pumpe auf dem Quecksilber im Innern des Cylinders und der Luft der Leitung. Anfangs wird die Luft unter Entweichen eines Theils derselben durch das Austrittsventil, die Schwefelsäurekölbchen und die Barytwasserröhren comprimirt, das Niveau des Quecksilbers in dem Cylinder stellt sich ansehnlich niedriger als ausserhalb, und das Quecksilber im Eintrittsventil wird gehoben; in kurzer Zeit tritt aber ein Gleichgewichtszustand ein, und nun darf trotz des starken Drucks nicht die mindeste Verschiebung der Stange in der Führungsplatte wahrnehmbar sein. Jede Undichtigkeit verräth sich sofort durch ein Sinken der Stange. Beim Oeffnen des Verschlusses an dem Schlauche fällt der Cylinder herab, was man durch Festhalten desselben verhütet.

Es ist leicht durch Abdrücken der verbindenden Kautschukröhren an verschiedenen Stellen den Ort der Undichtigkeit zu finden, und die völlige Dichtigkeit herzustellen.

Da von der eintretenden und austretenden Luft jedes Mal zwei Proben zur Analyse genommen werden, so kann man sich durch die Uebereinstimmung der Resultate der beiden Proben ebenfalls von der Dichtigkeit der Leitung und der Abwesenheit anderer Fehlerquellen überzeugen. Auf eine einzige Untersuchung der ein- oder austretenden Luft ist nach unseren Erfahrungen gar kein Werth zu legen; nur die Uebereinstimmung zweier Proben belehrt uns über die Genauigkeit der Arbeit, und gibt die nöthige Zuversicht in der Ziehung der Schlussfolgerungen.

Ueber die Bestimmung des Wassers mittelst der mit Schwefelsäure beschickten Glaskölbchen haben wir uns schon zur Genüge in der mehrfach citirten Abhandlung[1]) ausgesprochen, und ist zu dieser Darlegung nichts weiter hinzuzufügen.

Die Bestimmung der Kohlensäure geschieht mit einer Lösung von Oxalsäure von bekanntem Gehalte (2,8636 gr. krystallisirte Säure zu 1 Liter in Wasser gelöst) auf die Weise, welche Pettenkofer[2]) früher eingehend beschrieben hat. Wir titriren eine erste Probe gewöhnlich mit Rosolsäure; die zweite mit Curkumapapier, da wir dieser Methode, wenn sie richtig ausgeführt wird, immer noch den Vorzug der grösseren Genauigkeit geben. Wir räumen aber ein, dass die Titrirung mit frisch bereiteter Rosolsäurelösung und einer verdünnten Schwefelsäure manche andere Vortheile hat, und bei den Versuchen mit dem kleinen Apparate, wo ein viel grösserer Bruchtheil der Luft untersucht wird, wohl anzuwenden ist.

Es ist auch bei dem kleinen Apparate möglich, ähnlich wie es bei dem grossen Pettenkofer'schen geschehen ist, die Luft auf andere Gasarten wie z. B. Wasserstoffgas oder Grubengas zu untersuchen, und zwar durch Leiten einer Probe über glühendes Kupferoxyd oder Platinschwamm. Wir haben bei Mittheilung unserer Wasserbestimmungen

1) Zeitschr. f. Biologie 1875. Bd. 11. S. 126.

2) Annal. d. Chem. u. Pharm. 1862. Suppl. Bd. 2. S. 23.

hierüber gesprochen; wir würden es nach den dabei gemachten Erfahrungen vorziehen, eine gewisse Menge der Luft von etwa 50 bis 60 Liter in einem Gasometer anzusammeln, und dieselbe dann langsam über die Verbrennungsröhren und nachher durch die Absorptionsapparate für Wasser und Kohlensäure zu drücken. Wenn sich in einem Volum der geglühten Luft mehr Wasser und Kohlensäure findet, als in einem gleichen Volum der ungeglühten Luft, dann ist entsprechend Wasser und Kohlensäure im Verbrennungsrohr aus anderen Gasen gebildet worden.

Die Bestimmung des Sauerstoffs geschieht bei den Versuchen mit unseren Respirationsapparaten bekanntlich nicht auf direktem, sondern wie gewöhnlich bei der Elementaranalyse auf indirektem Wege. Um was unter Berücksichtigung der Veränderung des Körpergewichtes die Summen der Ausgaben grösser sind als die der Einnahmen, das muss von Aussen an Sauerstoff aufgenommen worden sein. Die indirekte Ermittelung der Sauerstoffaufnahme setzt also neben der Kenntniss der Einnahmen und Ausgaben des Körpers die Bekanntschaft des Anfangs- und Endgewichtes des Thieres voraus. Die Feststellung des Körpergewichtes macht nun einige Schwierigkeiten, da es sich bei unseren Waagen nicht genauer als auf $^1/_{10}$ gr. bestimmen lässt. Der Sauerstoffverbrauch kann also nur auf etwa $^2/_{10}$ gr. mit Sicherheit angegeben werden, so dass bei kleinen Sauerstoffmengen der Fehler nicht unerheblich wird und z. B. bei einer Aufnahme von nur 4 gr. Sauerstoff 5 % ausmacht.

Man erfährt daraus, wieviel Sauerstoff von Aussen aufgenommen worden ist, aber nicht zu was derselbe im Innern des Körper verwendet wurde. Man bekömmt über Letzteres jedoch noch weiteren Aufschluss, wenn man zusieht, ob zur Oxydation der im Organismus zersetzten Stoffe ebensoviel Sauerstoff nöthig ist als unterdessen von Aussen eintrat, oder ob weniger oder mehr dazu gehört. In den meisten Fällen stimmt die Grösse der Sauerstoffaufnahme mit der Sauerstoffabgabe in den Ausscheidungsprodukten überein; es kommt aber auch vor, dass ein Theil des eingetretenen Sauerstoffs irgendwie im Körper als solcher oder in Oxydationsprodukten zurückbleibt oder dass auf Kosten eines früher

schon angesammelten Sauerstoffvorrathes Wasser und Kohlensäure gebildet werden.

Es wäre gewiss, schon der Controle wegen, sehr wünschenswerth, wenn es gelänge, den Sauerstoff direkt zu ermitteln. Es ist bei unserem Verfahren nicht möglich durch Untersuchung einer kleinen Luftmenge nach der Bunsen'schen Methode den Sauerstoffverbrauch nur einigermassen genau festzustellen, da die Differenz des Sauerstoffgehaltes der äusseren und inneren Luft zu gering ist. Man könnte versuchen, die von einer Pumpe gesogene Luftprobe über eine mit Kupfer gefüllte Verbrennungsröhre zu drücken und so den Sauerstoff dem Gewichte nach zu bestimmen; aber man müsste vorher sich noch davon überzeugen, ob bei dem raschen Durchgang einer so grossen Luftmenge auch aller Sauerstoff verzehrt wird. Sollte dies nicht gelingen, so könnte man die grössere Gasuhr so einrichten, dass sie von dem durch sie gehenden Luftstrome ununterbrochen einen beliebigen, für jede Trommelumdrehung stets gleichen Theil (etwa 50 Liter) in einem Sammelbehälter zur Aufbewahrung bringt, welcher Bruchtheil die nämliche Zusammensetzung hat wie im Mittel die ganze durch die Gasuhr gegangene Luftmenge. Es sollen in dieser Richtung Versuche zur direkten Bestimmung des Sauerstoffs angestellt werden.

Alle Theile am Apparate sind, wie in den Abbildungen auf Tafel I. und II. mit Zeichen versehen, und zwar die Leitung der eintretenden äusseren Luft mit A, die der austretenden inneren Luft mit J. Da jede der Leitungen A und J zur Untersuchung von zwei Luftproben in zwei Theile auseinandergeht, so ist der eine Theil mit A I und J I, der andere mit A II und J II bezeichnet. Jede der vier Luftproben geht durch zwei Absorptionsapparate für das Wasser und durch zwei weitere für die Kohlensäure; man findet daher an den betreffenden Stellen die Bezeichnung A Ia und A Ib, A IIa und A IIb, ferner J Ia und J Ib, J IIa und J IIb. Diese Bezeichnungen sind leicht kenntlich angebracht, so dass man ganz mechanisch die einzelnen Theile des Apparates zusammensteckt, und jede Verwechslung der vielfachen Leitungen vermeidet.

Ist der ganze Apparat auf diese Weise zusammengestellt, und auf den dichten Verschluss geprüft, so werden die Gasuhren abgelesen und

das Thier zum Einbringen in den Versuchsraum bereit gehalten. Das Thier wird in einem aus Weissblech verfertigten leichten Behälter mit Deckel (von etwa 470 gr. Gewicht) auf einer grossen zweiarmigen Waage, welche bei der betreffenden Belastung noch auf 0,1 gr. einen deutlichen Ausschlag gibt, gewogen, rasch in die Kammer gebracht, der Wasserhahn des Abflussrohres e gedreht und die Zeit abgelesen.

Man hat nun mit dem Versuche nichts weiter mehr zu thun, als höchstens die in einer der kleinen Gasuhren und im Zimmer aufgestellten Thermometer von Zeit zu Zeit abzulesen.

Man kann den Versuch verschieden lange Zeit währen lassen; bei Einfüllung einer grösseren Menge concentrirten Barytwassers in die Röhren lässt er sich auf zwei Tage und länger ausdehnen. Verzichtet man auf die doppelten Proben, so ist es möglich, zwei Versuche hintereinander, ohne das Thier aus dem Kasten zu nehmen, anzustellen, indem man zuerst die Leitung für die Proben I und dann die für die Proben II einschaltet. Will man die Doppelproben beibehalten, so nimmt man das Thier nach Beendigung des ersten Versuchs aus dem Kasten und schaltet unterdess die bereit gehaltenen gewogenen und gefüllten Absorptionsapparate ein, was in einer halben Stunde geschehen ist.

Soll der Versuch beendiget werden, so wird das Thier aus der Kammer genommen und in das Blechgefäss gebracht, um es rasch zu wägen; zu gleicher Zeit wird der Zuflusshahn zum Wasserrad abgesperrt. Darnach liest man die Gasuhren ab, nimmt die Verbindungen aus einander, wiegt die Schwefelsäureapparate und bringt die acht Barytwasserproben in bereit gehaltene Fläschchen. Nach dem Absetzen des Niederschlags von kohlensaurem Baryt saugt man aus dem klaren Theil zur Titrirung die Pipette voll, in der Weise wie es Pettenkofer[1]) beschrieben hat.

Es ist klar, dass wenn das Thier während des Versuchs Harn oder Koth in die Kammer entleert, dies die Ermittelung des vom Thier dampfförmig abgegebenen Wassers und die Berechnung der Sauerstoffaufnahme vereitelt; dagegen lässt sich die Bestimmung der Kohlensäure noch verwerthen. —

1) a. a. O. S. 36.

Die Berechnung der Versuchsresultate ist eine ganz einfache.

Bei Anwendung des Pettenkofer'schen Apparates müssen die in der grossen Gasuhr und in den kleinen Gasuhren gemessenen Luftvolumina auf gleiche Temperatur und Feuchtigkeit gebracht werden, da die Temperatur in der grossen Gasuhr, namentlich im Winter, wegen der langsameren Erwärmung der bedeutenden Wassermasse, oft um 5—6° niedriger ist als in den kleinen Gasuhren. Zu dem Zwecke wurde für die beobachtete Temperatur die Luft als mit Feuchtigkeit gesättiget angenommen, und die Angabe der grossen Gasuhr auf die Temperatur und die derselben entsprechende Feuchtigkeit der kleinen Gasuhren gebracht.

Diese Reduktion ist bei dem kleinen Apparate nicht nöthig. Die vier kleinen Gasuhren und die grössere sind in ihrem Volum nur wenig unterschieden und zeigen immer die gleiche Temperatur an; die Temperatur im Zimmer wird desshalb möglichst gleich erhalten und der Apparat einige Zeit vor Beginn des Versuchs natürlich ohne Einschaltung der Absorptionsapparate in Gang gesetzt.

Letzteres ist auch nöthig, um die von den früheren Versuchen herrührende, in den Leitungen befindliche Luft oder das in den Leitungen manchmal verdichtete Wasser zu entfernen. Es kann nämlich vorkommen, dass die am Schlusse eines Versuches in den inneren Leitungen befindliche, mit Wasserdampf nahezu gesättigte Luft beim Erkalten des Zimmers ihr Wasser theilweise niederschlägt, wodurch man dann ohne vorherige Ventilation bei dem nächsten Versuche viel zu hohe Werthe erhält, wie es z. B. bei den ersten Controlversuchen für das Wasser am kleinen Apparate der Fall war.

Der Luftdruck braucht ebenfalls nicht berücksichtiget zu werden, da er auf alle Theile des Apparates in gleicher Weise einwirkt.

Eine Differenz bei der Messung der Luftproben und der des ganzen Stromes besteht darin, dass die untersuchte Luft frei von Kohlensäure ist, die Luftmasse des ganzen Stromes aber sammt ihrer Kohlensäure gemessen wird; der dadurch erzeugte Fehler, der sich leicht corrigiren liesse, ist jedoch nach den Berechnungen Pettenkofer's so gering, dass eine Correktion überflüssig ist. Zudem wirken hier zwei Fehler, der durch nicht völlige Sättigung des Gesammtstroms mit Wasserdampf und der durch den

Kohlensäuregehalt desselben, im entgegengesetzten Sinne und compensiren sich theilweise.

Nach der Ablesung der Gasuhren, der Wägung der Schwefelsäurekölbchen und der Titrirung der Barytwässer berechnet man nach Pettenkofer zunächst nach den Resultaten der Aichung die durch die Gasuhren hindurch getretenen Luftvolumina, und dann mit Hilfe dieser Zahlen die in 1000 Liter der eintretenden und in 1000 Liter der austretenden Luft enthaltenen Mengen von Wasser und Kohlensäure. Die Differenz der beiden gibt an, wieviel Wasser oder Kohlensäure in der Kammer durch ein darin athmendes Thier oder eine darin brennende Kerze an 1000 Liter Luft hinzugekommen sind. Nach den Angaben der grösseren Gasuhr lässt sich dann die ganze vom Thier oder der Kerze abgegebene Wasser- und Kohlensäuremenge berechnen.

Ursprünglich befindet sich in dem Kasten und den Leitungsröhren reine atmosphärische Luft, am Ende des Versuches dagegen eine durch die Athmung des Thieres an Kohlensäure und Wasser reichere Luft. Da der Inhalt des Kastens 64 Liter, der des Hauptleitungsrohres D etwa 2,55 Liter beträgt, so hat man 66,55 Liter einer wasser- und kohlensäurereicheren Luft, deren Wasser und Kohlensäure mit in Rechnung zu kommen hat. Man könnte die Zusammensetzung dieser Luft leicht untersuchen, und ich hatte früher auch gleich hinter dem Kasten eine grosse etwa 6—8 Liter fassende Flasche eingeschaltet und darin durch Schütteln mit einer gemessenen Menge Barytwasser den Kohlensäuregehalt bestimmt. In einzelnen Fällen habe ich nach Wegnahme des Thieres oder der Kerze noch eine Zeit lang fort ventilirt, bis jene Luft durch gewöhnliche atmosphärische Luft ersetzt war. Es lässt sich aber ebensogut der Gehalt der rückständigen Luft berechnen, und zwar auf die von Pettenkofer schon geübte Weise. In 1000 Liter der im Kasten zurückbleibenden Luft ist mehr Wasser und Kohlensäure enthalten als im Mittel in 1000 Liter der untersuchten und der durch die grössere Gasuhr gegangenen Luft, da die beiden letzteren durch die anfänglich im Kasten und der Röhre befindliche Luftmenge von 66,55 Liter verdünnt wurde. Sind z. B. im Ganzen bei einem sechsstündigen Versuche 10000 Liter durch die grössere Gasuhr gegangen, und darin 12 gr. Wasser und 18 gr. Kohlensäure gefunden worden, so frägt man, wieviel in den

66,55 Liter Luft des Kastens sich noch befinden, wenn in 10000—66,55 d. i. in 9933,5 Liter 12 gr. Wasser und 18 gr. Kohlensäure enthalten sind. Seidel hat dargethan, dass sobald nur so viel Luft durch die grössere Gasuhr gegangen ist, dass die Menge derselben fünf Mal den Inhalt der Kammer ausmacht, also in unserem Beispiel 320 Liter, der Fehler nur mehr 1/6 %, und bei sechsmaligem Durchgang, in dem gegebenen Fall nach 384 Liter, nur mehr 1/20 % beträgt.

Da bei dem kleinen Apparate die Menge der untersuchten Luft im Verhältniss zum Gesammtluftstrome viel grösser ist als bei dem Apparate von Pettenkofer, so muss hier auch die in den zwei Proben der untersuchten inneren Luft enthaltene und vom Thier abgegebene Wasser- und Kohlensäuremenge oder auch das Volum dieser Luftproben zu dem durch die grössere Gasuhr angegebenen Volum hinzu gerechnet werden.

Um einen Ueberblick über die Art der Berechnung der Resultate zu geben, setze ich das Protokoll eines an einer Katze angestellten Versuches hierher:

8. Juni 1875. (20,2° C.; Dauer des Versuchs 6 St. 3. M.)

Gewicht des Thiers vor dem Versuch	3001,3 gr.
Gewicht des Thiers nach dem Versuch	2987,8 ,,
Differenz:	—13,5 gr.
Stand der grösseren Gasuhr nach dem Versuch	16946,9
Stand der grösseren Gasuhr vor dem Versuch	5431,6
Differenz:	11515,3

Corrigirte Luftmenge (1000 = 1007,4): 11600,5 cc.

Nro.	Mengen der untersuchten Luft		Kohlensäurebestimmung					Wasserbestimmung	
			Barytwasser			Kohlensäure in der unters. Luft	Kohlensäure i. 1000 Liter Luft	Wasser in der unters. Luft	Wasser in 1000 Liter Luft
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter[1])	Volum in cc.	cc. Oxalsäure für 25 cc. vorher	cc. Oxalsäure für 25 cc. nachher				
A I	26,380	67,108	a) 240 b) 50	33,8 33,8	29,8 33,5	0,03900	0,5811	0,7682	1,1447
A II	26,657	67,024	a) 240 b) 50	33,8 33,8	29,8 33,5	0,03900	0,5819	0,7670	1,1444
J I	22,985	56,044	a) 240 b) 50	72,4 33,8	61,8 33,5	0,10236	1,8264	0,6947	1,2395
J II	25,577	64,981	a) 240 b) 50	72,4 33,8	60,3 33,7	0,11636	1,7907	0,8135	1,2519

1) 1 Umgang von A I = 2,5439 Liter, A II = 2,5143 L., J I = 2,4383 L., J II = 2,5406 L.

	Wasser	Kohlensäure
in 1000 Liter innerer Luft im Mittel . .	1,2457	1,8085
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel . .	1,1445	0,5815
Differenz:	0,1012	1,2270
in 11600,5 Liter der grossen Gasuhr . .	11,74	14,23
in 66,55 Liter in der Kammer u. im Rohr	0,07	0,08
in 121,02 Liter der 2 kl. inneren Gasuhren	0,12	0,15
Summe:	11,93	14,46

Berechnung des Sauerstoffs:

Anfangsgewicht:	3001,3	Endgewicht:		2987,8
Einnahmen:	0	Ausgaben:	Harn	0
Summe:	3001,3		Wasser	11,93
			Kohlensäure	14,46
			Summe:	3014,19
				— 3001,30
			Sauerstoff auf:	12,89
			(Verhältniss 100 : 81).	

Controlversuche.

Ich habe schon öfter erwähnt, dass Controlversuche über den Grad der Genauigkeit der durch Respirationsapparate erhaltenen Resultate absolut nothwendig sind. Es ist nicht möglich bei so complicirten Apparaten von vornherein Alles so einzurichten, dass die Ergebnisse auf Sicherheit Anspruch machen können; man muss sich vorerst durch eigens darauf hin gerichtete Versuche überzeugen, ob der Apparat auch das leistet, was man von ihm voraussetzt. Es kann das Prinzip desselben ganz tadelfrei erscheinen, und doch können die gewonnenen Zahlen nicht der Wahrheit entsprechen, wenn man irgend etwas bei der Ausführung der Versuche übersehen hat. Man glaube ferner ja nicht, dass man im Besitze eines solchen Apparates alsbald Untersuchungen am Thiere anstellen darf, ohne sich durch eine Reihe von Vorversuchen tüchtig eingeübt zu haben. Alles dies erfährt man nur durch Controlversuche, welche darthun, wie weit in dem Apparate unter analogen

Verhältnissen, unter denen darin ein Thier athmet, in bekannten Mengen entwickelte Kohlensäure oder Wasser wieder gefunden werden. So lange dies für einen Apparat der Art nicht erwiesen ist, zweifeln wir nach den von uns gemachten Erfahrungen mit vollem Rechte an den Angaben desselben.

Bevor der kleine Apparat seine jetzige Gestalt angenommen hatte, zu einer Zeit als der Versuchsraum ansehnlich kleiner war und die Ventilation durch zwei in Glyzerin gehende und mit der Hand in Bewegung versetzte grosse Saugcylinder besorgt wurde und viele Verbesserungen in der Methode der Untersuchung noch nicht eingeführt waren, wurden Controlbestimmungen mit kleinen, sehr dicken und in einer Papierkapsel steckenden Stearinkerzen gemacht, in der Form wie man sie früher häufig als Nachtlichter gebrauchte. Ich erhielt damals bei Verbrennung von 4—8 gr. Stearinsäure während 1—2 Stunden, welche 5—9 gr. Wasser und 12—22 gr. Kohlensäure geben sollten, die folgenden Fehler in Prozent ausgedrückt:

	Kohlensäure	Wasser	Sauerstoff
1)	+ 4,9	+ 2,7	+ 5,7
2)	— 1,5	+ 4,4	+ 0,7
3)	— 3,2	— 0,7	— 3,3
4)	— 7,9	— 1,9	— 8,4
5)	+ 6,1	+ 8,1	+ 9,0
6)	— 5,2	— 10,0	— 9,1
7)	— 6,0	— 1,2	— 6,8
8)	+ 2,0	+ 3,3	+ 2,9
9)	+ 3,9	+ 2,4	+ 4,6.

Die Resultate sind bei den damaligen noch ungünstigen Verhältnissen ganz leidliche.

Als der Apparat in seiner jetzigen Gestalt dastand und durch eine Anzahl von Versuchen an Thieren seine Brauchbarkeit dargethan war, musste wieder zu Controlversuchen geschritten werden. Es war unterdess die Erfahrung gemacht worden, dass zwar für die Controlbestimmungen der Kohlensäure Stearinkerzen vorzüglich brauchbar sind, dagegen

nicht für die des Wassers und zwar wegen der unvollständigen Verbrennung der Stearinsäure. Es wurden daher die Controlversuche für die Kohlensäure und das Wasser nicht in ein und demselben Versuche ausgeführt, sondern die für die Kohlensäure durch Verbrennung von Olein und die für das Wasser durch Verdampfung von Wasser. An denselben betheiligte sich mein Assistent, der Privatdozent Dr. J. Forster.

Zu den Controlbestimmungen für die Kohlensäure diente als Kohlensäurequelle, wie gesagt, reines Olein, welches in einem kleinen Glasnäpfchen mit Hülfe eines in einen Schwimmer eingesteckten passenden Glascapillarröhrchens verbrannt wurde. Die Weite der Capillare und die Höhe derselben über dem Oelniveau wurde so gewählt, dass in der Stunde zwischen 3 und 4 gr. Kohlensäure geliefert wurden, also etwa so viel als in gleicher Zeit von einem Kaninchen.

In fünf solchen Versuchen wurde erhalten:

a) 5. Juli 1875.

(Dauer des Versuchs 5 St. 54 M.)

6,4916 gr. Olein verbrannt = (bei 77,37 % Kohlenstoff) 18,42 gr. Kohlens.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs	16010,6
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs	5448,6
Differenz:	10562,0

corrigirte Luftmenge (1000 = 1007,4): 10676,9 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Kohlensäurebestimmung				
			Barytwasser				
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter[1])	Volum in cc.	cc. Oxalsäure für 25cc. vorher	cc. Oxalsäure für 25cc. nachher	Kohlensäure in der untersuchten Luft	Kohlensäure in 1000 Liter Luft
A I	24,345	61,931	a) 240 b) 50	33,7 33,7	30,0 33,5	0,03592	0,5800
A II	25,462	64,019	a) 240 b) 50	33,7 33,7	29,75 33,4	0,03852	0,6017
J I	20,368	49,663	a) 240 b) 50	71,9 33,7	59,8 33,3	0,11696	2,3550
J II	23,369	59,371	a) 240 b) 50	71,9 33,7	57,7 33,3	0,13712	2,3095

1) 1 Umgang von A I = 2,5439 Liter, A II = 2,5143 L., J I = 2,4383 L., J II = 2,5406 L.

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel: 2,3323 gr. Kohlensäure
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel: 0,5908 „ „
Differenz: 1,7414 gr. Kohlensäure

in 10676,9 Liter Luft der grösseren Gasuhr: 18,59 gr. Kohlensäure
in 66,55 Liter Luft in d. Kammer u. im Rohr: 0,11 „ „
in 107,9 Liter Luft in d. kl. inneren Gasuhren: 0,19 „ „
Summe: 18,89 gr. Kohlensäure
= +2,5 %.

b) 8. Juli 1875.
(Dauer des Versuchs 6 St. 32 M.)
8,0250 gr. Olein verbrannt = 22,77 gr. Kohlensäure.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs: 14196,8
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs: 5164,4
Differenz: 9032,4

corrigirte Luftmenge (1000 = 1026,5) : 9271,7 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge: abgelesen in Umgängen	untersuchte Luftmenge: corrigirt in Liter	Kohlensäurebestimmung: Barytwasser: Volum in cc.	Barytwasser: cc. Oxalsäure für 25cc.: vorher	Barytwasser: cc. Oxalsäure für 25cc.: nachher	Kohlensäure in der untersuchten Luft	Kohlensäure in 1000 Liter Luft
A I	20,430	51,973	a) 240 b) 50	33,7 33,7	29,4 33,3	0,04208	0,8097
A II	21,312	53,586	a) 240 b) 50	33,7 33,7	29,2 33,4	0,04380	0,8174
J I	18,148	44,251	a) 240 b) 50	71,9 33,7	57,1 33,6	0,14228	3,2153
J II	20,559	52,231	a) 240 b) 50	71,9 33,7	54,4 33,4	0,16860	3,2280

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel: 3,2216 gr. Kohlensäure
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel: 0,8135 „ „
Differenz: 2,4081 gr. Kohlensäure

in 9271,7 Liter Luft der grösseren Gasuhr: 22,33 gr. Kohlensäure
in 66,55 Liter Luft in d. Kammer u. im Rohr: 0,15 „ „
in 96,48 Liter Luft in d. kl. inneren Gasuhren: 0,23 „ „
Summe: 22,71 gr. Kohlensäure
= —0,3 %.

c) 9. Juli 1875.
(Dauer des Versuchs 6 St. 29 M.)
10,532 gr. Olein verbrannt = 29,88 gr. Kohlensäure.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs:		13918,2
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs:		4357,8
	Differenz:	9560,4

corrigirte Luftmenge (1000 = 1026,5): 9813,7 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Kohlensäurebestimmung				
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter	Barytwasser Volum in cc.	cc. Oxalsäure für 25cc. vorher	cc. Oxalsäure für 25cc. nachher	Kohlensäure in der untersuchten Luft	Kohlensäure in 1000 Liter Luft
A I	20,835	53,004	a) 240 b) 50	33,7 33,7	30,0 33,4	0,03612	0,6814
A II	23,311	58,612	a) 240 b) 50	33,7 33,7	29,7 33,4	0,03900	0,6654
J I	18,702	45,601	a) 240 b) 50	71,9 33,7	54,5 33,3	0,16784	3,6806
J II	20,533	52,166	a) 240 b) 50	71,9 33,7	51,3 33,3	0,19856	3,8063

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel:	3,7434 gr.	Kohlensäure
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel:	0,6734 „	„
Differenz:	3,0700 gr.	Kohlensäure
in 9813,7 Liter Luft der grösseren Gasuhr:	30,13 gr.	Kohlensäure
in 66,55 Liter Luft in d. Kammer u. im Rohr:	0,20 „	„
in 97,80 Liter Luft in d. kl. inneren Gasuhren:	0,30 „	„
Summe:	30,63 gr.	Kohlensäure
	= +2,5 %.	

d) 2. August 1875.
(Dauer des Versuchs 5 St. 27 M.)
10,0666 gr. Olein verbrannt = 28,556 gr. Kohlensäure.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs:		17760,6
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs:		6100,2
	Differenz:	11660,4

corrigirte Luftmenge (1000 = 1009,2): 11767,7 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Kohlensäurebestimmung				
			Barytwasser			Kohlensäure in der untersuchten Luft	Kohlensäure in 1000 Liter Luft
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter	Volum in cc.	cc. Oxalsäure für 25 cc. vorher	cc. Oxalsäure für 25 cc. nachher		
A I	27,700	70,469	a) 240 b) 50	27,7 27,7	22,9 27,2	0,04708	0,6681
A II	27,884	70,110	a) 240 b) 50	27,7 27,7	22,9 27,3	0,04688	0,6687
J I	21,223	50,455	a) 240 b) 50	72,7 27,7	56,2 27,5	0,15880	3,1474
J II	26,277	66,759	a) 240 b) 50	72,7 27,7	51,6 27,3	0,20336	3,0463

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel: 3,0969 gr. Kohlensäure
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel: 0,6684 „ „
Differenz: 2,4285 gr. Kohlensäure

in 11767,7 Liter Luft der grösseren Gasuhr: 28,58 gr. Kohlensäure
in 66,55 Liter Luft in d. Kammer u. im Rohr: 0,16 „ „
in 117,20 Liter Luft in d. kl. inneren Gasuhren: 0,28 „ „
Summe: 29,02 gr. Kohlensäure
= + 1,6 %.

e) 3. August 1875.

(Dauer des Versuchs 6 St. 19 M.)

7,6666 gr. Olein verbrannt = 21,75 gr. Kohlensäure.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs: 18996,3
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs: 7761,6
Differenz: 11234,7

corrigirte Luftmenge (1000 = 1009,2): 11338,0 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Kohlensäurebestimmung				
			Barytwasser			Kohlensäure in der untersuchten Luft	Kohlensäure in 1000 Liter Luft
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter	Volum in cc.	cc. Oxalsäure für 25 cc. vorher	cc. Oxalsäure für 25 cc. nachher		
A I	26,994	68,670	a) 240 b) 50	27,7 27,7	23,4 27,25	0,04218	0,6142
A II	26,465	66,541	a) 240 b) 50	27,7 27,7	23,06 27,10	0,04574	0,6874
J I	21,799	51,824	a) 240 b) 50	72,7 27,7	58,7 27,3	0,13520	2,5427
J II	25,684	65,253	a) 240 b) 50	72,7 27,7	55,5 27,3	0,16592	2,6089

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel:	2,5758 gr.	Kohlensäure
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel:	0,6508 „	„
Differenz:	1,9250 gr.	Kohlensäure

in 11338,0 Liter Luft der grösseren Gasuhr:	21,82 gr.	Kohlensäure
in 66,55 Liter Luft in d. Kammer u. im Rohr:	0,13 „	„
in 117,10 Liter Luft in d. kl. inneren Gasuhren:	0,23 „	„
Summe:	22,18 gr.	Kohlensäure
	= + 1,9 %.	

Für die Wassercontrolbestimmungen wurde ähnlich wie bei den betreffenden Versuchen am grossen Apparate Wasser aus einer Retorte verdampft. Zu dem Zwecke wurde die vordere Glasscheibe der Kammer fortgenommen und durch eine Zinkplatte ersetzt. Dieselbe hat nahe dem unteren Rande eine kreisrunde Oeffnung, an welche ein kurzer Blechstutzen angelöthet ist; eine dicht schliessende Kautschukkappe verbindet diesen Stutzen mit dem in das Innere des Kastens hinein ragenden Halse der Retorte. Die Retorte wird durch einen Schlangenbrenner mit sehr kleinen Flammen erwärmt, so dass in Zeit von einer Stunde nur etwa 2 gr. verdunsten; es wurde vorher ausprobirt, wie weit man bei einer bestimmten Füllung der Retorte den Gashahn aufdrehen musste, um eben eine solche Grösse der Wasserverdampfung zu erreichen. Die Menge des aus der Retorte verdunsteten Wassers wurde durch Wiegung der durch einen Stopfen verschlossenen Retorte vor und nach dem Versuche festgestellt.

Ich theile in Folgendem die Resultate von drei Versuchen der Art mit:

a) 22. Januar 1875.
(Dauer des Versuchs 5 St. 47 M.)
Wasser verdampft: 10,70 gr.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs:	12705,0
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs:	1812,5
Differenz:	10892,5

corrigirte Luftmenge (1000 = 986,3): 10743,3 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Wasserbestimmung	
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter[1])	in der untersuchten Luft	in 1000 Liter Luft
A I	28,824	73,611	0,44644	6,0648
A II	27,705	70,226	0,42746	6,0869
J I	26,123	64,320	0,45759	7,1142

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel: 7,1142 gr. Wasser
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel: 6,0758 „ „
Differenz: 1,0384 gr. Wasser

in 10743,3 Liter Luft der grösseren Gasuhr: 11,15 gr. Wasser
in 66,55 Liter Luft in der Kammer und im Rohr: 0,07 „ „
in 64,32 Liter Luft in der kleinen inneren Gasuhr: 0,07 „ „
Summe: 11,29 gr. Wasser
= + 5,5 %.

b) 27. Januar 1875.

(Dauer des Versuchs 5 St. 18 M.)

Wasser verdampft: 12,95 gr.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs: 12011,9
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs: 2723,5
Differenz: 9288,4

corrigirte Luftmenge (1000 = 986,3): 9161,14 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Wasserbestimmung	
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter	in der untersuchten Luft	in 1000 Liter Luft
A I	24,464	62,476	0,33039	5,2882
A II	23,415	59,352	0,31643	5,3314
J I	21,856	53,814	0,36131	6,7140
J II	24,036	60,929	0,41046	6,7367

1) 1 Umgang von A I = 2,5538; von A II = 2,5348; von J I = 2,4622.

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel: 6,7253 gr. Wasser
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel: 5,3098 „ „
Differenz: 1,4155 gr. Wasser

in 9161,14 Liter Luft der grösseren Gasuhr: 12,97 gr. Wasser
in 66,55 Liter Luft in der Kammer u. im Rohr: 0,09 „ „
in 114,74 Liter Luft der kleinen inneren Gasuhren: 0,16 „ „
Summe: 13,13 gr. Wasser
= +1,4 %.

c) 29. Januar 1875.
(Dauer des Versuchs 5 St. 37 M.)
Wasser verdampft: 16,75 gr.

Stand der grösseren Gasuhr zu Ende des Versuchs: 13002,0
Stand der grösseren Gasuhr zu Anfang des Versuchs: 2603,4
Differenz: 10398,6

corrigirte Luftmenge (1000 = 986,3): 10256,3 cc.

Nro.	untersuchte Luftmenge		Wasserbestimmung	
	abgelesen in Umgängen	corrigirt in Liter	in der untersuchten Luft	in 1000 Liter Luft
A I	27,448	70,097	0,39268	5,6019
A II	26,117	66,201	0,37339	5,6402
J I	24,248	59,703	0,43286	7,2502
J II	26,927	68,257	0,49535	7,2571

in 1000 Liter innerer Luft im Mittel: 7,2536 gr. Wasser
in 1000 Liter äusserer Luft im Mittel: 5,6211 „ „
Differenz: 1,6325 gr. Wasser

in 10256,3 Liter Luft der grösseren Gasuhr: 16,74 gr. Wasser
in 66,55 Liter Luft in der Kammer u. im Rohr: 0,10 „ „
in 127,96 Liter Luft der kleinen inneren Gasuhren: 0,21 „ „
Summe: 17,05 gr. Wasser
= +1,8 %.

Zur leichteren Uebersicht stelle ich die Resultate der Controlversuche nochmals zusammen. Es wurde dabei erhalten:

Controlversuche für Kohlensäure:

Nro.	Kohlensäure entwickelt	Kohlensäure erhalten	Differenz absolut	Differenz in Prozent
a.	18,42	18,89	+ 0,47	+ 2,5
b.	22,77	22,71	— 0,06	— 0,3
c.	29,88	30,63	+ 0,75	+ 2,5
d.	28,56	29,02	+ 0,46	+ 1,6
e.	21,75	22,18	+ 0,43	+ 1,9

Controlversuche für Wasser:

Nro.	Wasser verdampft	Wasser erhalten	Differenz absolut	Differenz in Prozent
a.	10,70	11,29	+ 0,59	+ 5,5 [1])
b.	12,95	1313	+ 0,18	+ 1,4
c.	16,75	17,05	+ 0,30	+ 1,8

Nach diesen Resultaten erreicht man mit dem kleinen Respirationsapparate für das Wasser und die Kohlensäure eine Genauigkeit von 1—2 %, ähnlich wie mit dem Pettenkofer'schen Apparate. Man könnte es auffallend finden, dass bei den kleinen Dimensionen des ersteren die Uebereinstimmung nicht eine grössere ist, besonders da ein ungleich grösserer Bruchtheil der Luft dabei auf die Bestandtheile untersucht wird. Dies rührt daher, dass hier eine wesentlich geringere Menge von

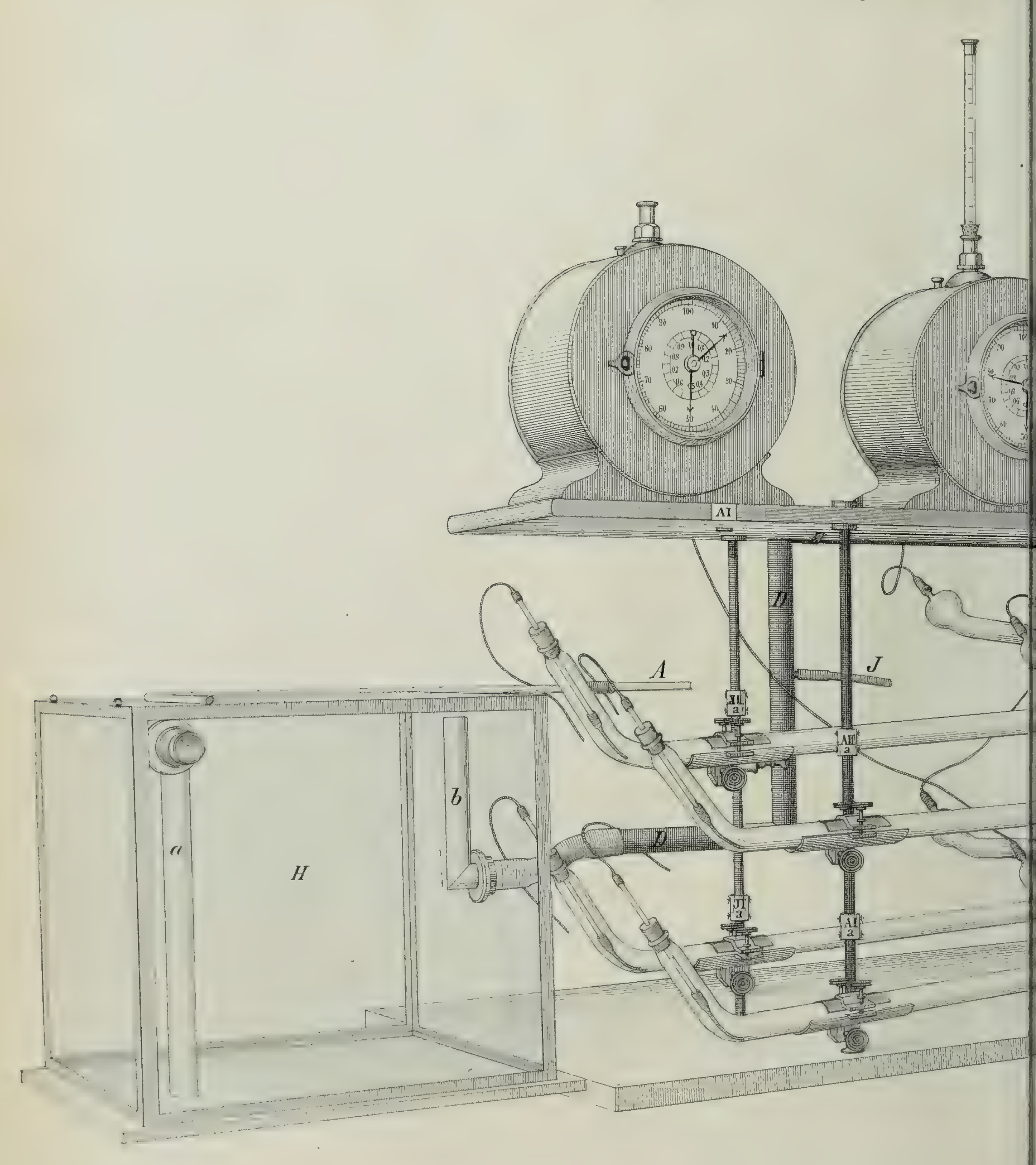
1) Dieser Versuch gibt ein etwas zu hohes Resultat, da vor Beginn desselben noch nicht genügend ventilirt worden war und in den Leitungen sich etwas Wasser von dem vorausgehenden Versuche befand.

Wasser und Kohlensäure zu suchen ist und desshalb wohl absolut ein ungleich genaueres Resultat erhalten wird, aber nicht prozentig. Es lassen sich eben gewisse Fehler nicht vermeiden, und diese machen dann bei kleinen absoluten Mengen einen grösseren Bruchtheil aus, als bei grösseren.

Es ist dadurch erwiesen, dass mit dem kleinen Apparate Untersuchungen des Gaswechsels bei kleineren Thieren angestellt werden können. Es wäre nur zu wünschen, dass auch Andere die von ihnen angewandten Hülfsmittel einer ähnlichen Controle unterziehen würden; ich bin überzeugt, sie würden zum Theil erstaunt sein über die Angaben derselben. —

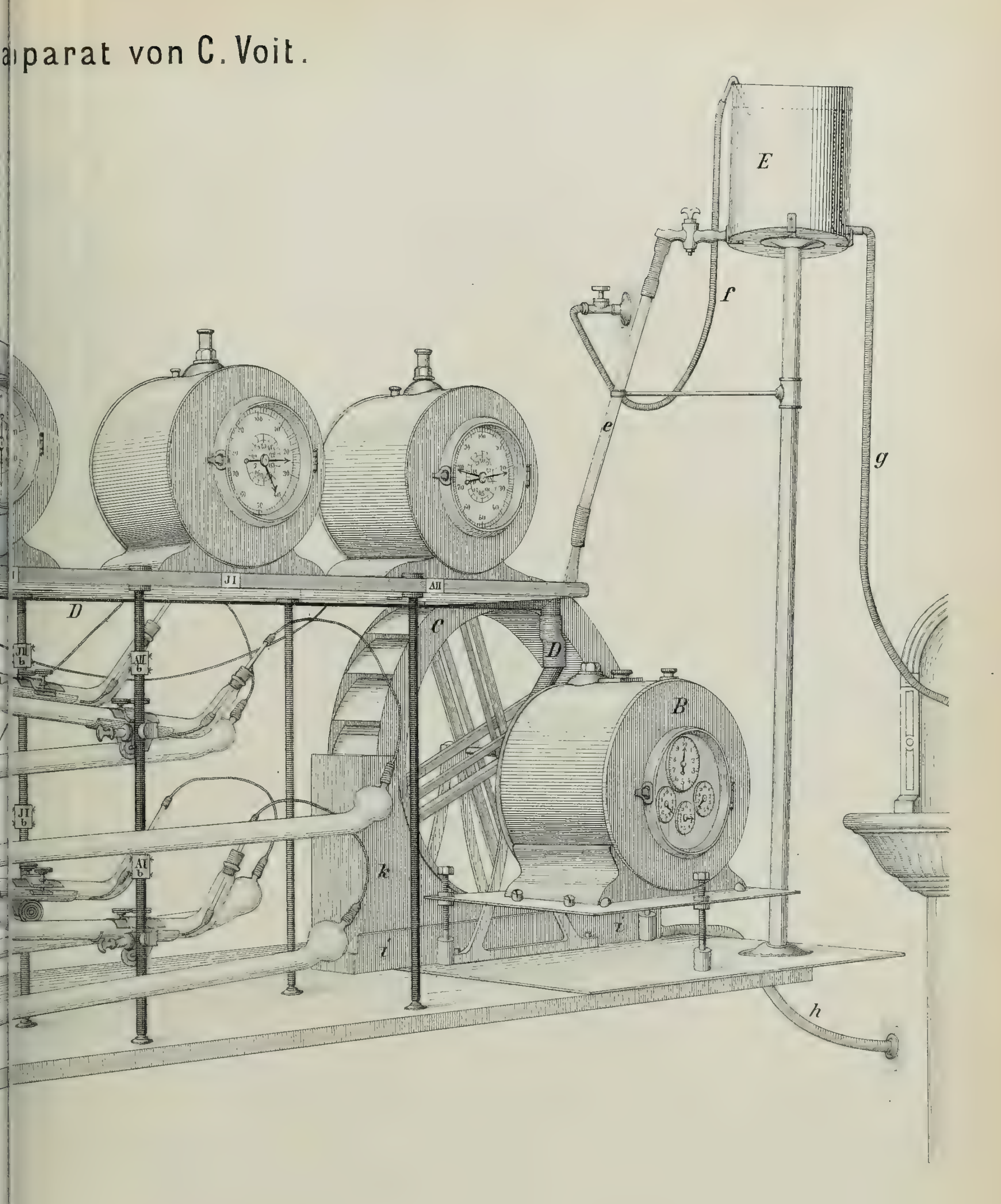

NATURAL HISTORY.

Kleiner Respirationsa



Grav. v. Jos. Menz

aparat von C. Voit.

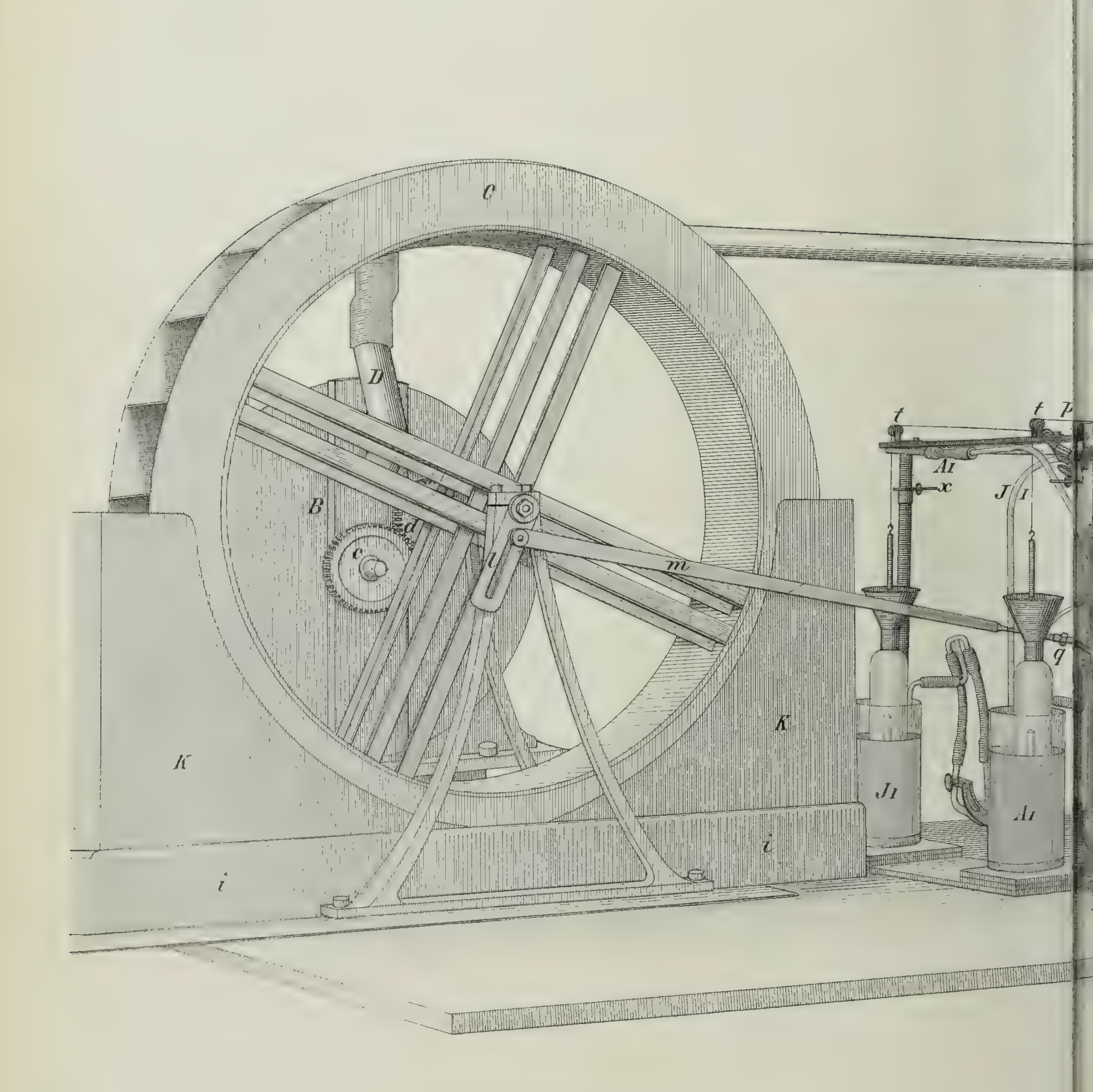


Lith. Anst. von Joh. Moises sel. Wttw in München


ISH
HISTORY.

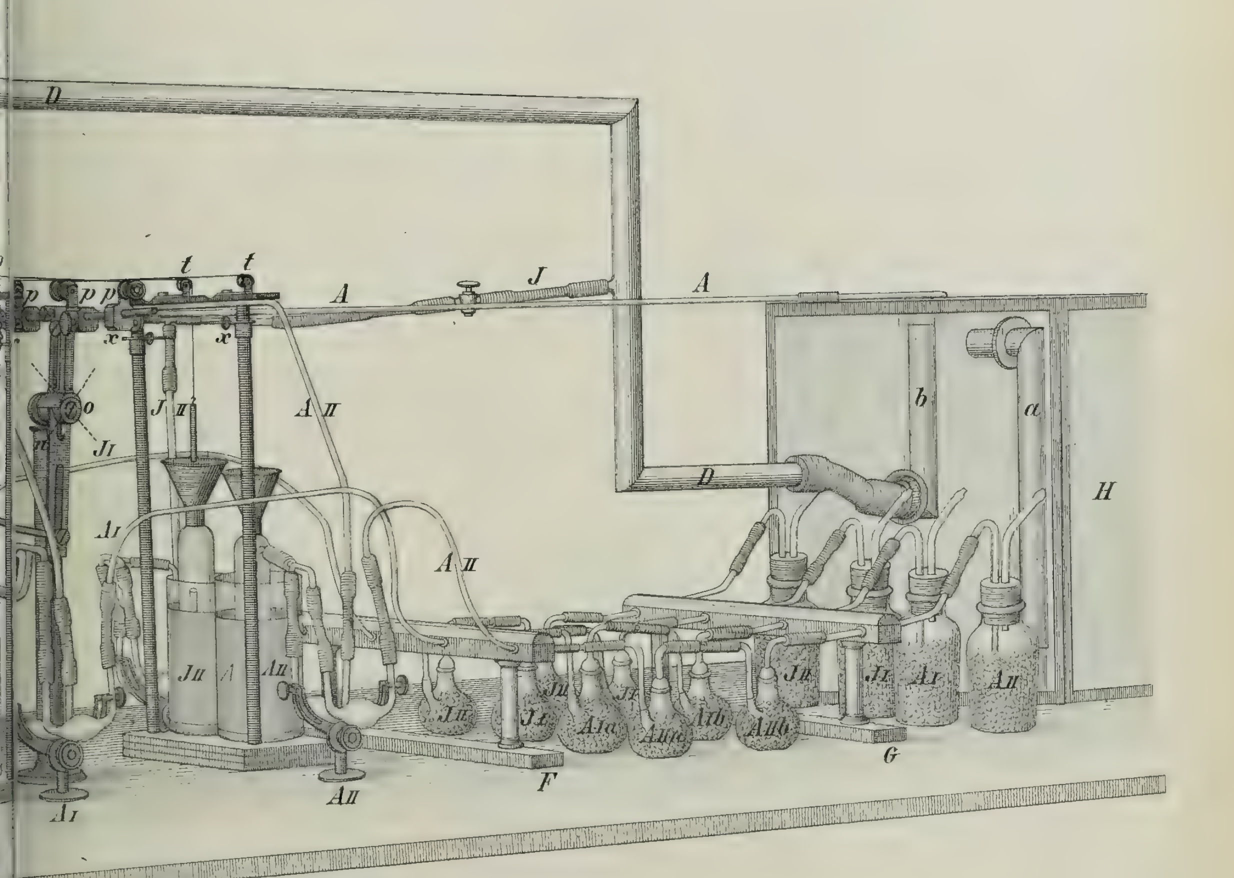

NAT HISTO

Kleiner Respiratio[ns...]



Grav. v. Jos. Menz.

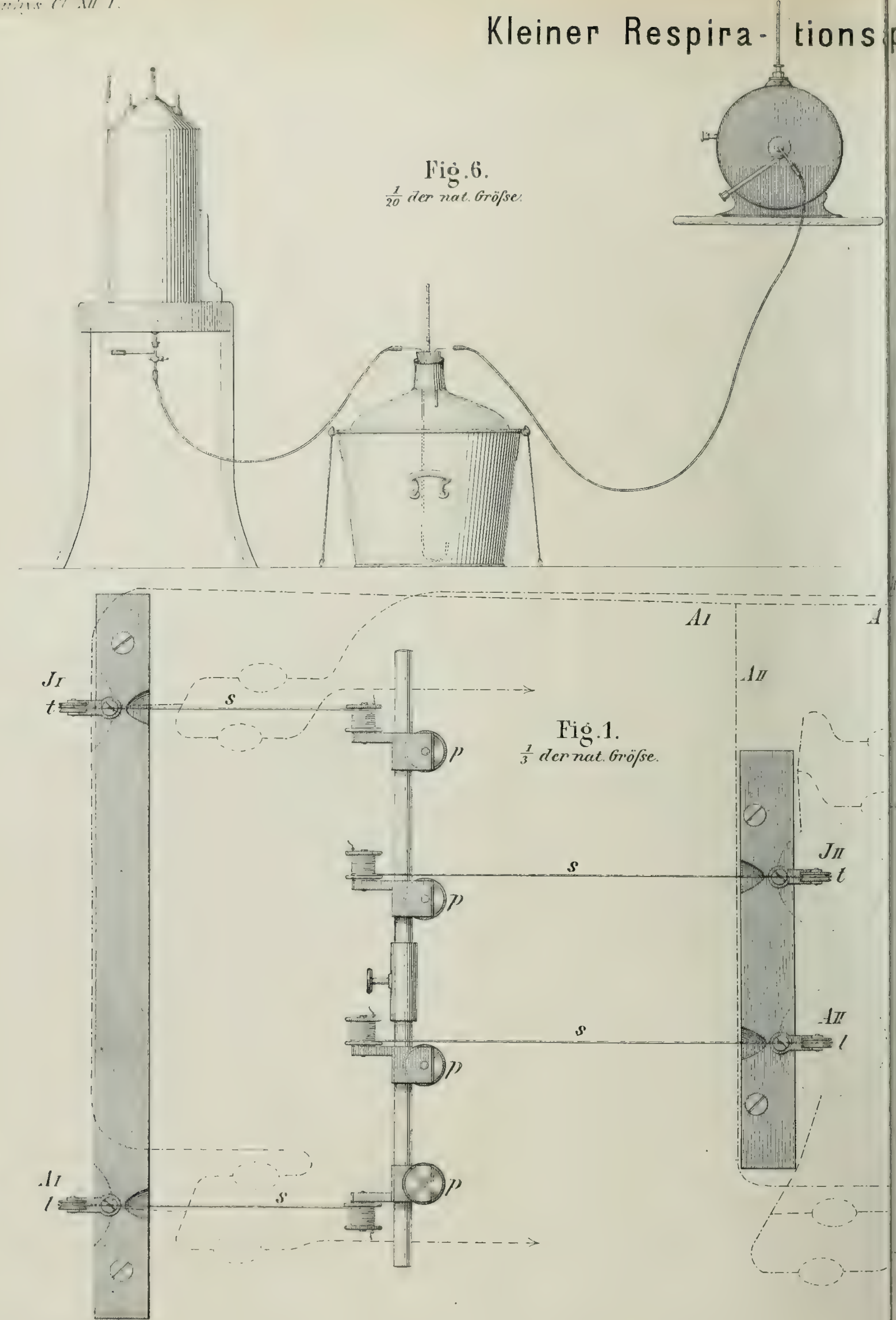
:apparat von C. Voit.



Lith. Anst. von Joh. Moises sel. Wwe. in München.

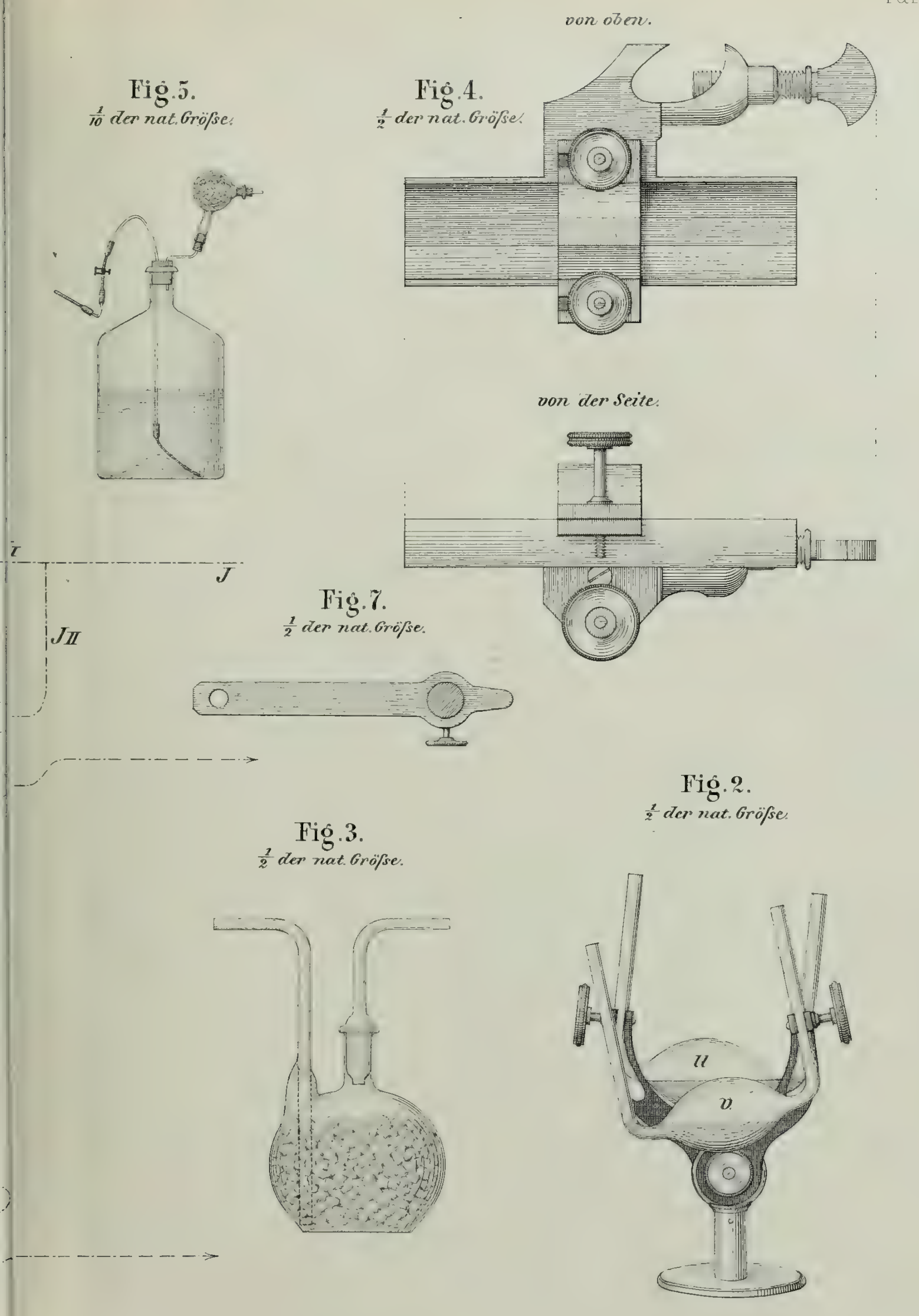

NATURAL HISTORY

Kleiner Respira- tions



apparat von C. Voit.

Taf. III



Lith. Anst. v. Joh. Moises sel. Wtw. in München.



Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

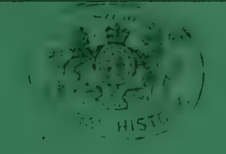
DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.



MÜNCHEN,

1876.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.



ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.

MÜNCHEN,

1876.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Inhalt.

Allgemeine Einleitung.

Wenn ein brauchbares Verfahren entdeckt wird, eine sogenannte willkürliche Function in eine Reihe der Form:

$$A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots$$

zu entwickeln, wo $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ bestimmte mit jener zu entwickelnden Function ausser Zusammenhang stehende Functionen sind, die Grössen $A_0, A_1, \cdots$ aber von x unabhängige Coefficienten vorstellen: so wird eine solche Entwickelung, welche der willkürlichen Function gleichsam eine Uniform anzieht, und ihren besonderen Character in die constanten Coefficienten verlegt, stets die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich lenken, und zwar um so nachhaltiger, je einfacher die Functionen φ und die Coefficienten A zusammengesetzt sind. Daher waren auch die allereinfachsten Reihenentwickelungen, die Potenzreihen und die trigonometrischen Reihen von jeher bevorzugter Gegenstand mathematischer Speculation, so dass die Analysis den Untersuchungen, welche man über diese Formeln oder doch mit ihrer Hülfe angestellt hat, ihre merkwürdigsten Gebiete verdankt.[1])

---

1) Die im Texte angeführten Reihen bleiben die merkwürdigsten Formeln der Analysis, trotz der *Loi suprême* von Wronski, von dessen Bestrebungen ich durch mündliche Mittheilungen Richelots und durch Aufsätze des Herrn Abel Transon (Nouv. Ann. de Math. II Serie, Tome XIII) Kunde habe. Herr Abel Transon spricht sein Befremden darüber aus, dass die Mathematiker keine besondere Vorliebe für die Wronskischen „Gesetze" an den Tag legen. Ich muss das Urtheil der Mathematiker in Schutz nehmen. Betrachten wir Wronski's allgemeinstes Ergebniss, dass er irgend eine Funktion f(x) in jede Reihe der Form $A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \ldots$ zu entwickeln lehrt, welcher Art die Functionen $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ auch sein mögen, so liegt, wie mir scheint, die Sache so: Ist die Möglichkeit der Entwickelung nachgewiesen oder wahrscheinlich gemacht, so ist Wronski's Coefficientenbildung, weil sie für alle Reihen dieselbe ist, und daher im gegebenen Fall äusserst verwickelt ausfallen muss, im Allgemeinen unbrauchbar. Man versuche z. B. die Coefficienten der Entwicklung nach Kugelfunctionen auf diese Weise zu bestimmen. Steht dagegen die Möglichkeit der Entwickelung selbst in Frage, so ist die Form der Coefficienten

* * *

Die Potenzreihen und die trigonometrischen Reihen, so ungleich ihr äusserer Eindruck auch sein mag, lassen sich doch als verschiedene Erscheinungsformen ein und derselben unendlichen Operation auffassen, als welche man nach Belieben eine von ihnen betrachten kann. Wenn man aber genauer zusieht, so erkennt man, dass diese Verwandtschaft mehr in den Bezeichnungen liegt, und dass zwischen den Potenzreihen und den trigonometrischen Reihen, wenn bei beiden die Voraussetzungen gemacht werden, welche ihre Eigenthümlichkeiten zur Geltung bringen, dem Sinne nach ein tiefer Unterschied waltet. Um es kurz zu sagen, die trigonometrischen Reihen sind ein Grenzfall der Potenzreihen, bei dem aber Voraussetzungen zulässig sind, ja in den Vordergrund treten, die der allgemeine Fall ausschliesst, wodurch sich dann das Imaginäre als das eigentliche Gebiet der Potenzreihen erweist, während die trigonometrischen Reihen, so weit an ihnen etwas Besonderes ist, dem Reellen angehören. Führen wir dies nun genauer aus.

---

wieder zu verwickelt, um die Convergenzprüfung der Reihe, in der sie auftreten, zu ermöglichen.

Aus diesen Gründen scheint, wenigstens vor der Hand, den Wronski'schen Ergebnissen nur ein formales Interesse zugesprochen werden können.

Von Anwendungen, die auf andere Reihenformen führen, abgesehen, wird man indessen Wronski darin nur beipflichten können, dass er das Hauptgewicht auf die Form $A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots$ legt, in der das Argument gleichsam aus der individuellen Function, die nur noch in den Coefficienten A steckt, herausgeholt ist. Entwickelungen anderer Gestalt giebt es die Fülle. Eine solche will ich als Beispiel hier anführen. Wenn in der Formel

$$\pi f(x) = \lim_{h=\infty} \int_A^B d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x}$$

statt h geschrieben wird $\frac{2n+1}{2}$, so hat man wegen $\sin\frac{2n+1}{2}u = \sin\frac{u}{2}\left(1 - 2\sum_1^n \cos pu\right)$:

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_A^B \varphi(\alpha, x) f(\alpha) d\alpha + \sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{\cos px \int_A^B \varphi(\alpha, x)\cos p\alpha f(\alpha) d\alpha + \sin px \int_A^B \varphi(\alpha, x) \sin p\alpha f(\alpha) d\alpha\right\}$$

wo $\varphi(\alpha, x) = 2\frac{\sin\frac{\alpha - x}{2}}{\alpha - x}$. Diese Reihe ist ihrer Form wegen merkwürdig. Sie geht in die Fouriersche Reihe über, wenn den beliebigen Grössen A, B die Werthe $-\pi, +\pi$ ertheilt werden, und Eins statt φ gesetzt wird.

Bekanntlich kann eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (u_p z^p + v_p z^{-p})$$

als trigonometrische Reihe geschrieben werden, indem man $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für z einführt. Diese Umformung, durch die man die Function $F(\varphi) = f(z)$ nach sin und cos der Vielfachen der reellen Grösse φ entwickelt erhält, ist es nicht, die wir hier brauchen, da es den Charakter einer trigonometrischen Reihe offenbar nicht verändert, wenn nur ihre Coefficienten complex sind. Sie lässt sich dann ja aus zwei reellen Reihen derselben Art zusammensetzen. Lehrreicher ist es umgekehrt die trigonometrische Reihe als Potenzreihe aufzufassen, indem man setzt:

$$f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos pz + b_p \sin pz) = F(\zeta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (u_p\zeta^p + v_p\zeta^{-p}),$$

wo $\zeta = e^{-iz}$, $u_p = \frac{a_p + ib_p}{2}$, $v_p = \frac{a_p - ib_p}{2}$.

Untersuchen wir die Convergenz der so erhaltenen Potenzreihe:

$$F(\zeta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (u_p\zeta^p + v_p\zeta^{-p}) .$$

Es ist $\mathrm{mod}\, u_p = \mathrm{mod}\, v_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$. Bezeichnet man mit R die grösste Zahl für die $R^p\sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ nicht mit p unendlich wird, so ist die Reihe $F(\zeta)$ convergent im Ringgebiet zwischen den um $\zeta = o$ als Mittelpunct gezogenen Kreisen mit den Halbmessern $\frac{1}{R}$ und R, falls nämlich $R > 1$. Ist $R < 1$, so giebt es keine Convergenz, und ist $R = 1$, so artet der Convergenzring in eine Kreisperipherie aus. Da nun $\mathrm{mod}\,\zeta = e^y$, so erhalten wir, $R = e^Y$ gesetzt, für f(z) folgendes Convergenzgebiet: Es ist eingeschlossen zwischen den Geraden $x = \pm Y$, unter Y den grössten Werth von y verstanden, für den noch $\sqrt{a_p^2 + b_p^2}e^{pY}$, oder $a_p e^{pY}$, $b_p e^{pY}$ nicht mit p unendlich werden. Ist dieser Werth Y gleich Null, so artet das Gebiet in eine Linie aus, und ist Y negativ, so giebt es keine Convergenz. Was aber für $R = 1$ oder $Y = o$ in jener Ausartungsperipherie oder für f(z) in der Ausartungslinie $y = o$ stattfindet, bedarf einer besonderen Untersuchung. Die Functionentheorie im engeren Sinne lehrt uns darüber nichts.

Die Untersuchung der Convergenz einer Potenzreihe in der Ausartungslinie ihres Convergenzringes bildet den eigentlichen Gegenstand der Theorie der trigonometri- Reihen.

Denn wenn die Reihe f(z) ein Convergenzgebiet hat, so sind in diesem Gebiet die Function f(z) und deren Ableitungen stetig. Umgekehrt, wenn f(z) oder deren Ableitungen unstetig sind, so kann dies nicht innerhalb eines Convergenzgebietes stattfinden. Die Convergenz von f(z) wird sich auf die Ausartungslinie $y = o$ beschränken müssen. Es folgt hieraus, dass die Fälle, in welchen die trigonometrischen Reihen uns besonders merkwürdig erscheinen, lediglich der Analysis des Reellen angehören. Die Thetareihen z. B., welche in der Jacobischen Form wie trigonometrische Reihen aussehen, sind ihrem Wesen nach Potenzreihen und haben vom Standpunkte der Theorie der trigonometrischen Reihen aus gar kein Interesse.

* * *

Nachdem wir jetzt die trigonometrischen Reihen in zwei Klassen eingetheilt haben, die erstere, mit Convergenzgebieten, welche wir als Potenzreihen auffassen und ausscheiden, die zweite, mit einer Convergenzlinie, welche wir als echte trigonometrische Reihen ansehen, so ist noch mit einigen Worten auf die engere Benennung: Fouriersche Reihen einzugehen.

So pflegt man die trigonometrischen Reihen

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

zu nennen, wenn ihre Coefficienten durch die Ausdrücke:

$$\pi a_o = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \;,\; \pi a_p = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha \;,\; \pi b_p = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha$$

darstellbar oder richtiger dargestellt sind. Wir wissen gegenwärtig, unter welchen genaueren Bedingungen dies möglich ist, und wissen

namentlich, dass die Integrirbarkeit von f(x) dazu ausreicht.[II]) Jene Benennung erfreut sich indessen keineswegs geschichtlicher Berechtigung, sondern die als Fouriersche zu bezeichnenden Reihen müssten anders umgrenzt werden.

Die vorstehende Bestimmung der Coefficienten der trigonometrischen Reihe rührt eben nicht von Fourier her, sondern der Form nach von Lagrange[III]), und ist mit vollem Bewusstsein zuerst von Euler gegeben[IV]). Euler's scharf gedachte aber zu beschränkte Vorstellung war, dass jede Function f(sin x, cos x), die nach Potenzen von sin x, cos x sich entwickeln lässt, auch in eine nach Vielfachen von x fortschreitende Sinus oder Cosinusreihe entwickelbar sei, und er hat die Coefficienten dieser Entwickelungen wirklich in der heute bekannten Form schon dargestellt.

Fourier's Coefficientenbestimmung ist jedenfalls nicht besser als die Eulersche und beide scheinen mir sogar weniger befriedigend als die ursprüngliche von Lagrange.[V]) Fourier's bahnbrechender Schritt war vielmehr die durch überzeugende Beispiele bestätigte Divination, dass die trigonometrischen Reihen auch unstetige Functionen darstellen, und dass man die zu entwickelnde Function vom Argument in beliebiger Weise abhängig annehmen darf — natürlich innerhalb des Functionsbegriffs seiner Epoche. Um diesen Schritt gehörig zu würdigen, muss man sich in der einschlägigen Literatur des vorigen Jahrhunderts umsehen. Man kann auf Grund der obigen Ueberlegungen die Schöpfung Fourier's der Eulerschen gegenüber kurz so kennzeichnen: Die von Euler gemeinten Reihen haben ein Convergenzgebiet, die von Fourier in die Analysis eingeführten haben nur eine Convergenzlinie. Indessen es würde misslich sein, die einmal gebräuchlich gewordene Bezeichnung: Fouriersche Reihen so zu verschieben, wie es nach dem Gesagten

---

II) Abhandl. d. k. bayer. Akad. der W. II. Cl. XII. Bd. I. Abth.

III) Miscell. Taurin. Tom. III, pag. 260.

IV) Nov. Act. Acad. scient. Petrop. Tom. XI, 1798. Ich verdanke diese Nachweisung Herrn W. Borchardt.

V) Dirichlet giebt im I. Bande des Dowe'schen Repertoriums die Lagrangesche Coefficientenbestimmung wieder, und zeigt an einem Beispiel, dass sie ungenau ist. Der Grund der Ungenauigkeit ist aber die nicht als berechtigt nachgewiesene Häufung zweier Grenzübergänge, nämlich erstens in den Coefficienten von der Summe zum Integral, zweitens von der endlichen Gliederzahl zur unendlichen.

geschichtlich Rechtens wäre, und ich verzichte daher auf Vorschläge in dieser Richtung.

Um noch einen anderen mathematischen Ausdruck zu erwähnen, dem die nachfolgenden Betrachtungen gelten, so theilt Fourier mit Niemand den Ruhm, die nach ihm genannte Formel:

$$\pi f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x)$$

entdeckt zu haben. Wiewohl wir die näheren Umstände, auf denen ihre Eigenthümlichkeit beruht, jetzt völlig durchschauen, so erfüllen ihre Leistungen uns doch stets von Neuem mit Bewunderung, wie wir vom Anblick einer vorbeistürmenden Locomotive immer wieder mächtig ergriffen werden, wenn wir ihren Mechanismus auch noch so genau kennen.

* * *

In den gesicherten Besitzstand der Analysis wurden die Fourierschen Reihen

$$2\pi f(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} \left(\sin px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha + \cos px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha \right)$$

eingereiht durch die berühmte Abhandlung von Lejeune-Dirichlet im IV. Bande des Crelle'schen Journals pag. 157. Es möchte diese Abhandlung die erste sein, in der die Nothwendigkeit erkannt wurde, innerhalb der Mannigfaltigkeit voraussetzungsloser Functionen, auch im Reellen, gewisse Classen mit noch immerhin höchst allgemeinen Charakteren auszusondern. Hierin liegt in meinen Augen der hohe Werth jener Abhandlung, namentlich gegenüber anderen gleichzeitigen oder früheren Versuchen, die Fouriersche Entwicklung zu beweisen.

Während also Dirichlet den Functionsbegriff dem Gegenstande entsprechend zu beschränken lehrte, war er doch frei von den seit ihm veralteten Vorstellungen über das Wesen und die Stetigkeit der Functionen. So sind seiner natürlichen und sachgemässen Ausdrucksweise

jene *portions de fonctions* gewichen, welche aus der Anschauung entspringen mochten, als ob eine Function gleichsam ein einheitlicher Organismus sei, aus dessen Stücken man allerdings, wie seit Fourier zugegeben werden musste, neue Functionen zusammensetzen könne, die aber den ungeheuerlichen Character ihrer Entstehung an der Stirne trügen.

Wenn die Entwickelung des modernen Functionsbegriffs unstreitig von den Fourierschen Entdeckungen ihren Ausgang nahm, so wird man gerechter Weise die bewusste Förderung jenes Begriffs und der damit zusammenhängenden Principien der Integralrechnung u. s. w. auf Fourier's grossen Schüler zurückführen müssen, der mehr als irgend einer seiner Zeitgenossen, besonders durch seine Untersuchungen über die Darstellungsformeln für willkürliche Functionen, zur Läuterung dessen beigetragen hat, was man die Metaphysik der Analysis zu nennen pflegt.

* * *

Die Gültigkeit der Fourierschen Entwicklung ist von Dirichlet bewiesen worden für den Fall, wo die darzustellende Function $f(x)$ im Intervall $-\pi \cdots + \pi$ nicht unendlich viele Maxima hat, eine Bedingung, welche ich die Dirichletsche genannt habe. Nicht im Geringsten beeinträchtigt es die Bedeutung seiner Leistung, wenn er in einer Ankündigung am Schlusse seiner Abhandlung, den Gültigkeitsbereich der Fourierschen Entwickelung, wie aus dem IV. Capitel dieser Abhandlung folgt, überschätzt hat, indem er sie auf alle Functionen anwendbar erklärt, welche (in seinem Sinne) integrirbar seien, also jedenfalls auf alle stetigen Functionen. Er scheint dies unter der Herrschaft einer jener Täuschungen niedergeschrieben zu haben, die in diesen abstrakten Gebieten nur zu oft uns das ersehnte Gestade in unmittelbarer Nähe vorspiegeln, um uns, sobald das Trugbild sich aufgelöst hat, in tiefster Rathlosigkeit über den nunmehr einzuschlagenden Weg und in banger Ungewissheit über die Richtigkeit unserer Voraussetzungen zurückzulassen. Indessen soll Dirichlet den Glauben an den von ihm behaupteten Satz doch nicht verloren haben; auch ist ja dieser Glaube an die Entwickelbarkeit wenigstens aller stetigen Func-

tionen in Fouriersche Reihen bis auf den heutigen Tag ein Stück der mathematischen öffentlichen Meinung geblieben[VI]).

Um so höher wird man es Herrn Lipschitz anrechnen müssen, dass er jene Convergenzfrage, so viel ich weiss, seit Dirichlet zuerst, wieder zum Gegenstand einer Veröffentlichung gemacht hat, in welcher er eine Erweiterung der Dirichletschen Bedingung mit dessen Methoden findet, und die Möglichkeit andeutet, dass eine dieser erweiterten Bedingung nicht genügende Function auch nicht entwickelbar sei[VII]).

* * *

In der Richtung der Bestrebungen des Verfassers, der sich mit der allgemeinen Theorie der Darstellungsformeln für willkürliche Functionen beschäftigte, und über den Gültigkeitsumfang seiner Ergebnisse natürlich möglichst genau sich zu unterrichten wünschte, lag es, auch die Convergenz der Fourierschen Darstellungen auf das eingehendste zu untersuchen.

Er will den Leser nicht davon unterhalten, wie er zuerst von der Allgemeingültigkeit der Entwickelbarkeit der Functionen in trigonometrische Reihen fest überzeugt war, wie er hundert schliesslich als fehlerhaft sich ergebende Versuche machte, sie zu beweisen, wie er, *après maint labeur et usaige* lediglich aus der Dauer und der Viel-

---

VI) Um nur auf Riemann mich zu berufen, so findet man bei ihm zwei Stellen (Dissert. pag. 1, „neuere Untersuchungen haben indessen gezeigt, etc.“ und Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigon. Reihe, pag. 16, „In der That für alle Fälle der Natur, etc.“), die schwerlich anders sich deuten lassen, als so, dass Riemann mindestens alle stetigen Functionen durch trigonometrische Reihe darstellbar annahm.

Die Angabe, dass Dirichlet den Glauben an seinen Satz nicht verloren zu haben scheine, schöpfe ich aus einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Weierstrass.

VII) Borch. Journ. 63. Bd. p. 286. Die im Texte gemeinte Muthmassung (auf der letzten Seite des Aufsatzes), auf welche Hr. Lipschitz schwerlich Gewicht legt, dass möglicherweise schon eine Function, für welche $l\frac{1}{x}\big(f(x) - f(o+o)\big)$ nicht verschwindet, für $x = o$ nicht darstellbar sein könne, trifft in der That zu. Die durch Fouriersche Reihen nicht darstellbaren Functionen beginnen da, wo $\lambda(x)\big(f(x) - f(o+o)\big)$ für $x = o$ nicht verschwindet, und $\lambda(x)$ so langsam, oder langsamer unendlich wie $l\frac{1}{x}$ wird. Im Fall, wo $\lambda(x)$ wie $l\frac{1}{x}$ unendlich wird, bleibt die Fouriersche Reihe aber endlich. (Diese Abh. Art. 40, Schluss.)

seitigkeit seiner erfolglosen Anstrengungen die Ueberzeugung schöpfte, dass die Dirichletsche Behauptung falsch sei, und wie auf solche Weise er endlich auf den Weg geführt wurde, den er von vorneherein hätte einschlagen sollen, nämlich seine Untersuchung genau da anzufangen, wo Dirichlet die seinige, soweit sie gedruckt ist, hatte fallen lassen, d. i. bei den Functionen mit unendlich vielen Maximis Aber eben nicht die schwer zu bewältigenden allgemeinen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der darzustellenden Function waren zu Grunde zu legen, sondern es galt, das Problem möglichst zu vereinfachen, also zu beginnen mit der Untersuchung der Entwickelbarkeit einer Function, wie etwa $\varrho(x)$ $\cos\psi(x)$, wo $\varrho(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ für $x = o$ ohne Maxima verschwinden, und zusammengesetztere Functionen erst dann herbeizuziehen, wenn mit den einfacheren die Grenze der Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen nicht erreicht wurde. Als für diesen Zweck dienliche, nächst zusammengesetztere Functionen waren, wie einige Ueberlegung zeigt, solche der Form $\varrho(x) \cos \Psi(x)$ anzusehen, wo $\Psi(x)$, statt wie $\psi(x)$ ohne Maxima unendlich zu werden, vielmehr in geeigneter Weise mit unendlich vielen Maximis unendlich wird. Die auf die Darstellbarkeit der Functionen bezüglichen Ergebnisse der angedeuteten Untersuchung waren kurzgefasst folgende:

Alle Functionen $\varrho(x) \cos \psi(x)$ sind, unter den obigen Bestimmungen über $\varrho(x)$ und $\psi(x)$, für $x = o$ darstellbar, wogegen man bei Einführung der Function $\varrho(x) \cos \Psi(x)$ sogleich ein Gebiet zum Theil nicht darstellbarer Functionen betritt.

So wurde denn der durch das Convergenzproblem zu bohrende Tunnel an beiden Enden, an dem der Convergenz und an dem der Divergenz, gleichzeitig in Angriff genommen, und es gelang — mit Hülfe einer gewissen neuen Rechnungsart sogar verhältnissmässig leicht — dem practischen Bedürfniss jedenfalls vollauf zu genügen, und auch eine vor der Hand wohl befriedigende theoretische Einsicht in diese dunkelen Fragen zu gewinnen. Eine vollständige Einsicht keineswegs. Vielmehr möchten gerade die nachfolgenden Untersuchungen hinreichenden Grund zu der Vermuthung enthalten, dass unsere analytischen Hülfsmittel noch nicht ausreichen, um die allgemeine nothwendige Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function aufzustellen. Vielleicht

aber gelangt man sogar dahin, überhaupt am Vorhandensein solcher Bedingungen zu zweifeln. (Diese Abh. Schluss des II. Cap.)

Es wird dem Leser nicht unwillkommen sein, wenn der Abhandlung ein etwas eingehender Bericht über ihren Inhalt vorangeschickt wird, der jedoch seinerseits eingeleitet werden mag durch eine kurze Uebersicht dessen, was über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen bereits festgestellt ist.

* * *

Ueber den gegenwärtigen Stand der Convergenzfrage der Fourierschen Darstellungsformeln.

Um zuerst die Aufgaben, mit denen wir uns beschäftigen wollen, scharf auszusprechen, gehen wir aus von der Sinus-Cosinus-Reihe:

$$\pi F(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin px\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\varphi(\alpha)\ \sin p\alpha + \cos px\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\varphi(\alpha)\ \cos p\alpha\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\varphi(\alpha)\ \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{2\ \sin\frac{\beta - x}{2}}$$

$$= \lim_{h=\infty}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\varphi(x+2\alpha)\ \frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}\ ,\ h = 2n+1\ .$$

Wenn wir h unendlich werden lassen, ohne auf seine Form $2n+1$ Rücksicht zu nehmen, und wir erhalten ein bestimmtes Resultat, so können wir für die besondere Form $2n+1$ kein anderes Resultat erhalten, und dürfen von der Einführung dieser Form absehen. Wenn wir aber für $h = 2n+1 = \infty$ eine divergente Grenze erhalten, so wird sie auch divergent sein, wenn wir über h gar nichts voraussetzen.

Es wird sich um Werthe x handeln, die dem Intervall $-\pi < x < +\pi$ angehören, so dass $\frac{\pi - x}{2} = a$, $-\frac{\pi + x}{2} = -b$, $\varphi(x + 2\alpha) = f(\alpha)$ gesetzt, der

$$\lim_{h=\infty} \int_{-b}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

zu untersuchen ist. Wir vereinfachen die Frage, indem wir

$$\int_{-b}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} = \int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} + \int_{o}^{b} d\alpha f(-\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

schreiben und den Limes der Integrale rechts einzeln bestimmen. Diese Untersuchung reducirt sich aber ersichtlich auf die des einen Integrals:

$$\int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}.$$

Kennen wir die Bedingungen für f(x), unter denen dieser Limes den Werth $\frac{\pi}{2} f(o)$ erhält, so wird das Convergenzproblem gelöst sein mit Ausnahme des besonderen Falles, wo die Integrale $\int_{o}^{a}$, $\int_{-b}^{o}$ beide an der Grenze divergiren, jedoch so dass ihre Summe convergirt, ein Fall, der hier kein Interesse bietet.

Nehmen wir $a < \frac{\pi}{2}$ an, und $o < \varepsilon < a$, so ist:

$$\int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\sin \alpha} = \int_{o}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a}$$

$$= \frac{\bar{\varepsilon}}{\sin \varepsilon} \int_{o}^{\varepsilon} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}\right) \int_{o}^{\bar{\varepsilon}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}+\frac{a}{\sin a}\int_{\bar{a}}^{a} d\alpha f(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}\ ,\ o\leq\bar{\varepsilon}\leqq\varepsilon\ ,\ \varepsilon\leqq\bar{a}\leqq a\ .$$

Wenn nun für positive a, b, c die Gleichungen gelten:

$$\lim_{h=\infty}\int_{b}^{c} d\alpha f(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = o\ \ldots\ldots \qquad \text{I}$$

$$\lim_{h=\infty}\int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2}f(o)\ ,\ \ldots\ldots \qquad \text{II}$$

so muss, wie aus dem Obigen hervorgeht, die Fouriersche Entwicklung richtig sein. Wenn dagegen für gewisse Functionen f(x) zwar die erste Formel eintrifft, dagegen der Limes $h = \infty$ von

$$\int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen unbestimmt ist, und dies so, dass der Limes jedes Integrals $\int_{o}^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$, im Fall $\bar{a} < a$, dem absoluten Werthe nach nicht über den Limes des Integrals $\int_{o}^{a}$ sich erheben kann; so wird, weil $1 - \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}$ beliebig klein gedacht werden darf, die Fouriersche Entwickelung divergiren.

Dieselben Integrale I, II entscheiden über die Richtigkeit der Fourierschen Formel:

$$\int_{o}^{\infty} d\alpha\int_{A}^{B} d\beta f(\beta)\cos\alpha(\beta - x) = \pi f(x)\ ,$$

wie dem Leser früherer Abhandlungen des Verfassers bekannt ist.

In diesen Abhandlungen ist weiter gezeigt, dass jene Sätze I, II besondere Fälle dieser sind:

$$\lim_{h=\infty}\int_b^c d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \qquad \text{Ia}$$

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha, h) \;.\;.\;.\;.\;. \qquad \text{IIa}.$$

Die Function $\varphi(x, h)$ betreffend, setzt der erste Satz voraus, dass $\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha, h)$ zwischen irgend welchen dem Intervall $b \ldots c$ angehörigen Grenzen Null ist, der zweite, dass $\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha, h)$ von a unabhängig ist.

Diese beiden Sätze nenne ich den ersten und den zweiten Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale.

Die Bedingungen, welche die beiden Hauptsätze der Function $f(x)$ auferlegen, habe ich unter den allgemeinsten Voraussetzungen über $\varphi(x, h)$ eingehender Prüfung unterworfen in einer Abhandlung: Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38. Wie ich in dieser Abhandlung bemerkte, hat vermuthlich jedes darstellende Integral seine eigene Theorie und ganz besonders gilt dies von den Integralen I und II. Den Gültigkeitsbereich dieser speciellen Formeln festzustellen, ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Folgendes sind die bereits für diesen Gültigkeitsbereich aufgestellten Regeln.

* * *

Der erste Hauptsatz

$$\lim\int_b^c d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h = 0 \qquad \text{I}$$

$$\lim\int_b^c d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = 0 \qquad \text{Ia}$$

gilt, so oft die Function f(x) integrirbar ist, offenbar eine nothwendige Bedingung. Wird sie in einem Punct unendlich, so gilt der Satz, wenn das Integral $\int f(\alpha)d\alpha$ über die Unendlichkeitsstelle unbedingt convergirt, eine Bedingung, welche, wie Beispiele lehren, nicht die nothwendige ist.

Für endliche Functionen f(x) ist also der Gültigkeitsbereich dieses Satzes so gross, wie man es nur erwarten konnte.

Der andere Hauptsatz:

$$\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o) \qquad \text{II}$$

$$\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = f(o) \lim \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h) \qquad \text{IIa}$$

auferlegt in jedem x = o ausschliessenden Intervall der Function f(x) ebenfalls nur die Bedingung der Integrirbarkeit. Weiter hat die Analyse verschiedene Annäherungsweisen der Function f(x) an x = o ergeben, bei denen der zweite Hauptsatz immer stattfindet, von denen indessen keine nothwendig ist. Ich führe sie an, mit den allgemeinsten (f(x) am wenigsten einschränkenden) Bedingungen beginnend.

1. Unter gewissen Beschränkungen, welche $\varphi(x, h)$ betreffen, und $\varphi(x, h) = \frac{\sin xh}{x}$ nicht ausschliessen, gilt der zweite Hauptsatz, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

unbedingt convergirt.[VIII])

2. Unter keinen anderen Einschränkungen von $\varphi(x, h)$, als denen, welche der allgemeine Satz IIa vorschreibt, findet er statt, so oft das Integral

VIII) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38, Art. 9.

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha)$$

absolut convergirt.[IX])

3. Aus der Bedingung 1 folgt (diese Abh. Art. 26, und Borch. Journ. 79. Bd. pag. 62), dass der zweite Hauptsatz stattfindet, wenn

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - f(0+0)}{\tau(x)}$$

nicht unendlich ist, wo unter $\tau(x)$ die ohne Maxima Null werdende Function gedacht ist, welche die Grenze der Convergenz und Divergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

bildet.[X]) Diese Bedingung enthält die oben erwähnte des Hrn. Lipschitz.

4. Die alte Dirichletsche Bedingung lautet, dass der zweite Hauptsatz gilt, wenn $f(x) - f(0+0)$ von einem hinreichend kleinen Werthe von x an ohne Maxima mit x verschwindet.

Es ist zu bemerken, dass von den beiden letzteren Bedingungen keine die andere vollständig enthält.

Schliesslich hebe ich noch hervor, dass man Satz II oder die Frage nach dem Werth des darin vorkommenden Integral-Limes als zur Theorie des ersten Hauptsatzes gehörig betrachten kann, indem man II schreibt:

IX) Ebenda, Art. 8.

X) Die Einführung dieser Function $\tau(x)$ kann als im Widerspruch mit dem Schluss angesehen werden, dass es keine Function giebt, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildet. Ein Widerspruch ist indessen hier nicht vorhanden. Die genauere Erörterung dieser etwas subtilen Frage werde ich demnächst an anderem Orte geben. Hier nur in der Kürze die Andeutung, dass die Function τ zu den von der Seite der Divergenz, wie von der Seite der Convergenz her sich ihr nähernden Functionen in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zu den ihm umschriebenen und eingeschriebenen Linien. Practisch braucht man übrigens unter τ nicht die Grenze der Convergenz und Divergenz selbst sich vorzustellen, sondern es genügt, darunter eine Function sich zu denken, die der Grenze näher liegt, als alle anderen in den gerade vorgelegten Calcul eingehenden.

$$\lim \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha h \; .$$

Es würde sich dann um den Limes von

$$\int_b^c d\alpha f(\alpha)\, \varphi(\alpha\, , \mathrm{h})$$

handeln, wenn für einen zwischen b und c gelegenen Werth von x gleichzeitig f(x) unendlich und $\varphi(x\,, h)$ Null wird, eine Auffassung, die im Folgenden ihre Berücksichtigung findet.

* * *

Eingehender Bericht über die folgende Untersuchung.

Die Aufgabe, den $\text{Limes}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ zu untersuchen, führt, wie viele andere Convergenzprobleme auf die Aufgabe, die Stärke des Null- oder Unendlichwerdens nicht explicite gegebener Functionen zu bestimmen. Beispielsweise fällt man bei der obigen Grenzbestimmung u. A. auf folgende Gleichung:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = \text{constans}$$

für eine unbekannte Function $\delta = \chi(\alpha)$, deren Nullwerden für $\alpha = 0$ zu beurtheilen ist (Art. 14).

Nahe liegt es, $\psi(\alpha + \delta)$ nach Potenzen von δ zu entwickeln, bei den ersten Gliedern die Entwickelung abzubrechen, und anzunehmen, dass δ wie die Wurzel aus $\psi''(\alpha)^{-1}$ Null wird, ein Ergebniss, dass sich für einzelne Functionen ψ als richtig erweist. Dieser Schluss, bei dem ich anfangs umsomehr mich beruhigen zu dürfen glaubte, als er bei einer ähnlichen Gelegenheit auch von Riemann gemacht wird,[XI]) zwang

XI) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch e. trigon. R. Art. 13.

jedoch Divergenz der Fourierschen Entwickelung bei Functionen anzunehmen, für welche sich die Convergenz der Entwicklung anderweitig feststellen liess, also musste der Schluss, allgemein zu reden, unrichtig sein.

Zwischen dieser Wahrnehmung und einer wirklich genügenden Auflösung der angeführten und der ihr ähnlichen Gleichungen, lag indessen noch ein weiter Weg. Es handelte sich, wie der Erfolg zeigt, um die Aufstellung einer neuen Rechnungsart, die ich, dieser ihrer ersten grösseren Anwendung vorgreifend, in den Annalen von Clebsch und Neumann, Th. VIII, S. 363 auseinandergesetzt habe, und Infinitärcalcül nenne. An der Hand der a. a. O. erörterten Methoden bieten sich neue analytische Erscheinungen dar, deren eigenthümlichste wohl die überall auftretende, fast zur Regel werdende Unstetigkeit der Gesetze ist, welche die Geschwindigkeit des Unendlichwerdens der Functionen bestimmen, wie denn z. B. die Auflösung obiger Gleichung $\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) =$ $= constans$ drei Formen hat, jenachdem nämlich $\psi(\alpha)$ rascher, gleich rasch, oder langsamer als der $\log \frac{1}{\alpha}$ unendlich wird.

Die im Folgenden besonders zur Anwendung kommenden Formeln aus der angeführten Abhandlung habe ich kurz zusammengestellt pag. 1—6.

Jene Rechnungsart einmal gefunden und sorgfältig durchdacht, war die Bahn frei, und da ich nun über viel weiterreichende Mittel wie früher verfügte, so habe ich mir die Genugthuung nicht versagt, auch allgemeinere Aufgaben als das nackte Convergenzproblem der Fourierschen Reihen zu untersuchen. Ich habe festgestellt den $\text{Limes}_{h \doteq \infty}$ des Integrals

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

für jeden Werth von c, für beliebiges Null- oder Unendlichwerden von $\sigma(\alpha)$, und beliebiges Unendlichwerden von $\psi(\alpha)$.

Für $c = o$ findet sich diese Untersuchung in den Art. 1—17. Ihre Ergebnisse enthält die Tabelle Art. 17. Den Fall $c > o$ erörtert Art. 18, und am Schluss findet man die bezüglichen Ergebnisse gleichfalls in eine Tabelle geordnet. Der ersten Untersuchung, welche bei den

mannigfachen Fällen, die sie umfasst, etwas zusammengesetzt ausfallen musste, ist eine kurze Uebersicht über ihren Gang voraufgeschickt, pag. 7—11.

* * *

Die in den Tabellen Art. 17 und 18 enthaltenen Grenzergebnisse haben das Angenehme, dass sie uns in den Stand setzen, die für die beiden Hauptsätze der Theorie gefundenen Gültigkeitsbedingungen an einer hinreichend umfassenden Functionenklasse, für welche die nothwendigen Bedingungen der Darstellbarkeit bekannt sind, mit aller Schärfe zu vergleichen. Dies geschieht für den ersten Hauptsatz im zweiten, für den zweiten Hauptsatz im dritten Capitel. Da die allgemeinsten unter jenen Gültigkeitsbedingungen die Untersuchung gewisser Integrale auf die Art ihrer Convergenz, ob sie absolut oder bedingt sei, erheischen, so ist diese Untersuchung auch ein wesentlicher Theil des Inhalts der erwähnten Capitel, namentlich des dritten. Die Vergleichung der Tragweite der verschiedenen Gültigkeitsbedingungen wird durch die Figuren auf Tafel I und II übersichtlich gemacht.

Nehmen wir zu den drei ersten Capiteln noch die erste Hälfte der „Schlussbetrachtungen" dieser Abhandlung hinzu, so sind deren Ergebnisse, so weit sie nur die Darstellbarkeit der Functionen durch trigonometrische Reihen betreffen, kurzgefasst diese:

Wenn für einen Punct x_1 die Differenz

$$f(x_1) - \lim_{x = x_1} f(x)$$

auf die Form $\varrho(x_1 - x) \cos \psi(x_1 - x)$ gebracht werden kann, wo $\varrho(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ für $x = o$ ohne Maxima Null werden, so ist $f(x_1)$ darstellbar. Diese Bedingung gestattet bedeutende Erweiterungen, theils indem man für die Function $\varrho(x) \cos \psi(x)$ eine Summe solcher Functionen $\sum_1^\infty \varrho_p(x) \cos \psi_p(x)$ einführt, theils indem man den Cosinus durch eine trigonometrische Reihe ersetzt. Von diesen Erweiterungen handelt der erste Theil der Schlussbetrachtungen, wo sie indessen, da sie nicht ganz kurz zu erledigen sind, auch wohl noch kein sehr hervorragendes Interesse bieten, nicht vollständig durchgeführt werden.

Zu erwähnen ist noch der im Art. 32 zur Sprache kommende Fall der Nichtdarstellbarkeit einer Function, wo sie nämlich in einem Puncte unendlich wird, während ihre trigonometrische Entwickelung in diesem Puncte convergirt.

* * *

Der Rest der Abhandlung, das vierte Capitel und die zweite Hälfte der Schlussbetrachtungen beschäftigt sich mit der Darlegung der Bedingungen, unter denen die trigonometrische Entwickelung einer endlichen und stetigen Function für einzelne Puncte divergirt. Es wird im IV. Capitel zuerst gezeigt, dass der $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ zwischen unendlichen Grenzen schwankt, wenn für f(x) eine Function $\sin \Psi(x)$ genommen wird, die in Strecken, welche bei Annäherung an $x = o$ gegen Null abnehmen, periodisch ist, aber mit gleichfalls gegen Null abnehmenden Perioden, so dass beim Wachsthum von h die Perioden von $\sin \alpha h$ unbegrenzt oft in aufeinanderfolgenden Strecken denen von $\sin \Psi(x)$ gleich werden (Art. 34). Alsdann weise ich nach, dass sich eine ohne Maxima verschwindende Function $\varrho(x)$ angeben lässt, so dass auch für $f(x) = \varrho(x) \sin \Psi(x)$ jener Limes verschwindet.

Nachdem dies in Ordnung gebracht ist, tritt die Frage nach den günstigsten Bedingungen für die Divergenz in den Vordergrund, und es ergiebt sich, dass für eine stetige Function die trigonometrische Reihe, durch eine Function ihrer Gliederzahl dividirt, welche rascher als der Logarithmus unendlich wird, stets Null zur Grenze hat, aber durch den Logarithmus oder eine langsamer unendlich werdende Function der Gliederzahl dividirt, zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen schwanken kann.

Bei dieser Gelegenheit zeigt sich noch, dass die divergenten trigonometrischen Reihen erst bei Functionen erscheinen, deren Differenzen $f(x_1) - \lim_{x=x_1} f(x)$ für einzelne Puncte x_1 so langsam oder langsamer wie der reciproke Logarithmus von $\frac{1}{x - x_1}$ verschwinden.

Die im vorstehenden gemeinten Functionen $\varrho(x)$ sin $\Psi(x)$ konnten zwar selbst stetig gemacht werden, aber es war noch zu zeigen, dass die unbegrenzt vielen Unstetigkeiten ihrer Differentialquotienten in der Nähe von $x = o$ auf die erhaltenen Resultate ohne Einfluss seien. Zu diesem Behuf wird im Art. 41 die Function sin $\Psi(x)$ durch eine gleiches leistende mit beliebig vielen, in den folgenden Artikeln durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt. Diese Function beweist zwar, was sie soll, ist aber nicht einfachen Baues. Ich zweifle nicht, dass schon ganz gewöhnliche aus trigonometrischen und Exponentialfunctionen zusammengesetzte Functionen für einzelne Argumente nicht darstellbar seien, habe dergleichen Beispiele aber erst aufzusuchen angefangen, als ich des Gegenstandes und der Art der Behandlung, die er erheischt, zu müde war, um noch hinreichende Ausdauer für diese Nachforschungen übrig zu haben.

In den Schlussbetrachtungen wird aus der für den Argumentwerth $x = o$ nicht darstellbaren Function $\varrho(x)$ cos $\Psi(x)$ eine andere abgeleitet, die zwar durchweg stetig ist, deren trigonometrische Entwickelung aber in jedem kleinsten Intervall Puncte besitzt, in denen sie divergirt.

Inhaltsverzeichniss.

I. Capitel.

Untersuchung des $\mathrm{Limes}_{h=\infty}\left(J = \int_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin h\alpha\right)$.

II. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes, falls die willkürliche Function unendlich wird.

III. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes, welcher dem Convergenzbeweis für die Fourier'schen Reihen zu Grunde liegt.

IV. Capitel.

Darstellung der Bedingungen, unter denen die Fourierschen Reihen divergiren.

Schlussbetrachtungen.

Untersuchungen

über die

Convergenz und Divergenz

der

Fourierschen Darstellungsformeln.

Von

Paul du Bois-Reymond.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Untersuchungen

über die

Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.

Hülfssätze aus dem Infinitärcalcül.

Bezeichnungen und einfache Operationen des Infinitärcalcüls, die im Folgenden zur Anwendung kommen.

I.

Es handelt sich nur um Functionen, die nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Wenn der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für irgend einen numerischen Werth von x (wohin auch ∞ zu rechnen) einen unendlich grossen, oder einen endlichen von Null verschiedenen, oder einen verschwindenden Limes hat, so bezeichnen wir dies mit:

$$\varphi(x) \succ \psi(x) \ , \ \varphi(x) \sim \psi(x) \ , \ \varphi(x) \prec \psi(x) \ .$$

Im Falle $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$ sagen wir, wenn beide Functionen unendlich werden: das Unendlich von $\varphi(x)$ ist grösser resp. kleiner als das von $\psi(x)$, und wenn sie verschwinden, sagen wir das Gleiche von der Null dieser Functionen.

Relationen wie $\varphi(x) \underset{<}{\overset{>}{\sim}} \psi(x)$ heissen infinitäre Gleich- oder Ungleichheiten. Falls zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einen endlichen gleichen Limes haben, soll dies kurz durch:

$$\varphi(x) \overline{\overline{\infty}} \psi(x)$$

bezeichnet werden.

II.

Man kann jede infinitäre Gleich- oder Ungleichheit mit einer beliebigen Function an beiden Seiten multipliciren, auf beliebige Potenzen erheben oder logarithmiren.

Man kann in der infinitären Gleich- oder Ungleichheit

$$\lambda(x)\,\varphi_1(x) + \mu(x) \underset{<}{\overset{>}{\sim}} \psi(x)$$

die linke Seite ersetzen durch $\varphi_1(x)$, wenn $\mu(x) < \varphi_1(x)$, $\lambda(x) \sim 1$ ist.

Man kann die infinitären Gleich- oder Ungleichheiten differenziren und integriren mit folgenden Ausnahmen: Wenn in $\varphi(x) \gtrsim \psi(x)$ die linke Seite einen endlichen Limes hat, ist die Relation im Allgemeinen nicht differenzirbar, und die Ungleichheit $\varphi(x) > \psi(x)$ ist dann nicht integrirbar, wenn $\int \varphi(x)\,dx$ einen endlichen Limes hat, weil sich alsdann daraus $\int \varphi(x)dx \sim \int \psi(x)dx$ ergiebt. [1])

In Bezug auf das Unendlich der Functionen, wenn ihr Argument unendlich wird, hebe ich noch den Begriff der Infinitärtypen hervor. So nenne ich eine Function t, welche die Gleichheit $t f'(x) \sim f(x)$ erfüllt. Zum Typus wird man die einfachste, dieser Gleichheit genügende Function wählen.

Ueber Grenzwerthe von Ausdrücken der Form $\frac{f(\alpha + \varphi(x))}{f(\alpha)}$

III.

Zu Grunde lege ich den Satz: Es sei $\lambda(\alpha) > 1$ für $\alpha = 0$ und ebenso $u \lesssim 1$, so hat man:

---

1) Siehe: Borch. Journ. Bd. 74, pag. 297 und Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII, pag. 373 Anm.

$$\frac{\lambda\left(\alpha + \dfrac{\alpha u}{\lambda(\alpha)}\right)}{\lambda(\alpha)} \underset{\infty}{=} 1.$$ [2])

Hieraus wollen wir einige Schlüsse ziehen.

IV.

Es sei $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, oder wie durch Differentiation folgt $\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, $\mu(\alpha) > 1$, so hat man:

$$\frac{\psi'\left(\alpha + \dfrac{u}{\psi'(\alpha)}\right)}{\psi'(\alpha)} \underset{\infty}{=} 1$$

Denn setzt man in vorstehendem Ausdruck $\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ statt $\psi'(\alpha)$, so findet man:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \dfrac{\alpha u}{\mu(\alpha)}} \cdot \frac{\mu\left(\alpha + \dfrac{\alpha u}{\mu(\alpha)}\right)}{\mu(\alpha)}$$

V.

Es sei wieder $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, so ist auch:

$$\frac{\psi''\left(\alpha + \dfrac{u}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\psi''(\alpha)} \underset{\infty}{=} 1.$$

Denn aus $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ folgt auch zweimalige Differentiation: $\psi''(\alpha) = \frac{\mu_1(\alpha)}{\alpha^2}$, $\mu_1(\alpha) > 1$, woraus diese Formel sich ergiebt.

VI.

Endlich unter derselben Voraussetzung $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ sei $1 < \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, so ist auch:

---

2) Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII, pag. 381.

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} \overline{\overline{\infty}} \ 1\,.$$

Beweis: Man hat:

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} = 1 + u\,\frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)\,\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)}\,, \quad o \leqq u_1 \leqq u\,,$$

und es ist zu zeigen, dass

$$1.\ \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} < 1\,, \quad 2.\ \frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)} \overline{\overline{\infty}} \ 1\,.$$

Um die erste Formel zu beweisen, d. i. um zu beweisen, dass

$$\sigma'(\alpha) < \sigma(\alpha)\,\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}\,,$$

führen wir ein $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, wodurch vorstehende Ungleichheit wird (in etwas abgekürzter Schreibweise):

$$\gamma'\psi' + \gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$$

Nun werde ich zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen stets

$$\gamma\psi'' > \gamma'\psi'$$

ist. Aus $\sigma = \gamma\psi' > 1$ folgt:

$$\psi' > \frac{1}{\gamma}$$

oder

$$l\psi' > l\frac{1}{\gamma}.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{\psi''}{\psi'} > \frac{\gamma'}{\gamma}\,,$$

und durch Multiplication mit $\gamma\psi'$ ergiebt sich $\gamma\psi'' > \gamma'\psi'$. Die zu beweisende Ungleichheit $\gamma'\psi' + \gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$ kürzt sich somit zu $\gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$ d. i. zu

$$\psi''^{\frac{1}{2}} < \psi'$$

ab. Aber wenn man dies schreibt:

$$\frac{\psi''}{\psi'^2} < 1 \;,$$

und integrirt, so folgt gerade $\frac{1}{\psi'} < \alpha$ oder

$$\psi' > \frac{1}{\alpha}$$

wie dies in der That aus der Differentiation von $\psi > \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$ folgt.

Zweitens war der Limes:

$$\frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)} \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1 \quad , \quad o \leqq u_1 \leqq u$$

zu beweisen. Dies ist sehr einfach. Aus $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ folgt $\sigma'(\alpha) < \psi''(\alpha)$, und daher findet wegen V die vorstehende Formel a fortiori statt.

Infinitäre Auflösung einiger Gleichungen.

VII.

Es sei δ bestimmt durch die Gleichung

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) \pm \frac{\delta C}{\alpha} = = \pm N \,,$$

wo $\psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$, so findet man:

$$\delta = \frac{uN\alpha}{C} \quad , \quad u \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1 \,.$$

Für $\psi(\alpha) \backsim \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$ ist

$$\delta = up\alpha \quad , \quad u \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1 \,,$$

wo p der Gleichung:

$$\psi_1(o)\,\mathrm{l}\,\frac{1}{1 + p} \pm pC = \pm N \quad , \quad \psi_1(o) \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} \frac{\psi(\alpha)}{\mathrm{l}\frac{1}{\alpha}}$$

genügt.[3])

---

3) Ann. v. Cl. u. N. Bd. VIII, pag. 412.

VIII.

Es sei δ bestimmt durch diese Gleichung:

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)\pm\delta\psi'(\alpha)v=N,$$

wo $\psi(\alpha)>l\frac{1}{\alpha}$, $v<1$ sei, so ist:

$$\delta=\frac{uN}{\psi'(\alpha)}\quad,\quad u\,\overline{\overline{\infty}}\,1\,.$$ [4])

IX.

Es sei endlich δ bestimmt durch:

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)-\delta\psi'(\alpha)=N\,.$$

Man findet für $\psi(\alpha)>l\frac{1}{\alpha}$:

$$\delta=u\sqrt{\frac{2N}{\psi''(\alpha)_{\frac{1}{2}}}}\quad,\quad u\,\overline{\overline{\infty}}\,1$$ [5]).

---

4) Ebenda.

5) Ann. v. Cl. u. N. Bd. VIII, pag. 407 sqq.

I. Capitel.

Untersuchung des Limes$_{h=\infty}$ $\left(J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha\right)$

Kurze Uebersicht über den Gang dieser Untersuchung.

Da die Untersuchung des Limes $\left(J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin ha\right)$ etwas zusammengesetzter Natur ist, so wird es für Leser, die sich nicht darin zu vertiefen beabsichtigen, erwünscht sein, nicht allein über ihre Resultate eine Uebersicht zu erhalten, wie sie die Tabelle des Art. 17 zu gewähren bestimmt ist, sondern auch mit ihrem Gang im Allgemeinen sich bekannt machen zu können. Solchen Lesern aber, welche die Untersuchung jenes Limes genauer studieren wollen, wird eine kurze Zusammenstellung ihrer Hauptstationen eine nicht von der Hand zu weisende Erleichterung bieten.

Um Functionen von übersichtlicheren Schwankungen unter- Art. 1.
suchen zu können, zerlegt man das Integral J zuerst so:

$$J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin ah = \tfrac{1}{2}J - \tfrac{1}{2}J_2\,, \quad \ldots . \qquad \text{I}$$

$$J_1 = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\eta \quad , \quad J_2 = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\chi$$

wo

$$\eta = \eta(\alpha) = \psi(\alpha) + h\alpha$$
$$\chi = \chi(\alpha) = \psi(\alpha) - h\alpha\,.$$

Dann ergibt sich aber alsbald, dass diese Zerlegung nur dann erlaubt ist, wenn $\psi(\alpha)$ rascher unendlich wird, als der $\log\frac{1}{\alpha}$: es sei denn, dass $\sigma(\alpha)$ um ein Gewisses langsamer unendlich werde als $\frac{1}{\alpha}$, wodurch aber gerade die für die Fourierschen Reihen interessantesten Annahmen ausgeschlossen würden. Somit zerfällt die Untersuchung in zwei Theile: 1. wenn $\psi(\alpha)$ ebenso langsam oder langsamer unendlich wird, wie der $\log\frac{1}{\alpha}$, 2. wenn $\psi(\alpha)$ rascher unendlich wird.

A Der Untersuchung erster Theil: $\psi(\alpha)$ wird nicht rascher unendlich wie der $\log\frac{1}{\alpha}$.

Hier kann man von der Zerlegung I des Integrals J erst Gebrauch machen, nachdem man von J ein Theilintegral mit der Grenze Null abgetrennt und für sich untersucht hat. Der Rest kann dann mit Hülfe der Zerlegung I untersucht werden. Es wird also $J = \int\limits_0^a$ in die Integrale $\int\limits_0^{\alpha'} + \int\limits_{\alpha'}^a$ zerlegt werden, und die Kunst besteht nun darin, α' so sich auszusuchen, dass der Limes des Theilintegrals ohne Mühe sich feststellen lässt. Dies leistet
Art. 2, 3. die Bestimmung $\alpha' h = C$, wo C ungemein gross zu denken ist, dabei aber h so gross angenommen wird, dass α_1 zwischen o
Art. 4. und a fällt. Indessen muss das Integral von o bis α' noch einmal gespalten werden. Auch ist es vortheilhaft, die Untersuchung zunächst unter der einfacheren Annahme durchzuführen, dass $\sigma(\alpha) = 1$ ist, so dass man im Ganzen hat:

$$J = \int\limits_0^a d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{h}} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} + \int\limits_{\frac{\varepsilon}{h}}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin[\psi(\alpha)+\alpha h]}{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin[\psi(\alpha)-\alpha h]}{\alpha}.$$

Wenn ε hinreichend klein ist, ist der Limes des ersten Integrals rechts beliebig nahe der Null, wenn C in $\alpha' h = C$ hinreichend gross, ist der Limes des zweiten Integral nicht ausserhalb des Intervalls $-\frac{\pi}{2} \dots +\frac{\pi}{2}$ anzutreffen, aber auch kein bestimmter. Der Limes des dritten und vierten Integrals nähert sich der Null. Wenn dann statt $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ wieder eine allge- Art. 6, 7, 8, 9
meinere Hypothese eingeführt wird, z. B. gesetzt wird $\sigma(\alpha) =$ Art. 10.
$= \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, so bleibt Null der Limes der drei übrigen Integrale und der des zweiten ist wieder enthalten im Intervall $-\varrho(o)\frac{\pi}{2} \dots + \varrho(o)\frac{\pi}{2}$, womit der Fall $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ erledigt ist. Für $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ wird der Limes direct und zwar unter der Annahme $\varphi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ Art. 5.
berechnet. Es ergiebt sich ein etwas anderer Ausdruck für die Grenze des den Limes einschliessenden Integrals.

Der Untersuchung zweiter Theil: $\psi(\alpha)$ wird rascher B unendlich wie $l\frac{1}{\alpha}$.

Hier darf man also setzen:

$$\int_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin h\alpha = \frac{1}{2}\int_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha)\sin\eta - \frac{1}{2}\int_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi\,, \qquad \text{Art. 12.}$$

wo $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$, $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$. Auch über $\sigma(\alpha)$ verlangt die Untersuchung Annahmen, und zwar, $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$ gesetzt, die Annahme, dass $\gamma(\alpha)$ für $\alpha = o$ verschwindet. Es zeigt sich indessen später, dass diese Annahme in Wahrheit keine Beschränkung enthält. Ausserdem ist auch $\sigma(o) = \infty$ vorausgesetzt, weil sonst lim J nach allgemeinen Sätzen Null ist. Führt man

die Grössen η und χ als Veränderliche in die obigen Integrale rechts ein, so ist dabei folgendes zu bemerken. Das zweite Integral nach χ wird:

$$\int\limits_{\chi(o)=\infty}^{\chi(a)} d\chi \cdot \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)-h} \sin\chi\,,$$

weil $\chi(\alpha)$ von $\alpha = o$ bis $\alpha = a$ abnimmt. Anders verhält sich $\eta(\alpha)$, das von $\alpha = o$ bis $\alpha = \alpha_1$ (wo α_1 durch $\eta'(\alpha_1) = \psi'(\alpha_1) + h = o$ bestimmt ist) abnimmt und dann wieder bis $\alpha = a$ zunimmt, so dass man das erste Integral als Summe zweier Integrale schreiben muss. Die Untersuchung des Integrals nach χ wird aber ihrerseits dadurch weniger einfach gemacht, dass die Function:

$$\sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)-h}$$

Art. 13. zwischen den Grenzen des Integrals ein Maximum für $\alpha = \alpha^*$ hat. Es wird sonach wieder eine Zerlegung des ursprünglichen Integrals J in vier Theile nöthig und man hat also zu setzen:

$$J = \int\limits_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin h\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{\eta(o)=\infty}^{\eta(\alpha_1)} d\eta \ldots + \frac{1}{2}\int\limits_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\eta \ldots$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\chi(o)=\infty}^{\chi(\alpha^*)} d\chi \ldots + \frac{1}{2}\int\limits_{\chi(\alpha^*)}^{\chi(a)} d\chi \ldots$$

Irgend eines dieser vier Integrale, z. B. das erste, hat also jetzt die Form:

$$\int d\eta\, f(\eta) \sin\eta\,,$$

wo $f(\eta)$ zwischen den Grenzen der Integration kein Maximum oder Minimum mehr hat, also dass das Integral in eine Schaar alternirender, ihrem absoluten Werthe nach abnehmender Theile zerfällt, deren Summe eingeschlossen ist zwischen dem grössten dieser Theile, und der Differenz des grössten und zweitgrössten, was erlaubt, den Limes der vier Integrale zu berechnen.

Man findet, dass die beiden Integrale nach χ unter den über $\sigma(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ gemachten Voraussetzungen, den Limes Null haben. Auch die Integrale nach η haben den Limes Null, wenn noch die fernere Hypothese hinzutritt, dass die Grösse

$$\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$ Art. 14.

mit α verschwindet. Wenn jedoch diese Grösse unendlich wird, Art. 15. so lässt sich zeigen, dass die nach η genommenen Integrale für $h = \infty$ zwischen unendlichen Grenzen hin und her schwanken, womit die Untersuchung ihren Abschluss findet.

I. Durch die Zerlegung des Integral J, zu der die Untersuchung naturgemäss zuerst ihre Zuflucht nimmt, ergiebt sich auch sogleich ihre natürliche Eintheilung.

Am nächsten liegt es, die Untersuchung des Limes $h = \infty$ von

$$J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha$$

an die Umformung zu knüpfen:

$$J = \tfrac{1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\eta - \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\chi\,,$$

wo, wie ich gleich bemerken will, die Functionen

$$\eta = \eta(\alpha) = \psi(\alpha) + h\alpha$$
$$\chi = \chi(\alpha) = \psi(\alpha) - h\alpha$$

im Grossen und Ganzen folgenden Verlauf haben:

Die Function $\eta(\alpha)$ wird unendlich für $\alpha = o$. Sie hat ein Minimum für einen durch

$$\psi'(\alpha_1) + h = o$$

bestimmte positiven Werth $\alpha = \alpha_1$, der Null wird für $h = \infty$, da $\psi'(\alpha)$ negativ ist und mit $\psi(\alpha)$ für $\alpha = o$ unendlich werden muss. So gross wollen wir aber h von vorneherein annehmen, dass $o < \alpha_1 < a$. Von $\alpha = \alpha_1$ an wächst $\eta(\alpha)$ bis zum Werth $\psi(a) + ah$, den wir uns mit h zugleich sehr gross vorstellen wollen. Die Function $\chi(\alpha)$ nimmt von $\chi(o) = \infty$ bis $\chi(\alpha) = \psi(a) - ha$ fortgesetzt ab.

Aus der Zerlegung

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\eta - \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\chi = \tfrac{1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2$$

ergiebt sich zunächst eine Eintheilung unserer Untersuchung nach dem Unendlich von $\psi(\alpha)$ bei verschwindendem α. Führen wir in J_2 statt α die Veränderliche χ ein, so folgt:

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi = \int_{\chi(o)}^{\chi(a)} d\chi\frac{d\alpha}{d\chi}\sigma(\alpha)\sin\chi = -\int_{\chi(a)}^{\infty} d\chi\frac{\sigma(\alpha)\sin\chi}{\psi'(\alpha)-h}.$$

Nun folgt aber aus:

$$\psi(\alpha) \lesseqgtr l\frac{1}{\alpha}$$

durch Differentiation:

$$\psi'(\alpha) \lesseqgtr \frac{1}{\alpha},$$

oder $\psi'(\alpha) = -\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ gesetzt, entsprechen den vorstehenden drei Zeichen die Fälle:

$$\mu(\alpha) \lesseqgtr 1.$$

Dadurch wird:

$$J_2 = \int d\chi\frac{\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi}{\alpha h + \mu(\alpha)}.$$

Unter der Annahme $\mu(\alpha) \stackrel{\sim}{\leq} 1$ ist dies Integral dann ersichtlich unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Unbestimmtheitsgrenzen, falls nicht $\alpha\sigma(\alpha) < \alpha h + \mu(\alpha)$.

D. h. im günstigsten Falle darf $\sigma(\alpha)$ höchstens ein Unendlich haben, das um ein Gewisses kleiner ist als das von $\frac{1}{\alpha}$. Es ist also die Zerlegung $J = \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2$ für $\mu(\alpha) \stackrel{\sim}{\leq} 1$ ohne besondere Voraussetzungen über $\sigma(\alpha)$ nicht statthaft, die jedoch gerade die interessanteren Annahmen über $\sigma(\alpha)$ ausschliessen würden. Denn setzt man, wie es die Untersuchung der Fourierschen Reihen verlangt, $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, so muss, damit das Integral convergire, $\varrho(\alpha)$ jedenfalls $\stackrel{\sim}{\leq} \mu(\alpha)$ sein, und lehrreich sind doch gerade die Fälle, wo $\varrho(\alpha)$ unbeschränkt langsam Null wird.

Falls $\mu(\alpha) > 1$, ist die Zerlegung gestattet, so lange $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ oder $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, wo $\gamma(o) = o$, auf welche Annahme über $\sigma(\alpha)$

wir uns, wie sich zeigen wird, *beschränken dürfen*, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun.

So zerfällt ganz naturgemäss die Untersuchung des Limes (J) in die Theile

$$\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}\,,$$

die eine verschiedene Behandlung erheischen. Wir beginnen mit der Annahme

$$\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}\,.$$

A.

Untersuchung des lim J im Falle $\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$.

2. Allgemeine Behandlung des Limes J für $\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$.

Wir legen zuerst die Annahme $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ zu Grunde, denn es zeigt sich, dass die übrigen erledigt werden können, wenn diese es ist. Es ist also zu untersuchen der Limes des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \;\cos\psi(\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,,$$

wozu im Wesentlichen eine Theilung des Integrals in vier Theile erforderlich ist, nämlich erstens die Spaltung:

$$J = J' + J'' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin \alpha h}{\alpha}\,,$$

zweitens die Spaltung des Integrals $J' = \int_0^{\alpha'}$ in zwei Theile $\int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} + \int_{\frac{\varepsilon}{h}}^{\alpha'}$,

und die Zerlegung des Integrals $\int\limits_{\alpha'}^{a}$ in die Theile $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha'}^{a} d\alpha \sin\eta - \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$.

3. Nähere Angabe der ersten Zerlegung von J in J' + J''.

Was die erste Spaltung des Integrals J in die Theile

$$\int\limits_{0}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} + \int\limits_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = J' + J''$$

betrifft, so setzen wir:

$$J' = \int\limits_{0}^{\alpha' h} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

und verstehen unter α' eine Grösse, die für $h = \infty$ Null wird, jedoch so, dass $\alpha' > \alpha_1$ bleibt, unter α_1 wie im Art. 1 die Wurzel von $\psi'(\alpha_1) + h = 0$ verstanden. Setzen wir $\psi'(\alpha_1) = -\frac{\mu(\alpha_1)}{\alpha_1}$, ferner $\alpha' h = C$, so folgt aus der Vergleichung von

$$\alpha' h = C$$
$$\alpha_1 h = \mu(\alpha_1) ,$$

dass, um beim Wachsthum von h die Relation $\alpha' > \alpha_1$ bestehen zu lassen, während α' verschwindet, C nur grösser zu sein braucht als der grösste Werth von $\mu(\alpha)$ im Intervall $0 \leqq \alpha \leqq a$, so dass namentlich C unabhängig von h angenommen werden darf.

4. Der Limes des Integrals $J' = \int\limits_{0}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$ unter der Annahme

$$\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha} .$$

Wir setzen also $C = \alpha' h$ und:

$$J' = \int\limits_{0}^{C} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \int\limits_{0}^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{C} .$$

Zunächst leuchtet ein, dass das erste Integral rechts durch Verkleinerung von ε kleiner als eine beliebig kleine gegebene Grösse gemacht werden kann.

Das zweite Integral:

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

anlangend, so sei zunächst:

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) = u \quad , \quad \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) = u - v$$

wo $\varepsilon \leqq \alpha \leqq C$. Es lässt sich, falls $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ oder in $\psi'(\alpha) = -\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ $\mu(\alpha) < 1$ angenommen wird, leicht zeigen, dass v mit $\frac{1}{h}$ verschwindet. Denn man hat:

$$\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) - \psi\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) = -v$$

oder

$$(\alpha - \varepsilon)\,\frac{\mu\left(\frac{\bar{\alpha}}{h}\right)}{\bar{\alpha}} = v\,.$$

Da nun $\mu(\alpha)$ mit α verschwindet, $\bar{\alpha}$ aber zwischen den festen von h unabhängigen Grössen ε und C liegt, so verschwindet in der That v mit h. Ausserdem wird v wachsen, während α von ε bis C zunimmt, weil $\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ dabei wächst.

Setzen wir jetzt:

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos(u - v)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$= \cos u \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos v\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \sin u \int_{\varepsilon}^{C} da \sin v\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

und nehmen h so gross an, dass cos v und sin v zwischen den Grenzen ε und C nun wachsen oder nun abnehmen, so folgt mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes, dass die Integrale

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos v \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad , \quad \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \sin v \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

sich, während h unendlich wird, den Grenzen

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad , \quad 0$$

nähern. Da nun u mit h unendlich wird, cos u also zwischen den Grenzen ± 1 unbestimmt wird, so nähert sich $\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ mit unbegrenzt wachsendem h einer Grenze, die mit

$$j \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

bezeichnet werden kann, wo j zwischen den Grenzen $+1$ und -1 völlig unbestimmt ist.

Was hiernach das Integral

$$J' = \int_{0}^{\varepsilon} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

betrifft, dessen erster Theil rechts durch Verkleinerung von ε unter jede Grenze sinkt, so muss es sich, da es ε gar nicht enthält, mit ins Unendliche wachsendem h der Grenze

$$j \int_{0}^{C} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

nähern, also wenn man sich, wie in unserm Belieben steht, C von vorneherein äusserst gross denkt, folgt:

$$\lim_{h=\infty} J' = j\frac{\pi}{2},$$

mit einem Fehler, den wir nach Belieben klein annehmen können.

5. Der Limes des Integrals J' im Falle $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$.

Den Fall $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ betrachten wir besonders und beschränken uns auf die Annahme $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$.

Alsdann ist:

$$\int_0^C d\alpha \cos l\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \cos lh \int_0^C d\alpha \cos l\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \sin lh \int_0^C d\alpha \sin l\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Die Integrale rechts sind für $C = \infty$ convergent; und geben wir ihnen resp. die Formeln $R \cos \gamma$, $R \sin \gamma$, wo

$$R = \operatorname{mod} \int_0^\infty d\alpha(\cos l\alpha + i \sin l\alpha) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \operatorname{mod} \int_0^\infty d\alpha\, \alpha^i \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

so ist

$$\int_0^C d\alpha \cos l\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = R \cos(lh - \gamma)$$

und schwankt für $h = \infty$ zwischen den Grenzen $\pm R$.

6. Der Limes des Integrals $J'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $\psi(\alpha) \lesseqgtr l\frac{1}{\alpha}$.

Wir haben jetzt noch den zweiten Theil von J:

$$J'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

im Fall $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} 1\frac{1}{\alpha}$ zu untersuchen. Hier dürfen wir unbedenklich die Zerlegung:

$$J'' = \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha} \quad , \quad \begin{pmatrix} \eta = \psi(\alpha) + \alpha h \\ \chi = \psi(\alpha) + \alpha h \end{pmatrix}$$

anwenden, da die Integrale die untere Grenze Null nicht mehr haben, also jedenfalls convergent sind (Art. 1).

Führt man in den vorstehenden Integralen statt des veränderlichen α die Variabeln η und χ ein, so nehmen die Grössen:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha\eta} = \frac{1}{\alpha h - \mu(\alpha)} \quad , \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{1}{\alpha h + \mu(\alpha)}$$

beide von α_1 (der Wurzel von $\psi'(\alpha_1) + h = o$) an ab, also gewiss von $\alpha' > \alpha_1$ an. Nur im Falle $\psi(\alpha) \sim 1\frac{1}{\alpha}$, d. i. $\mu(\alpha) \sim 1$, könnte hier in Bezug auf $\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\chi}$ ein Zweifel entstehen, wenn nämlich $\mu(\alpha)$ selbst bei wachsendem α abnähme. Dann würde aber $\frac{1}{\alpha h + \mu(\alpha)}$ doch wieder abnehmen, sobald man $h > \mu(\alpha')$ voraussetzte.

Wir wollen nun nacheinander den Limes der Integrale:

$$J_1'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha} \quad , \quad J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$$

untersuchen.

7. Der Limes des Integrals $J_1'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha}$ für $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$ und $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} 1\frac{1}{\alpha}$.

Wir setzen:

$$J_1'' = \int_{\eta(\alpha')}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta}\frac{\sin\eta}{\alpha}.$$

Es sei $\eta(\alpha')$, das mit der Null sich näherndem α' unendlich wird, einen Augenblick ein Vielfaches von π. Alsdann zerfällt das Integral J_1'' in eine Schaar abnehmender alternirender Theile, und es wird erwiesen sein, dass das ganze Integral J_1'' mit $\frac{1}{h}$ verschwindet, wenn sich Gleiches von dem Bestandtheil:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha')+\pi} d\eta \, \frac{d\alpha}{d\eta} \, \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

zeigen lässt, oder a fortiori, wenn das Integral:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha')+\omega} d\eta \, \frac{d\alpha}{d\eta} \, \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

verschwindet, unter ω irgend eine endliche Grösse verstanden, wobei $\eta(\alpha')$ nicht mehr ein Vielfaches von π zu sein braucht.

Wir setzen also:

$$\psi(\alpha') + h\alpha' = \eta(\alpha')$$
$$\psi(\alpha'') + h\alpha'' = \eta(\alpha'') = \eta(\alpha') + \omega .$$

Statt α'' geschrieben $\alpha' + \delta$ folgt auch Subtraction:

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') + h\delta = \omega ,$$

oder wegen $\alpha' h = C$:

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') + \frac{\delta C}{\alpha'} = \omega .$$

Aus dieser Gleichung folgt für $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ die für $\alpha' < 1$ infinitäre Lösung (s. Hülfs. VII):

$$\delta = \frac{u\omega\alpha'}{C} , \quad u \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1 ,$$

und für $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ eine Lösung derselben Form, in der nur statt $\frac{\omega}{C}$ eine andere endliche Grösse steht.

Somit ist im Falle $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha'')} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin\eta}{\alpha} = \int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha} = \sin\bar{\eta} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{d\alpha}{\alpha} = \sin\bar{\eta}\,\log\frac{\alpha''}{\alpha'} = \sin\bar{\eta}\,\log\left(1+\frac{u\omega}{C}\right)$$

wo $\sin\bar{\eta}$ einen mittleren Werth vorstellt.

Man sieht also, dass vorstehendes Integral mit ins Unbegrenzte wachsendem C unter jede Grenze sinkt, wohin ihm der ganze Theil

$$\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha}$$

von J_1'' nachfolgt. Dabei muss h immer gerade so gross gedacht werden, dass in $\alpha' h = C$ die Grösse α' der Bedingung $\alpha_1 \leqq \alpha' \leqq a$ genügt. Gleiches gilt für den Fall $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$.

8. Der Limes des Integrals $J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$, $\chi(\alpha) = \psi(\alpha) - \iota h$.

Ganz ähnlich ist das Integral:

$$J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$$

zu behandeln. Wir trennen von J_2'' wieder den Theil:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha} = \int_{\chi(\alpha')}^{\chi(\alpha')-\omega} d\chi \frac{d\alpha}{d\chi} \frac{\sin\chi}{\alpha},$$

und erhalten aus

$$\psi(\alpha') - h\alpha' = \chi(\alpha')$$
$$\psi(\alpha'') - h\alpha'' = \chi(\alpha'') = \chi(\alpha') - \omega,$$

$\alpha'' = \alpha' + \delta$ gesetzt, diese Gleichung

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') - \delta h = -\omega$$

oder

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') - \frac{\delta C}{\alpha'} = -\omega$$

aus der wieder

$$\delta = \frac{\alpha' u \omega}{C} \quad , \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 \; ,$$

(s. Hülfs. VII) folgt.

9. Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

Damit ist dann im Ganzen nachgewiesen, dass das Integral

$$J'' = \tfrac{1}{2}J_1'' - \tfrac{1}{2}J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

mit wachsendem C unter jede Grenze sinkt, wenn $\alpha' = \frac{C}{h}$ gesetzt wird, und, während C über alle Grenzen wächst, h stets so angenommen wird, dass $\alpha_1 \leqq \alpha' \leqq a$. Dies zu dem Ergebnisse des Art. 4 gefügt, dass das Integral

$$J' = \int_{0}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

wenn C äusserst gross ist, bei unbegrenzter Zunahme von h zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ hin und her schwankt, folgt endlich, dass im Falle $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_{0}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} \, ,$$

worin C nicht mehr vorkommt, durch

$$j\frac{\pi}{2}$$

ausgedrückt werden kann, wo j zwischen den Grenzen ± 1 völlig unbestimmt ist.

Im Falle $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ haben die Grenzen, zwischen denen J schwankt, einen etwas anderen Ausdruck (Art. 5).

10. Bestimmung des $\lim \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin\alpha h$ **für den Fall** $\psi(\alpha) \gtreqless l\frac{1}{\alpha}$ **wenn die Voraussetzung** $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ **fallen gelassen wird, Annahme:** $\alpha\sigma(\alpha) \lesseqgtr 1$.

Nachdem wir den $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin\alpha h}{\alpha}$ gleich $j\frac{\pi}{2}$ gefunden haben, ist es, soweit dies noch Interesse hat, leicht, den Limes des allgemeineren Integrals:

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin\alpha h$$

angegeben, falls $\sigma(\alpha)$ im Integrationsintervall frei von Maximis oder Minimis ist. Nehmen wir zunächst $\alpha\sigma(\alpha) = \varrho(\alpha) < 1$ an, und setzen das vorstehende Integral gleich:

$$\int_0^C d\alpha\,\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \int_{\alpha'}^a d\alpha\,\varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha) \frac{\sin\alpha h}{\alpha},$$

wo also wieder $\alpha' h = C$. Der erste Theil giebt nach dem zweiten Mittelwerthsatz:

$$\varrho\left(\frac{C}{h}\right) \int_{\bar{\alpha}}^C d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad o \leq \bar{\alpha} \leq C$$

und verschwindet, wie gross C auch sein mag, für $h = \infty$. Der zweite

Theil giebt (auch nach dem zweiten Mittelwerthsatz) durch Einführung der Integrationsvariabeln η und χ ganz wie in den Art. 7 und 8 zwei Theile, die nach den dortigen Ausführungen mit wachsendem C unter jede Grenze sinken, so dass man findet:

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin\alpha h = 0$$

im Falle $\alpha\sigma(\alpha) < 1$.

Ist $\varrho(\alpha) \backsim 1$, so setzen wir $\varrho(\alpha) = \varrho(0) + \Delta\varrho(\alpha)$, wo $\Delta\varrho(\alpha) < 1$ und erhalten:

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin\alpha h = j\frac{\pi}{2}\lim_{\alpha=0}\alpha\sigma(\alpha)$$

wo j zwischen den Grenzen ± 1 unbestimmt ist.

II. Fortsetzung. Annahme $\alpha\sigma(\alpha) > 1$.

Aeusserst mühsam ist der genaue Beweis, des nach dem Allen geradezu selbstverständlichen Schlusses, dass für $\alpha\sigma(\alpha) = \varrho(\alpha) > 1$

$$\lim\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin\alpha h$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, wie überhaupt dergleichen Divergenzbeweise am schwersten zu fallen pflegen. Ich verzichte darauf, den Beweis hier folgen zu lassen, der einen im Verhältniss zur Wichtigkeit des zu beweisenden Satzes ungebührlichen Raum einnehmen würde. Der Satz kann übrigens als besonderer Fall eines allgemeineren Theorems über die Unbestimmtheitsgrenzen aufgefasst werden, und soll als solcher gelegentlich doch bewiesen werden. Hier will ich mich begnügen, ihn durch eine unstrenge Betrachtung plausibel zu machen.

Setzen wir $\varrho(\alpha+\varepsilon)$ statt $\varrho(\alpha)$, so wird, da nach dem Obigen $\varrho(\alpha+\varepsilon)\backsim 1$

$$\lim \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha+\varepsilon)\ \cos\psi(\alpha)\ \frac{\sin h\alpha}{\alpha} = j\varrho(\varepsilon)\frac{\pi}{2}.$$

Die Unbestimmtsgrenzen dieses Ausdrucks, nämlich $\pm\ \varrho(\varepsilon)\pi$ wachsen mit ε über jede Grenze. Doch ist damit allerdings nicht bewiesen, dass sie für $\varepsilon = o$ unendlich sind, weil gezeigt werden müsste, dass man zu diesem Resultat auch kommt, wenn man erst $\varepsilon = o$ und dann $h = \infty$ setzt.

B.

Untersuchung des $\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin\alpha h$ falls $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ ist.

12. Voraussetzungen, die der Untersuchung zu Grunde gelegt werden.

Falls $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ dürfen wir also nach Art. 1 getrost setzen:

$$J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin h\alpha = \tfrac{1}{2}\int_{\eta(o)}^{\eta(a)} d\eta\frac{d\alpha}{d\eta}\,\sigma(\alpha)\sin\eta - \tfrac{1}{2}\int_{\chi(o)}^{\chi(a)} d\chi\frac{d\alpha}{d\eta}\,\sigma(\alpha)\sin\chi$$

$$= \tfrac{1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2$$

wo $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$, $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$ und:

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{1}{\psi'(\alpha)+h}\ ,\quad \frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{1}{\psi'(\alpha)-h}\ ,$$

und diese Zerlegung ist nach dem cit. Art. immer gestattet, wenn,

$\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)$ gesetzt, $\gamma(\alpha) < 1$ ist.[6]) Dies ist also die eine Voraussetzung. Ausserdem setzen wir noch $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha) > 1$ voraus, da sonst der lim J mit Hülfe des ersten Hauptsatzes sich sofort als Null ergeben würde.

13. Ueber den Limes des Integrals $J_2 = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi$, **wo** $\chi = \psi(\alpha) - h\alpha$.

Beginnen wir mit dem Integral:

$$J_2 = \int_{\chi(o)}^{\chi(a)} d\chi \frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h} \sin\chi ,$$

in welchem bei von o bis a zunehmendem α die Function $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$ von $\chi(o) = \infty$ bis $\chi(a)$ abnimmt, so hat $\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h}$ unterwegs ein Maximum und zwar für $\alpha = \alpha^*$, wo α^* durch

$$\left\{\gamma'(\alpha^*)\psi'(\alpha^*) + \gamma(\alpha^*)\psi''(\alpha^*)\right\}\left(h - \psi'(\alpha^*)\right) + \gamma(\alpha^*)\,\psi'(\alpha^*)\,\psi''(\alpha^*) = o$$

gegeben ist, woraus man findet:

$$h = \psi'(\alpha^*) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma(\alpha^*)\,\psi''(\alpha^*)}{\gamma'(\alpha^*)\,\psi'(\alpha^*)}} .$$

Die Grösse im Nenner hat eine für unsere Untersuchung sehr nützliche infinitäre Eigenschaft.

Wir hatten vorausgesetzt:

$$\sigma = \gamma\psi' > 1$$

oder

$$\psi' > \frac{1}{\gamma} ,$$

woraus folgt:

$$l\psi' > l\frac{1}{\gamma}$$

---

6) Die obige Zerlegung von J in ein Integral nach η und eines nach χ ist nicht correct, sondern nur der Kürze halber so geschrieben, da das Integral nach η aus zwei Theilen besteht, s. Art. 14.

und durch Differentiation:

$$\frac{\psi''}{\psi'} > \frac{\gamma'}{\gamma}$$

oder wenn mit $\frac{\gamma}{\gamma'}$ an beiden Seiten multiplicirt wird, so folgt die gemeinte nützliche Eigenschaft:

$$\frac{\gamma}{\gamma'}\frac{\psi''}{\psi'} > 1\ ,$$

von der übrigens auch schon (Hülfss. VI) Gebrauch gemacht ist.

Setzt man daher:

$$h = \psi'(\alpha^*) \cdot v\ ,$$

so ist $v < 1$.

Um jetzt das Integral J_2 abschätzen zu können, setzen wir weiter:

$$\chi(\alpha^*) = \psi(\alpha^*) - \alpha^* h = M\pi$$
$$\chi(\alpha^* + \delta) = \psi(\alpha^* + \delta) - (\alpha^* + \delta) h = (M - N)\pi\ ,$$

mithin:

$$\psi(\alpha^* + \delta) - \psi(\alpha^*) - \delta h = - N\pi$$

oder:

$$\psi(\alpha^* + \delta) - \psi(\alpha^*) - \delta\psi'(\alpha^*) \cdot v = - N\pi\ .$$

Die infinitäre Lösung der vorstehenden Gleichung ist (Hülfss. VIII):

$$\delta = - \frac{N\pi u}{\psi'(\alpha^*)}\ ,\quad u \mathop{=}\limits_{\infty} 1\ ,$$

in der δ mit N sein Zeichen wechselt.

Jetzt betrachten wir einen α^* einschliessenden Theil von J_2, also:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha\, \gamma(\alpha)\, \psi'(\alpha)\ \sin\,(\psi(\alpha) - h\alpha)\quad ,\quad \alpha' < \alpha^* < \alpha''\ .$$

Die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ genüge der Gleichheit:

$$\alpha'' - \alpha' \sim \frac{1}{\psi'(\alpha^*)}\ ,$$

wozu es ausreicht, wenn α' und α'' die Form $\alpha^* \pm \delta$ gegeben wird, die Grösse N in obigen Gleichungen endlich anzunehmen. Mit Hülfe des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes kann vorstehender Integralausschnitt in die Form:

$$\left(\alpha'' - \alpha'\right) \gamma(\bar{\alpha}) \psi'(\bar{\alpha}) \sin\left(\psi(\bar{\alpha}) - h\bar{\alpha}\right) \quad , \quad \alpha' \leqq \bar{\alpha} \leqq \alpha'',$$

gebracht werden. Wegen $\bar{\alpha} = \alpha^* + \frac{r}{\psi'(\alpha^*)}$, wo $r \gtrless 1$, ist dieser Ausdruck:

$$\sim \gamma(\bar{\alpha}) \left\{ \frac{\psi'\left(\alpha^* + \frac{r}{\psi'(\alpha^*)}\right)}{\psi'(\alpha^*)} \cdot \sin\left(\psi(\bar{\alpha}) - h\bar{\alpha}\right) \right\}$$

Nach Hülfss. IV bleibt die Klammer bei Abnahme von α^* endlich, und da $\gamma(\bar{\alpha}) < 1$, α' und α'' und folglich $\bar{\alpha}$ aber mit α^* Nullwerdend gedacht sind,[7]) so verschwindet die ganze Grösse.

Das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi = \int_0^{\alpha^*} + \int_{\alpha^*}^a$$

zerfällt in zwei Theile, die aus abnehmenden alternirenden Einzelintegralen bestehen. Weil aber, wie eben gezeigt, das Integral $\int_{\alpha'}^{\alpha''}$ und somit auch jedes der Integrale

$$\int_{\alpha'}^{\alpha^*} , \int_{\alpha^*}^{\alpha''}$$

verschwindet, so verschwinden auch die Integrale

$$\int_0^{\alpha^*} , \int_{\alpha^*}^{a} .$$

14. Ueber den Limes des Integrals $J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$, wo $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$.

Was endlich das Integral anlangt:

$$J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta = \int_{\eta(0)}^{\eta(\alpha_1)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta + \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta ,$$

7) Wegen der Endlichkeit von N und der infinitären Lösung $\delta = -\frac{N\pi u}{\psi'(\alpha^*)}$.

wo $$\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)+h} \quad , \quad \eta(o) = \infty$$

ist, so wird die Function $\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha)$ unendlich für $\alpha = \alpha_1$, weil $\psi'(\alpha_1) + h = o$, und nimmt von $\alpha = \alpha_1$ an sowohl in der Richtung nach $\alpha = o$ als nach $\alpha = a$ hin ab. Im Intervall $o \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ ist dies wegen $\gamma(\alpha) < 1$ beim Anblick von

$$\gamma(\alpha) \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{\psi'(\alpha)}}$$

einleuchtend, weil $\frac{h}{\psi'(\alpha)}$ von o bis -1 abnimmt, während α von o bis α_1 geht. Im Intervall $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq a$ setzt man

$$\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{\psi'(\alpha) + h} \, .$$

Es ist $\sigma(\alpha) > 1$, und $\psi'(\alpha) + h$ wächst von Null bis $\psi'(a) + h$ während α von α_1 bis a geht.

In beiden Integralen:

$$\int\limits_{\infty}^{\eta(\alpha_1)} d\alpha \frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) \sin\eta \quad , \quad \int\limits_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\alpha \frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) \sin\eta$$

folgen sich von $\eta(\alpha_1)$ nach $\eta(o) = \infty$ resp. $\eta(a)$ hin die Maxima und Minima der darunterstehenden Function in gleicher Reihenfolge und mit derselben Phase beginnend. Wegen der Abnahme von $\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha)$ nach $\alpha = o$ und $\alpha = a$ hin (oder nach $\eta = \infty$ und $\eta = \eta(\alpha)$ hin) zerfallen die vorstehenden Integrale jedes in eine Schaar abnehmender alternirender Theilintegrale.

Dieses vorausgeschickt, verfahren wir ähnlich wie in früheren Fällen. Um ein Stück:

$$\int\limits_{\eta(\alpha_1 - \delta)}^{\eta(\alpha_1)} = \int\limits_{\alpha_1 - \delta}^{\alpha_1} \quad \text{oder} \quad \int\limits_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(\alpha_1 + \delta)} = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \delta}$$

abschätzen zu können, setzen wir wieder

$$\eta(\alpha_1) = \psi(\alpha_1) + h\alpha_1 = M\pi \ ,$$
$$\eta(\alpha_1 + \delta) = \psi(\alpha_1 + \delta) + h(\alpha_1 + \delta) = (M + N)\pi \ ,$$
$$h = -\psi'(\alpha_1) \ .$$

Mithin:

$$\psi(\alpha_1 + \delta) - \psi(\alpha_1) - \delta\psi'(\alpha_1) = N\pi \ .$$

Für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ folgt hieraus (Hülfss. IX)

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \cdot u \quad , \quad u \overline{\overline{\infty}} 1$$

wo das u ein anderes je nach dem Vorzeichen der Wurzel ist, was wir durch die Lösungsformen:

$$-\delta' = -u_1\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \quad , \quad +\delta'' = +u_2\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}$$

andeuten wollen, indem wir δ' und δ'' als positive Grössen einführen.

Setzt man in der von α_1 bis $\alpha_1 + \delta$ genommenen Portion von J_1, der man diese Form geben kann:

$$\delta\gamma(\bar{\alpha})\psi'(\bar{\alpha}) \sin\left(\psi(\bar{\alpha}) + h\bar{\alpha}\right) \quad , \quad \alpha_1 \leq \bar{\alpha} \leq \alpha_1 + \delta \ ,$$

ein: $\delta \backsim \frac{1}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$, so wird sie Null oder kann unbestimmt zwischen endlichen oder kann unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen werden, je nach dem:

$$\frac{\gamma(\bar{\alpha})\psi'(\bar{\alpha})}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}} \mathrel{\substack{< \\ \backsim \\ >}} 1 \ ,$$

wie ich gleich nachweisen werde. Dann setzen wir: $\bar{\alpha} = \alpha_1 + \delta_1$, so ist $\delta_1 = \frac{r}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$, $r \mathrel{\substack{\backsim \\ <}} 1$. Der vorstehende Ausdruck kann geschrieben werden:

$$\frac{\gamma(\bar{\alpha})\,\psi'(\bar{\alpha})}{\psi''(\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\psi''(\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}} \ .$$

Da nun $\psi''(\alpha) = \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha^2}$, $\lambda > 1$ (wie sich durch zweimalige Differen-

tiation von $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ ergiebt), so kann der zweite Factor geschrieben werden:

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}\left(\alpha_1 + \frac{r\alpha_1}{\lambda(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{r\alpha_1}{\lambda^{\frac{1}{2}}(\alpha_1)}}$$

und wird nach dem schon benützten Satz (Hülfss. III) Eins für $\alpha_1 = 0$. Das Integral J_1 wird also jedenfalls Null, wenn:

$$\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} < 1 \text{ oder } \sigma(\alpha) < \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

Viel umständlicher ist der Nachweis, dass das Integral

$$J_1 = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\eta$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt wird, wenn

$$\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} > 1 \text{ oder } \sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wie ich ja schon oben (Art. 11) bemerkt habe, dass dergleichen Divergenzbeweise am meisten Mühe zu machen pflegen. Dieses Mal aber will ich den Beweis, trotz seiner nicht zu vermeidenden Länge, wirklich durchführen. Aus mehreren Gründen. Einmal um doch ein Beispiel eines solchen Beweises gegeben zu haben. Dann aber, von anderen abgesehen, besonders aus dem Grunde, weil das Unendlichwerden des Integrals J_1 auch von Riemann (Ueber die Darstellb. e. F. d. e. trigon. R. Art. 13) behauptet wird, während seine Begründung mehr ein Nachweis der Möglichkeit des Unendlichwerdens sein zu sollen scheint, als ein Nachweis des Unendlichwerdens selbst. Und ein genauer Beweis einer Behauptung, der Riemann einige Seiten gewidmet hat, kann nicht überflüssig erscheinen.

15. Nachweis der Divergenz des $\lim \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta$, $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$

im Falle: $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, $\sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Um diesen Beweis wirklich zu erbringen, benutzen wir wieder den Umstand, dass die Integrale

$$\int_0^{\alpha_1} d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta \quad , \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha} d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta \ ,$$

wenn man $\eta(\alpha_1)$ als ganzes Vielfache von π sich denkt, jedes in eine Schaar abnehmender alternirender Theilintegrale zerfallen, und dass beide Schaaren gleichzeitig mit einem positiven oder mit einem negativen grössten Theilintegral beginnen. Es sei also

$$\eta(\alpha_1) = m\pi \ , \ \eta(\alpha_1 - \delta') = (m+1)\pi \ , \ \eta(\alpha_1 - \delta' - \delta_1') = (m+2)\pi$$
$$\eta(\alpha_1 + \delta) = (m+1)\pi \ , \ \eta(\alpha_1 + \delta + \delta_1) = (m+2)\pi$$

so wird der Werth des Integrals:

$$J_1 = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta$$

enthalten sein zwischen den Integralen:

$$\int_{\alpha_1 - \delta'}^{\alpha_1 + \delta} d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta \quad , \quad \int_{\alpha_1 - \delta' - \delta_1'}^{\alpha_1 + \delta + \delta_1} d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta$$

und wird einen unendlichen Limes haben, wenn Gleiches von einem der Integrale:

$$\int_{\alpha_1 - \delta' - \delta_1'}^{\alpha_1} d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta \quad , \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \delta + \delta_1} d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin\eta$$

nachgewiesen werden kann. Wir wollen dies vom zweiten Integral nachweisen, welches wir zunächst so zertheilen:

$$II = \int_0^{\delta} d\varepsilon\, \sigma(\alpha_1 + \varepsilon) \sin\eta(\alpha_1 + \varepsilon) \quad + \quad \int_0^{\delta_1} d\varepsilon_1\, \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) \sin\eta(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1),$$

um es sodann wieder in Eines zu vereinigen, welches die Grenzen des ersten hat. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$\begin{aligned}\eta(\alpha_1 + \varepsilon) &= (m + \nu)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta) &= (m + 1)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) &= (m + 1 + \nu)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta + \delta_1) &= (m + 2)\pi\,.\end{aligned}$$

Mit Hülfe der Formeln (Hülfss. IX) findet man hieraus:

$$\varepsilon = u_\nu \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\psi''(\alpha_1)}}\,, \quad \delta + \varepsilon_1 = u_{\nu+1}\sqrt{\frac{2\pi(\nu+1)}{\psi''(\alpha_1)}}$$

$$\delta = u_1\sqrt{\frac{2\pi}{\psi''(\alpha_1)}}\,, \quad \delta + \delta_1 = u_2\sqrt{\frac{4\pi}{\psi''(\alpha_1)}}\,,$$

wenn die infinitäre Lösung von $\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = \varrho\pi$ mit $u_\varrho\sqrt{\frac{2\pi\varrho}{\psi''(\alpha)}}$ bezeichnet wird. Verändert man in diesen Gleichungen ε, ε_1 und ν, lässt aber δ, δ_1, α_1 constant und sieht ν als Function von ε an, so findet man:

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} + d\varepsilon\frac{d\nu}{d\varepsilon}\sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}}\left\{\nu u_{\nu+1}\frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu+1)u_\nu\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}\right\}.$$

Dieser Werth von $d\varepsilon_1$ ist in das zweite Integral II einzuführen, worauf es die Grenzen o , δ erhält, und sich mit dem ersten vereinigt. Alsdann zerlegen wir II von Neuem und zwar in folgende drei Theile:

$\mathrm{II} = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 + \mathrm{II}_3$ wo:

$$\mathrm{II}_1 = \int_0^\delta d\varepsilon\left\{\sigma(\alpha_1 + \varepsilon) - \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1)\right\}\sin\eta(\alpha_1 + \varepsilon)$$

$$\mathrm{II}_2 = \int_0^\delta d\varepsilon\left\{1 - \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}}\right\}\sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1)\ \sin\eta(\alpha_1 + \varepsilon)$$

$$\mathrm{II}_3 = -\int_0^\delta d\varepsilon\frac{d\nu}{d\varepsilon}\sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}}\left\{\nu u_{\nu+1}\frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu+1)u_\nu\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}\right\}\sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1).$$

$$\sin\ \eta(\alpha_1 + \varepsilon)\,.$$

Diese drei Integrale sind auf ihre relativen Grenzwerthe für $\alpha_1 = o$ zu untersuchen. Für diese Untersuchung brauchen wir den Satz, dass:

$$\frac{\sigma(\alpha_1 + \varDelta)}{\sigma(\alpha_1)}$$

für $\alpha_1 = o$ stets den Limes 1 hat, falls:

$$\eta(\alpha_1 + \varDelta) = \eta(\alpha_1) + N\pi$$

ist, wo N eine endliche Zahl vorstellt. Da nämlich alsdann

$$\varDelta = u_N \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}$$

ist, so läuft der Satz darauf hinaus, dass im Falle $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha), \psi'(\alpha) > \frac{1}{\alpha}, r \backsim 1$:

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{r}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} \overline{\overline{\infty}}\ 1$$

ist. Dies haben wir aber (Hülfss. VI) schon gezeigt.

Sonach können wir zunächst setzen:

$$II_1 = \delta\sigma(\alpha_1) \left\{ \frac{\sigma(\alpha_1 + \bar{\varepsilon})}{\sigma(\alpha_1)} - \frac{\sigma(\alpha_1 + \delta + \bar{\varepsilon}_1)}{\sigma(\alpha_1)} \right\} \sin \eta(\alpha_1 + \bar{\varepsilon}) \ , \ o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \delta \ .$$

Der Factor $\{\}$ hat den Limes Null.

Untersuchen wir zweitens:

$$II_3 = -\int_o^\delta d\varepsilon \frac{d\nu}{d\varepsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{(\nu + 1)\psi''(\alpha_1)}} \left\{ \nu u_{\nu+1} \frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu + 1) u_\nu \frac{du_{\nu+1}}{d\nu} \right\} \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1)$$
$$\sin \eta(\alpha_1 + \varepsilon) \ .$$

Erstens der Factor $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$. Aus der Differentiation von $\psi(\alpha + \varepsilon) - \psi(\alpha) - \varepsilon\psi'(\alpha) = \nu\pi$ folgt:

$$\psi'(\alpha + \varepsilon) - \psi'(\alpha) = \pi \frac{d\nu}{d\varepsilon}$$

und
$$\pi \frac{d\nu}{d\varepsilon} = \varepsilon\psi''(\alpha) \cdot \frac{\psi''(\alpha + \bar{\varepsilon})}{\psi''(\alpha)} \ , \ o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \varepsilon \ .$$

Wegen $\varepsilon = u_\nu \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\psi''(\alpha)}}$ ist (nach Hülfss. V) $\frac{\psi''(\alpha + \bar{\varepsilon})}{\psi''(\alpha)} \overline{\overline{\infty}}\ 1$, und

somit
$$\frac{d\nu}{d\varepsilon} \backsim \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Ferner die Differentialquotienten $\frac{du_\nu}{d\nu}$, $\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}$. Aus $\psi(\alpha+\varrho)-\psi(\alpha)-\varrho\psi'(\alpha)=N\pi$ ziehen wir wieder:

$$\varrho^2\psi''(\alpha) = 2\pi N u_N^2 \;,\; \frac{d\varrho}{dN} = \frac{\pi}{\varrho\psi''(\alpha+\varrho_1)} \;,\; o \leqq \varrho_1 \leqq \varrho \;.$$

Differenziren wir die erste Relation, indem wir α constant lassen, so folgt wegen der zweiten:

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi''(\alpha+\varrho_1)} = N\frac{du^2}{dN} + u^2$$

woraus $\frac{du}{dN} \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} o$ folgt. Somit kann man im Ganzen II_3 auf die Form bringen:

$$II_3 = \delta\sigma(\alpha_1)\cdot w\cdot\frac{\sigma(\alpha_1+\delta+\bar{\varepsilon})}{\sigma(\alpha_1)}\sin\eta(\alpha_1+\bar{\varepsilon}) \;,\; o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \delta \;,$$

wo w für $\alpha_1 = o$ verschwindet.

Bleibt noch II_2 zu untersuchen. Wir schreiben:

$$II_2 = \delta\sigma(\alpha_1)\left\{1-\frac{u_{\nu_1+1}}{u_{\nu_1}}\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1+1}}\right\}\frac{\sigma(\alpha_1+\delta+\bar{\varepsilon}_1)}{\sigma(\alpha_1)}\sin\eta(\alpha_1+\bar{\varepsilon}) \;,$$

wo $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}_1$, ν_1 mittlere Werthe vorstellen. Hier verschwindet der Factor von $\delta\sigma(\alpha_1)$ nicht. Denn man hat $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1$ und $\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1+1}}$ ist enthalten zwischen Null und $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Man könnte noch einwenden, dass $\bar{\varepsilon}$, welches der Bedingung $o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \delta$ genügt, im äussersten Falle Null oder gleich δ sein könnte. Allein da der Sinus zwischen den Grenzen der Integration sein Zeichen nicht wechselt, so würde es dann ja schon ausreichen, von dem Integral:

$$\int_{\frac{1}{4}\delta}^{\frac{3}{4}\delta}$$

zu zeigen, dass es die Form $\delta\cdot\sigma(\alpha)\cdot v_2$ annimmt, wo $v_2 \infty 1$, und der übrig bleibende Theil

$$\int_{0}^{\frac{1}{4}\delta} + \int_{\frac{3}{4}\delta}^{\delta}$$

hätte dasselbe Zeichen.

Es lassen sich also die drei Integrale II_1, II_2, II_3 resp. auf die Formen $\delta\sigma(\alpha_1) \cdot v_1$, $\delta\sigma(\alpha_1) \cdot v_2$, $\delta\sigma(\alpha_1) v_3$ bringen, wo v_1 und v_3 für $\alpha = o$ verschwinden, v_2 aber nicht. Da aber $\delta\sigma(\alpha_1) \backsim \frac{\sigma(\alpha_1)}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$ nach der Voraussetzung > 1 ist, so ist auch $II_1 + II_2 + II_3 > 1$. Q. E. D.

16. Schlussbemerkung über den Limes von $J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha$ falls $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ ist.

Unsere unter B gewonnenen Ergebnisse sind kurzgefasst diese.

Nimmt man in

$$J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha$$

an $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, so ist der lim J Null für

$$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$$

und zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt für

$$\sigma(\alpha) > \sqrt{\psi''(\alpha)}\,.$$

Es frägt sich, ob die allgemeine Bedingung $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, unter welcher unsere Untersuchung angestellt wurde, alle Fälle $\sigma(\alpha)$ und $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ umfasst, in denen der lim J convergent ist. Gewiss. Denn man hat $\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, $\mu(\alpha) > 1$ und die Bedingung der Convergenz $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ wird:

$$\sigma(\alpha) < \frac{\sqrt{\alpha\mu'(\alpha) - \mu(\alpha)}}{\alpha}$$

während die allgemeine Bedingung

$$\sigma(\alpha) < \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$$

lautet. Es ist also nur zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{\alpha\mu'(\alpha) - \mu(\alpha)}}{\alpha} < \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} \quad ,$$

wozu es wieder ausreicht, die Ungleichheit

$$\alpha\mu'(\alpha) < \mu(\alpha)^2$$

nachzuweisen. Sie giebt integrirt:

$$\frac{1}{\mu(\alpha)} < l\frac{1}{\alpha}$$

oder

$$\mu(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$$

was, da ja $\mu(\alpha) > 1$, a fortiori richtig ist.

Es bliebe noch übrig, die Annahme $\sigma(\alpha) \gtrsim \psi'(\alpha)$ zu untersuchen, die natürlich erst recht auf Divergenz des lim J führt. Ein genauer Beweis lässt sich hier aber ebenso schwer führen wie Art. 11 in dem analogen Fall $\varrho(\alpha) > 1$.

17. Zusammenfassung der Resultate der bisherigen Untersuchung.

Nachdem wir somit den lim J nach allen Richtungen hin sorgfältig untersucht haben, stellen wir die gewonnenen Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Da wir zur Prüfung des ersten Hauptsatzes (s. Art. 19) setzen müssen:

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h \quad , \quad f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \quad ,$$

zur Prüfung des zweiten Hauptsatzes aber:

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \quad , \ f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \ , \ \varrho(\alpha) = \alpha\sigma(\alpha) \ ,$$

so wollen wir behufs rascherer Uebersicht beide Functionen, $\sigma(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$, in unsere Tabelle aufnehmen.

$\psi(\alpha)$	I. Hauptsatz $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$	II. Hauptsatz $\varrho(\alpha) = \alpha\sigma(\alpha)$	$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha$ $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$
$\psi(\alpha) < 1\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) < 1$	Null
	$\sigma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) \sim 1$	Unbestimmt zwischen denselben Grenzen wie $\lim_{x=0}\varrho(x)\cos\psi(x)$
	$\sigma(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) > 1$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen wie $\lim_{x=0}\varrho(x) \cos\psi(x)$.
$\psi(\alpha) \sim 1\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) < 1$	Null
	$\sigma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) \sim 1$	Unbestimmt zwischen Grenzen, die vom mod $\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^i \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ abhängen.
	$\sigma(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) > 1$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen.
$\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$	Null.
	$\sigma(\alpha) > \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\varrho(\alpha) > \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen.

Ueber die Grenzwerthe ähnlicher Integrale, namentlich des Integrals

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h(\alpha + c)\ .$$

Wir haben den Limes von $\int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \sin h\alpha$ unter der Annahme $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha)$ untersucht. Der Leser wird sich leicht davon über-

zeugen, dass die Methoden und die Resultate die nämlichen wären, hätten wir $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ angenommen. Nur dass wir hier und da statt Vielfacher von π ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ hätten einführen müssen.

Etwas anderes wäre es gewesen, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \cos h\alpha$$

vorgelegen hätte. Zwar der zweite Theil der Untersuchung des Limes $J = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$, den wir mit B überschrieben haben und der $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ voraussetzt, ist hier mutatis mutandis vollgültig, und so gelten für das Integral $\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos h\alpha$ im Falle $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ die oben für das Integral $\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$ gefundene Resultate auch. Falls jedoch $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$, sind etwas andere Betrachtungen, wie unter A anzustellen, und werden abweichende Resultate erhalten.

Als Ausgangspunkt dient, dass das Integral $\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos h\alpha$ convergirt, sobald $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ ist (Art. 1). Jedenfalls ist also $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$ zu setzen, wo $\varrho(\alpha) < 1$. Das zu untersuchende Integral

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

theilt man wieder in eines von o bis α' und eines von α' bis a. Von dem Letzteren ist ganz wie unter A zu zeigen, dass es verschwindet. Das erstere anlangend, setzen wir $\alpha' h = C$ und

$$\int_0^{\alpha'} \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha) \cos \alpha h = \int_0^C \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos \alpha = \int_0^\varepsilon + \int_0^C$$

Der Theil von o bis ε, vor den man durch den zweiten Mittelwerthsatz den $\cos \alpha$ zu nehmen hat, giebt offenbar einen verschwindenden $\text{Limes}_{h=\infty}$. Der andere Theil ist zu behandeln, wie der analoge unter A, nur dass noch statt $\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ zu schreiben ist $\varrho(\alpha) \cdot \frac{\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right)}{\varrho(\alpha)}$, wovon der zweite Factor vor das Integral zu nehmen ist. Sodann sieht man leicht, dass auch dieser andere Theil für $h = \infty$ verschwindet.

Hier erhält man also das Resultat, dass für $\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$ der Limes von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \cos \alpha h$$

immer verschwindet, falls dies Integral convergent ist, womit auch dieser Limes vollständig erledigt ist.

Im Ganzen ergiebt sich also: Der $\text{Limes}_{h=\infty}$ von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \cos \alpha h$$

ist convergent und Null für $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$ falls $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, und für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ falls $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$. Ausserhalb dieser Grenzen divergirt entweder das Integral selbst, oder der Limes.

Betrachten wir endlich den Limes des Integrals:

$$(J) = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h(\alpha + c) ,$$

wo c irgend eine Constante, so ist er durch das Vorstehende gleichfalls bestimmt. Denn nehmen wir cos hc und sin hc vor das Integralzeichen, so handelt es sich wesentlich um die Grenzwerthe der Integrale:

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin\alpha h \quad , \quad \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\cos\alpha h \quad .$$

Die Grenzwerthe des zweiten haben wir so eben gefunden, die des ersten divergiren nach Art. 17 erst für grössere Unendlich von $\sigma(\alpha)$, wie die des zweiten. Wir haben also für vorstehendes Integral die Grenzwerthe:

$\psi(\alpha)$	$\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$	lim (J)
$\psi(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{=}} 1\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) \lesseqgtr \psi'(\alpha)$	o divergent
$\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) \lesseqgtr \sqrt{\psi''(\alpha)}$	o divergent

19. Uebersicht über die Verwendung der obigen Resultate in den beiden folgenden Capiteln.

Der erste Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale, wie ich ihn Borch. Journ. Bd. 79, pag. 41 bewiesen habe, lautet: Wenn für alle durch die Bedingung $A \leq A_1 < B_1 \leq B$ gestatteten Werthe von A_1 und B_1 die Function $\varphi(\alpha, h)$ die Gleichung:

$$\lim \int_{A_1}^{B_1} d\alpha\, \varphi(\alpha, h) = o$$

erfüllt, so ist, unter f(x) eine im Intervall $A \leq x \leq B$ integrirbare Function verstanden, auch

$$\lim \int_A^B d\alpha \, f(\alpha) \; \varphi(\alpha, h) = o .$$

Wir dürfen also $\varphi(\alpha, h) = \sin \alpha h$ annehmen. Man kann diesen Satz erweitern, indem man untersucht, unter welchen Umständen die Function $f(\alpha)$ die Bedingung der Integrirbarkeit unerfüllt lassen darf, indem sie z. B. in einzelnen Puncten unendlich wird. Es würde sich also fragen: Wenn $f(\alpha)$ für einen zwischen A und B gelegenen Punct C unendlich wird, welche Bedingungen muss $f(\alpha)$ erfüllen, damit dennoch:

$$\lim \int_A^B d\alpha \, f(\alpha) \; \sin \alpha h = o$$

sei. Wir können bei dieser Untersuchung $C = A$ annehmen, und, der leichteren Vergleichung mit unseren obigen Resultaten wegen, die Aufgabe so stellen:

I. Wenn in

$$\int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \; \sin h(\alpha + c)$$

c irgend eine Constante bedeutet, und $f(\alpha)$ für $\alpha = o$ unendlich wird, so sind die Bedingungen für $f(\alpha)$ anzugeben, unter denen vorstehendes Integral für $h = \infty$ verschwindet.

Es leuchtet ein, dass der besondere Fall $c = o$ auch einer besonderen Betrachtung bedarf, weil durch das Verschwinden des Sinus für $\alpha = o$ die Convergenzverhältnisse des Integrals geändert werden. So kann man den Fall $c = o$ obigen Integrals als zur Theorie des ersten Hauptsatzes gehörig ansehen, und von diesem Gesichtspunct aus soll er zunächst auch behandelt werden. Die andere Auffassung dieses besonderen Falles ist aber die, dass hier der zweite Hauptsatz in Kraft tritt. Der zweite Hauptsatz (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 46):

$$\lim \int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \; \Phi(\alpha, h) = f(o) \; \lim \int_o^a d\alpha \; \Phi(\alpha, h)$$

setzt in erster Linie voraus, dass der Limes rechter Hand von α unabhängig, endlich und bestimmt, aber nicht Null sei, da man sonst den ersten Hauptsatz hätte. Bezüglich der Function $f(\alpha)$ sind seine Voraussetzungen nicht so allgemein, wie die des ersten Hauptsatzes, und werden weiter unten genauer erörtert werden. Die $\Phi(\alpha, h)$ betreffenden Voraussetzungen erfüllt $\Phi(\alpha, h) = \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, und führt man diese Function in den vorstehenden zweiten Hauptsatz ein, so ist allerdings klar, dass der Limes des rechts auftretenden Integrales

$$\int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zugleich auch das obige den Limes von

$$\int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \, \sin h(\alpha + c)$$

betreffende Problem des ersten Hauptsatzes löst, wenn man hierin $c = o$ voraussetzt und $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ statt $f(\alpha)$ schreibt.

Hinsichtlich des zweiten Hauptsatzes stellen wir die Frage so:

II. Unter welchen Bedingungen für die Function $f(\alpha)$ gilt die Relation:

$$\lim \int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o) \; .$$

Wir werden auf Grund der in den Art. 17 und 18 zusammengestellten Ergebnisse in den folgenden zwei Capiteln die Fragen I und II vollständig erledigen unter der Voraussetzung

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) \, \cos \psi(\alpha)$$

wo weder $\varphi(\alpha)$ noch $\psi(\alpha)$ in der Nähe von $\alpha = o$ unendlich viele Maxima haben, namentlich aber werden wir es uns angelegen sein lassen, die allgemeinen Regeln für die Gültigkeit der beiden Hauptsätze, die zum Theil von uns selbst veröffentlicht wurden, mit jenen Ergebnissen zu vergleichen.

II. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes, falls die willkürliche Function unendlich wird.

20. Die Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes.

Wir wollen zuerst die verschiedenen Regeln über den Gültigkeitsbereich des ersten Hauptsatzes auf ihre Uebereinstimmung mit den in den Tabellen Art. 17 und 18 angebenen Grenzwerthen prüfen.

Es handelt sich also um Folgendes: Angenommen die Function $f(\alpha)$ in:

$$J = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \sin\, h(\alpha + c)$$

sei im Intervall $o < \alpha \leqq a$ integrirbar, $\lim_{\alpha = o} f(\alpha)$ sei aber nicht endlich oder doch, wie für $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{1}{\alpha}$, unendlicher Werthe fähig, so existiren ein Paar Regeln um festzustellen, ob dennoch $\lim_{h = \infty} J = o$ ist, wie dies ausnahmslos stattfindet, wenn $f(\alpha)$ im Intervall $o \leqq \alpha \leqq a$ die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllt, welche aber unendliche Werthe der Function ausschliesst. [8])

I. Es besteht eine ältere (unrichtige) Angabe, nach welcher der $\text{Limes}_{h = \infty} J$ stets Null ist, falls nur das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)$$

convergirt. [9])

8) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21 und 41.
9) Crelle's Journ. Bd. 17, pag. 54.

II. Der Verfasser hat für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes bei allen darstellenden Integralen die ausreichende Regel gegeben, dass das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \ f(\alpha)$$

absolut convergiren müsse.[10])

III. In dem Falle $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, und c von Null verschieden vorausgesetzt, hat die nothwendige und ausreichende Bedingung für das Verschwinden von lim J folgende doppelte Form: Für $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$ muss $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ sein, für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ muss $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ sein.

IV. Ist dagegen $c = o$, so gilt für $\psi(\alpha) \overset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$ die Bedingung $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ und für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ dieselbe wie oben: $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ ·

21. Allgemeine Regeln über die Convergenz eines Integrals der Form

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) .$$

Um nun die beiden apriorischen Regeln I und II mit den a posteriori gefundenen Gesetzen III und IV vergleichen zu können, wollen wir für $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ (wo σ und ψ für $\alpha = o$ ohne Maxima unendlich werden) feststellen, unter welchen Annahmen über σ und ψ das Integral

$$\int_0^a d\alpha \ \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

überhaupt convergirt, und wann es absolut convergirt. Wegen:

---

10) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 43.

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) = -\int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi\, \sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} \cos \psi ,$$

ist das Integral convergent oder divergent, jenachdem $\sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\psi} < 1$ oder $\gtrapprox 1$, d. i. jenachdem

$$\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha) \text{ , oder } \sigma(\alpha) \gtrapprox \psi'(\alpha) .$$

Ferner ist das Integral $\int^{\infty} d\psi\, \sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\psi} \operatorname{mod} \cos \psi$ convergent oder divergent, jenachdem das Integral

$$-\int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi\, \sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)$$

convergent oder divergent ist. Setzen wir $\sigma(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, wo $\varphi(\alpha)$ ohne Maxima Null wird, so ist das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

convergent für Functionen $\varphi(\alpha)$, deren Null unter einer gewissen Grenze bleibt. Man kann diese Grenze nicht durch eine Function darstellen. Wenn man indessen die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz auch nicht wirklich darstellen kann, so hindert dies nicht, in den Calcul eine ideale Function $\tau(\alpha)$ einzuführen, von solcher Beschaffenheit, dass das

$$\int_0^a d\alpha \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

convergirt, dass aber jedes Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

divergirt, in welchem $\varphi(\alpha) > \tau(\alpha)$ gedacht wird.

Bekanntlich ist von den Integralen:

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\frac{1}{\alpha}}, \quad \int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}},$$

$ll\frac{1}{\alpha} = l_2\frac{1}{\alpha}$, etc. gesetzt, und μ beliebig klein gedacht, das erste unendlich, das zweite endlich. Dies erlaubt die Function $\tau(\alpha)$ in nach unseren heutigen Begriffen ziemlich enge Grenzen einzuschliesen:

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \dots \left(l_{r_1}\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}}, \quad r = 1, 2, \dots, r_1 = 1, 2, \dots$$

Jedenfalls also hat man:

$$l\frac{1}{\alpha}^{-1} > \tau(\alpha) > \left(l\frac{1}{\alpha}\right)^{-1-\mu}$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf die Theorie der Infinitärtypen,[11]) dass $\alpha l\frac{1}{\alpha}$ der Typus von $\tau(\alpha)$ ist. Weiter schreiben wir noch:

$$\tau(\alpha) = \left(l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \tau_r(\alpha)$$

wo

$$\left(l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} > \tau_r(\alpha) > \left(l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\right)^{-1-\mu}, \quad \mu \text{ beliebig klein.}$$

Im Ganzen haben wir die Convergenzregel: Das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

convergirt, falls

$$\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha);$$

---

11) Borch. Journ. Bd. 74, pag. 294.

es convergirt absolut, falls

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)$$

convergirt, d. i. falls $\alpha\sigma(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$, $\tau(\alpha)$ im obigen Sinne verstanden.

22. Vergleichung der allgemeinen Regeln I und II mit den besonderen Regeln III und IV (Art. 20).

Nach Regel I des Art. 20 würde dem vorigen Art. zu Folge für $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ der Limes von

$$J = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

gleich Null sein, falls $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$. Dies ist im Intervall $1 < \psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$ genau richtig und dies ist auch, $c \gtrless o$ angenommen, in diesem Intervall die nothwendige Bedingung. Für $c = o$ ist die nothwendige Bedingung weiter und lautet: $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$. Im Intervall $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ ist dagegen Regel I falsch. Denn, wie im Art. 16 des Genaueren gezeigt, hat man in diesem Intervall $\sqrt{\psi''(\alpha)} < \psi'(\alpha)$, und die Grenze der Convergenz des Lim J ist $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$. Falsch ist also Regel I unter folgenden genaueren Bedingungen:

$$\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}\,, \quad \sqrt{\psi''(\alpha)} \lesssim \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)\,.$$

Setzen wir z. B. $\psi(\alpha) = \alpha^{-\mu}$, so wird dies zweite Intervall:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{2}-1} \lesssim \sigma(\alpha) < \alpha^{-\mu-1}.$$

Gehört $\sigma(\alpha)$ diesem Intervall an, so ist $\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ convergent,

es ist aber

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt. Somit wird auch z. B. das Glied der Sinusreihe:

$$\sin nx \int_0^\pi d\alpha f(\alpha) \sin n\alpha$$

unendlich. (S. Riemann, Ueber die Darstellbarkeit d. e. trigon. R. pag. 45).

Weiter ist nach des Verfassers Angabe (II) lim J = o falls $\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)$ $\cos \psi(\alpha)$ unbedingt convergirt, d. i. falls

$$\sigma(\alpha) \underset{<}{\infty} \tau(\alpha) \ ,$$

eine Regel, die ausreicht, aber von der nothwendigen um so mehr abweicht, je grösser das Unendlich von $\psi(\alpha)$ ist.

Um einen Ueberblick zu gewinnen über den Grad der Annäherung dieser Bedingungen an die wirklich nothwendigen der Tabellen, schreiben eine Folge von Functionen $\psi(\alpha)$ hin, darunter die Functionen $\sigma(\alpha)$, welche die Convergenzgrenze des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

bilden, und zwar für absolute und für bedingte Convergenz. Endlich darunter die Convergenzgrenzen des Limes von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

nach den Regeln und nach den Tabellen.

$\psi(\alpha) =$	$l_3\frac{1}{\alpha}$	$l_2\frac{1}{\alpha}$	$l\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$ .... $e^{\frac{1}{\alpha}}$	..
$\sigma(\alpha) =$ Grenze der bed. Convergenz excl.	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha) =$ Grenze der absol. Convergenz	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$ .... $\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	..
$\sigma(\alpha) =$ I Regel	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha) =$ II Regel	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$ .... $\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	..
$\sigma(\alpha) =$ III Regel, $c \gtrless o$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\alpha^2}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{2\alpha}}}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha) =$ IV Regel, $c = o$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\alpha^2}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{2\alpha}}}{\alpha^2}$	..

Noch anschaulicher werden diese Verhältnisse, wenn man die Unendlich von ψ und σ durch Coordinaten darstellt, wobei es uns nicht beirren darf, dass die Grösse des Unendlich durch keine Einheit gemessen wird.[12]) Für unsere Zwecke reicht es hin, dass wir eine beliebige Anzahl von Unendlich in einer Reihenfolge nach ihrer analytisch wohl vergleichbaren Grösse anordnen können.

So entspreche jedem Puncte der Coordinatenebene in der graphischen Darstellung Tafel I[13]) ein Functionensystem

$$(\sigma(\alpha)\ ,\ \psi(\alpha))$$

und wenn der Punct unter der die Ergebnisse der Tabelle (Art. 17) darstellenden Linie und oberhalb der ψAxe gelegen ist, so entspricht

12) Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII pag. 363, Einleitung.

13) Bedauerlicherweise ist durch nachträgliche nicht hinreichend überwachte Correctur ein entstellender Fehler in diese Figur gekommen. Selbstverständlich muss die Curve I, III zwischen den Geraden II und IV verlaufen.

dem ihm zugehörigen Functionensystem eine dem ersten Hauptsatz für $c = o$ genügende Function $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$. Analog, wenn er unter der die Ergebnisse der Tabelle Art. 18 und oberhalb der ψAxe liegt, wird durch das ihm zugehörige System σ, ψ der Satz für $c \gtrless = o$ erfüllt. Liegt der Punct oberhalb einer dieser Linien, so findet der Satz für $c = o$ resp. $c \gtrless o$ nicht statt.

23. Kurze Uebersicht über die Ergebnisse dieses Capitels, nebst einigen Bemerkungen, welche ihre graphische Darstellung veranlasst.

Es zeigt sich also, dass im Intervall $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ der

$$\mathrm{Lim}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] \sin \alpha h = \mathrm{Lim}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \sin \alpha h$$

divergiren kann, wenn auch:

$$\int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)$$

ein convergentes Integral ist. Die Bedingung für die gleichzeitige Divergenz jenes Limes und Convergenz dieses Integrals lautete:

$$\sqrt{\psi''(\alpha)} < \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)\ .$$

Dagegen kann, Dank dem Sinus, im Intervall $1 < \psi(\alpha) < 1\frac{1}{\alpha}$ der Limes von

$$\int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] \sin \alpha h$$

convergiren und verschwinden, wenngleich das Integral

$$\int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right]$$

divergent ist. Die Bedingung dafür ist

$$\psi'(\alpha) < \sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha} .$$

Betrachten wir dagegen das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \Big[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big] \cos h\alpha \text{ oder } \int_0^a d\alpha \Big[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big] \sin h(\alpha + c) .$$

Dies Integral und sein Limes sind gleichzeitig convergent (in welchem Falle der Limes Null ist) und divergent, aber nur im Intervall $1 < \psi(\alpha) \underset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$.

Falls $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, ist das Integral convergent für $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, und der Limes für $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ (Art. 18), wie das obige:

$$\int_0^a d\alpha \Big[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big] \sin h\alpha .$$

Eben dies Obige ist convergent für $\sigma(\alpha) < \frac{\psi'(\alpha)}{\alpha}$, und sein Limes für $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ im Intervall $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$ und für $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ im Intervall $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$. Also, und dies scheint mir beachtenswerth, ist der Limes des Integrals mit dem sin αh in einem viel kleineren Bereiche des Unendlich von $\sigma(\alpha)$ convergent, wie das Integral selbst, während bei dem Integral mit dem cos αh die Uebereinstimmung des Convergenzbereiches beider, des Integrals und des Limes, theils vollständig, theils doch grösser als im Falle des sin αh ist.

Die Figur zeigt deutlich, dass die beste allgemeine Regel für den Gültigkeitsbereich des ersten Hauptsatzes, nämlich Regel II, von $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ an für zunehmende Unendlich von $\psi(\alpha)$ eine äusserst mangelhafte Ueber-

einstimmung mit der nothwendigen Bedingung III, IV zeigt. Wenn uns dies deshalb nicht überraschen kann, weil die Regel III eben nicht für das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

allein aufgestellt ist, sondern für sämmtliche darstellende Integrale gilt, so entsteht doch die Frage, ob für vorstehendes besondere, aber auch besonders interessante Integral nicht Regeln ermittelt werden können, die besser an die nothwendige sich anschliessen, oder ob nicht gar die nothwendige Bedingung für alle Functionen $f(\alpha)$, für welche der $\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h$ verschwindet, gefunden werden könne. Besser als II an die nothwendige Bedingung III sich anschliessende allgemeine Regeln wird es schon geben. Aber ich möchte dem Analysten, der Oehl und Mühe an die Auffindung der nothwendigen für alle Functionen $f(\alpha)$ gültigen Regel wenden will, zu bedenken geben, dass schon im Falle der einfachen Function $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ eine solche Regel zwei formell verschiedene Gesetze liefern müsste, jenachdem nämlich $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ oder $\gtrsim l\frac{1}{\alpha}$ ist. Nun betrachte man z. B. eine Function wie diese:

$$\sigma(\alpha) \cos\left[u + v \cos\left(u_1 + v_1 \cos\left\{\ldots\right\}\right)\right]$$

wo die Grössen σ, u, v, ... sämmtlich > 1 gedacht sind, wie viel formell verschiedene Gesetze für die σ, u, v, ... mag es hier wohl geben, und wie will man sich die Bedingung zusammengesetzt denken, die alle diese Fälle umfasst?

Es erscheint mir wahrscheinlich, dass ein dereinstiges tieferes Verständniss dieses und ähnlicher Probleme von allgemeineren Gesichtspuncten aus — wer vermöchte jetzt schon zu ahnen welchen! — erfolgen wird. Weil eben die formell verschiedenen Gesetze darauf hinweisen, dass wir es hier mit Grenzfällen einer höheren Continuität zu thun haben.

III. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes, welcher dem Convergenzbeweis für die Fourierschen Reihen zu Grunde liegt.

24. Angabe der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes.

Wir wenden uns zur Prüfung der für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o)$$

aufgestellten Bedingungen, welches auch die Bedingungen für die Darstellbarkeit von f(o) durch eine Fouriersche Reihe oder ein Fouriersches Integral sind, falls $f(\alpha)$ diese Bedingung nicht allein für $\alpha \geq o$, sondern auch für $\alpha \leq o$, also innerhalb eines (beliebig kleinen) den Punct $\alpha = o$ enthaltenden Intervalls, erfüllt. Es sind hier folgende Bedingungen zu verzeichnen:

I. Es genügt $f(\alpha)$ der Dirichletschen Bedingung, d. h. es hat im Intervall $o \leq \alpha \leq a$ nur eine endliche Anzahl Maxima.[14])

II. Die Lipschitzsche Bedingung: $f(\alpha) - f(o)$ wird nicht langsamer als eine Potenz von α Null.[15]) Noch etwas weiter geht die aus der Regel IV unmittelbar fliessende Bestimmung (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 61, Art. 11 und diese Abh. Art. 26) dass

$$\frac{f(\alpha) - f(o)}{\tau(\alpha)}$$

nicht unendlich werden darf, $\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 verstanden. In dieser Form will ich sie die Bedingung II nennen.

III. Vorausgesetzt, dass $f(\alpha)$ differenzirbar ist, gilt der zweite Hauptsatz für alle darstellenden Integrale, wenn dieses Integral:

14) Crelle's Journ. Bd. 4, pag. 157.
15) Borch. Journ. Bd. 63, pag. 286.

$$\int_0^a f'(\alpha)\, d\alpha$$

absolut convergent ist. [16])

IV. Falls das Integral

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

absolut convergent ist, wobei $f(\beta)$ nicht differenzirbar zu sein braucht, gilt der zweite Hauptsatz für alle darstellenden Integrale $\int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h)$, bei denen $\varphi(\alpha, h)$ die Bedingungen erfüllt, dass $\alpha\varphi(\alpha, h)$ mit α verschwindet, und mit h nicht unendlich wird, wie bei $\varphi(\alpha, h) = \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$. [17])

V. Setzt man $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, so sind nach der Tabelle Art. 17 die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, dass

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

sei, formell verschieden, jenachdem $\psi(\alpha) \lesseqqgtr l\frac{1}{\alpha}$ oder $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$. Im ersteren Falle wird verlangt, dass $\varrho(\alpha)$ verschwinde für $\alpha = 0$. Im zweiten muss $\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$ sein. Für $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ gehen die beiden Forderungen in einander über, da dann aus der zweiten $\varrho(\alpha) < 1$ folgt.

Es wird sich jetzt wieder darum handeln, die vier ersteren apriorischen Gesetze mit den aposteriori gefundenen unter V verzeichneten Regeln zu vergleichen.

Um diese Vergleichung anstellen zu können, müssen wir zuvor untersuchen, was, $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gesetzt, aus den Gesetzen III und IV für die Functionen ϱ und ψ für engere Bedingungen sich ergeben.

---

16) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 55.

17) Borch. Journ. Bd. 79 pag. 55.

25. Unter welchen Umständen ist für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha) \text{ absolut convergent?}$$

Wir beginnen damit das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha)$$

auf seine absolute Convergenz zu untersuchen.

Es soll also absolut convergent sein das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha) \cos \psi(\alpha) - \varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha) \right\}$$

oder, wenn man setzt:

$$\varrho'(\alpha) = h(\alpha) \cos \gamma$$
$$\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) = h(\alpha) \sin \gamma$$

das Integral:

$$\int_0^a d\alpha\, h(\alpha) \cos \left(\psi(\alpha) + \gamma\right)$$

wo $h(\alpha) = \left[\varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = \operatorname{arctg} \varrho(\alpha) \cdot \frac{\varrho'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$. Für $\alpha = 0$ nähert sich γ ohne Maxima einer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen Grenze.

Mithin ist $\psi(\alpha) + \gamma > 1$, daher ist nach den Ausführungen des Art. 21

$$\int_0^a d\alpha\, h(\alpha) \bmod \cos(\psi + \gamma)$$

nur dann convergent, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, h(\alpha) = \int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

convergent ist. Dies convergirt aber seinerseits nur, wenn die beiden Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, \varrho'(\alpha) \quad , \quad \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha)$$

convergiren. Denn wäre z. B. das erste nicht convergent, so könnte geschrieben werden

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left(\frac{\varrho(\bar{\alpha})\, \psi'(\bar{\alpha})}{\varrho'(\alpha)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^a d\alpha\, \varrho'(\alpha) \ ,$$

wo der Factor vor dem Integral rechts nicht verschwinden kann. Wenn $\varrho(\alpha) < 1$, ist das Integral $\int_0^a d\alpha\, \varrho'(\alpha)$ convergent. Die Convergenz des anderen Integrals

$$\int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha)$$

führt auf die Bedingung:

$$\varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha) \ \overset{\sim}{\leq}\ \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} \ ,$$

$\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 genommen.

Es ist also das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\varrho(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\right)$$

absolut convergent, wenn $\varrho(\alpha) < 1$, und die Bedingung

$$\alpha\, \varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha) \ \overset{\sim}{\leq}\ \tau(\alpha)$$

erfüllt ist.

26. Untersuchung der Bedingungen für ϱ und ψ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, welche das Integral $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$ absolut convergent machen. Es wird die Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)$ aufgestellt, und, um sie auf ihre Nothwendigkeit zu prüfen, wird zuerst eine Substitution für $f(\alpha)$ eingeführt, welche für $\psi(\alpha) > \overset{-1}{\tau(\alpha)}$ gilt.

Führen wir jetzt die analoge Untersuchung bezüglich des Integrals

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

durch, indem wir, $f(x) = \varrho(x) \cos \psi(x)$ gedacht, zu ermitteln suchen, unter welchen Bedingungen für ϱ und ψ das Integral K absolut convergirt.

Es sei $\varphi(\alpha)$ eine für $\alpha = o$ endlich bleibende Function und $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)$ ($\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 genommen), so hat man für $f(\alpha) = \varrho(\alpha)\varphi(\alpha)$:

$$\int_0^a d\alpha\left\{\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)\right\} = \int_0^a d\alpha\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}\left\{\varphi(\alpha) - \frac{\varrho(\bar\alpha)}{\varrho(\alpha)}\varphi(\bar\alpha)\right\},\ o \leqq \bar\alpha \leqq \alpha,\ \varrho(\bar\alpha) \leqq \varrho(\alpha).$$

Die Klammer unter dem Integral rechts bleibt also endlich, und für $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)$ wird daher K absolut convergent sein. Unsere Untersuchung legt sich jetzt die Frage vor, ob und wie weit die eben bei Functionen der Form $\varrho(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$, wo $\varphi(\alpha)$ nur endlich zu sein braucht, gefundene *ausreichende* Bedingung für die absolute Convergenz von K (dass $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)$ sei), bei Functionen der speciellen Form $\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ *nothwendig* ist.

Um das Integral K behandeln zu können, ist es nöthig, des darin vorkommenden inneren Integrals (nach β) dadurch ledig zu werden, dass man für $f(\alpha)$ eine Function einführt, die schon von vornherein ein Differentialquotient ist. Wir setzen also statt $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\lambda(\alpha) \sin \psi(\alpha) \\ &= \lambda(\alpha)\, \psi'(\alpha) \cos \psi(\alpha) + \lambda'(\alpha) \sin \psi(\alpha) \end{aligned}$$

ein, worin wir $\lambda(\alpha)\psi'(\alpha)$ mit $\varrho(\alpha)$ identificiren und $\lambda'(\alpha)$ — wenn diese

Voraussetzungen sich gegenseitig vertragen, da nämlich $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha)$ doch < 1 angenommen werden muss — so bestimmen, dass der $\lambda'(\alpha)\sin\psi(\alpha)$ enthaltende Theil von:

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F(\beta)$$

für sich absolut convergirt, d. i. wir setzen:

$$\lambda'(\alpha) \overset{\infty}{\leqq} \tau(\alpha).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\lambda(\alpha) \overset{\infty}{\leqq} \alpha\tau(\alpha),$$

wie folgt: Aus $\lambda'(\alpha) \overset{\infty}{\leqq} \tau(\alpha)$ folgt zunächst:

$$\lambda(\alpha) \overset{\infty}{\leqq} \int_0^\alpha d\beta\,\tau(\beta).$$

Setzt man nun

$$\int_0^\alpha d\beta\,\tau(\beta) \sim \alpha\tau(\alpha),$$

oder durch Differentiation:

$$\tau(\alpha) \sim \tau(\alpha)\left\{1 + \alpha\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)}\right\}$$

so muss die Richtigkeit dieser Relation nachgewiesen werden. Dies ist aber sehr leicht, denn aus:

$$\tau(\alpha) > \frac{1}{l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\tau(\alpha)} < l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}$$

folgt:

$$l\frac{1}{\tau(\alpha)} \overset{\infty}{\leqq} ll\frac{1}{\alpha}$$

und durch Differentiation:

$$\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \overset{\infty}{\leqq} \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}} \quad \text{oder} \quad \alpha\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \overset{\infty}{\leqq} \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}},$$

und jene Relation ist ja schon bewiesen, wenn nur überhaupt gezeigt ist, dass: $\alpha\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} < 1$.

Wir haben also die beiden Voraussetzungen:

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \alpha\tau(\alpha) \;,\; \varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1 \;.$$

Es soll untersucht werden, ob die Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \tau(\alpha)$, unter welcher K absolut convergent ist, nothwendig sei. Also müssen die vorstehenden beiden Bedingungen für λ, ϱ, ψ so beschaffen sein, dass wenigstens für einige Stärken des Unendlichwerdens von ψ die Grösse der Null, die dem ϱ gestattet ist, ein Intervall umfasst, welches die Grösse der Null von τ enthält, damit man eben feststellen könne, ob τ die nothwendige Grenze für die Functionen ϱ bildet, die K absolut convergent machen. Wie wir gleich zeigen wollen, gestatten die beiden Bedingungen $\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \alpha\tau(\alpha)$, $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1$ dem $\varrho(\alpha)$ ein hinlängliches Intervall unter der sehr allgemeinen Voraussetzung $\psi(\alpha) > \tau(\alpha)^{-1}$.

27. Nachweis, dass die Substitution des vorigen Art. für $f(\alpha)$ die Prüfung der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \tau(\alpha)$ gestattet.

Wir setzen also:

$$\psi(\alpha) = \frac{\pi(\alpha)}{\tau(\alpha)} \;,\; \pi(\alpha) > 1 \;.$$

und

$$\lambda(\alpha) = \pi_1(\alpha) \cdot \alpha\tau(\alpha) \;,\; \pi_1(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} 1 \;.$$

Man hat:

$$\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) = \alpha\pi\pi_1\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{\tau'}{\tau}\right) \;,$$

und wenn mit $\mathfrak{t}_\tau$ und $\mathfrak{t}_\pi$ die Infinitärtypen von τ und π bezeichnet werden, so wird:

$$\varrho(\alpha) = \alpha\pi\pi_1\left(\frac{1}{\mathfrak{t}_\pi} - \frac{1}{\mathfrak{t}_\tau}\right)$$

Beide Glieder in der Klammer haben das nämliche Zeichen falls $\pi(\alpha) > 1$. In diesem Falle wird also $\varrho(\alpha)$ jedenfalls einer so grossen Null wie

$$\pi_1\frac{\alpha\pi}{\mathfrak{t}_\tau}$$

fähig sein. Da aber π_1 beliebig langsam Null werden darf, so handelt es sich darum, ob stets

$$\pi_1 \frac{\alpha\pi}{t_\tau} > \tau(\alpha)$$

sein kann. Nun hat man $t_\tau \sim \alpha l \frac{1}{\alpha}$ (Art. 21), wodurch die vorstehende Relation wird:

$$\pi_1 \frac{\pi(\alpha)}{l \frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha)\ .$$

Da aber jedenfalls $\frac{\pi(\alpha)}{l \frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha)$ ist, so kann die Null von π_1 auch stets so klein gewählt werden, dass vorstehende Ungleichheit erfüllt ist.

Also gestatten die Bedingungen $\lambda(\alpha) \overset{\infty}{\geq} \alpha\tau(\alpha)$, $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1$ für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ dem $\varrho(\alpha)$ ein $\tau(\alpha)$ einschliessendes Intervall.

28. Nachweis der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \overset{\infty}{\leq} \tau(\alpha)$ für $\psi(\alpha) > \tau(\alpha)$.

Es lässt sich jetzt leicht zeigen, dass in dem Gebiete

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$$

$\varrho(\alpha) \overset{\infty}{\leq} \tau(\alpha)$ die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta F(\beta)$$

ist, oder, wie sich daraus unmittelbar ergiebt, dass

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, \varrho(\beta) \cos\psi(\alpha)$$

nur für $\varrho(\alpha) \overset{\infty}{\leq} \tau(\alpha)$ absolut convergirt, falls $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ ist.

Denn es ist:

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\lambda(\alpha)\ \sin\psi(\alpha)}{\alpha}\right).$$

Dies Integral ist aber nach Art. 25 nur dann absolut convergent, wenn:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha}\right) \quad , \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergent sind, d. i. wenn:

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \alpha \quad , \quad \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)\ ,$$

Die zweite Bedingung ist die zu beweisende, und die erste ist wegen $\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \alpha\tau(\alpha)$ von selbst erfüllt.

29. Die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von K wird für das Intervall $1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ mit Hülfe einer anderen Substitution für $f(\beta)$ aufgestellt.

Da wir nun für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ die nothwendige, $\varrho(x)$ betreffende Bedingung kennen, unter der

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\,\varrho(\beta)\ \cos\psi(\beta)$$

absolut convergirt, so hätten wir noch die nämliche Bestimmung für das Intervall

$$1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\tau(\alpha)}$$

zu versuchen. Wir werden uns aber auf das leichter zu erledigende, von jenem wenig abweichende Intervall

$$1 < \psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$$

beschränken.

Wir setzen ähnlich wie oben:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\lambda(\alpha) \cos \psi(\alpha) \\ &= \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha) - \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha) . \end{aligned}$$

Nehmen wir also an $\psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$, und setzen z. B., um einen Versuch zu machen:

$$\psi(\alpha) = \mathrm{l}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}, \quad \nu < 1 ,$$

so ist:

$$F_1(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha) + \nu\lambda(\alpha) \cdot \frac{1}{\alpha \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}^{1-\nu}} \cdot \sin \psi(\alpha)$$

Macht man alsdann weiter die Annahme

$$\lambda'(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \frac{1}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}}, \quad \mu > \nu ,$$

also

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \frac{\alpha}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}} ,$$

(wie durch Differentiation leicht zu verificiren), so giebt der zweite Theil von $F_1(\alpha)$:

$$\frac{\nu\lambda(\alpha)}{\alpha \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}^{1-\nu}} \cdot \sin \psi(\alpha)$$

in dem Integral $K_1^{(1)} = \int\limits_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\alpha d\beta\, F_1(\beta)$ für sich einen absolut convergenten Theil, gleichwie vorher, als es sich um das Intervall $\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$ handelte, es der erste Theil von $F(\alpha)$ war, über den wir in ähnlicher Weise verfügten. Weiter findet man wie oben, dass das ganze Integral

$$K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F_1(\beta)$$

absolut convergent ist, wenn die Integrale:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha}\quad,\quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergiren. Das erste convergirt wegen $\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha} \underset{<}{\sim} \frac{1}{l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}}$, das zweite wegen:

$$\frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha} \underset{<}{\sim} \frac{1}{\alpha l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+(\mu-\nu)}}\,.$$

Hierdurch ist dann auch, wenn $\lambda'(\alpha) = \varrho(\alpha)$ gesetzt wird, die Bedingung für $\varrho(\alpha)$ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha)$, vermöge deren das Integral K absolut convergirt, gefunden.

Um nun die Frage allgemein zu erledigen, setzen wir in

$$F_1(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos\psi(\alpha) - \lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha) \sin\psi(\alpha)$$

wieder $\lambda'(\alpha) = \varrho(\alpha)$, und hieraus folgt $\lambda(\alpha) \sim \alpha\varrho(\alpha)$, unter der Annahme, dass der Typus von $\varrho(\alpha)$ die Bedingung $> \alpha$ erfüllt, d. h. dass ϱ nicht so rasch, wie eine Potenz von α Null wird. Wir bestimmen sodann $\lambda(\alpha)$ so, dass der den zweiten Theil von $F_1(\alpha)$, nämlich $\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha) \sin\psi(\alpha)$, enthaltende Theil von

$$K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F_1(\beta)$$

für sich absolut convergirt, was der Fall sein wird, wenn $\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$, oder wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\,\psi'(\alpha)$$

convergirt. Alsdann folgt aus der absoluten Convergenz von $K_1^{(1}$ sofort diejenige von

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

wenn $f(\beta) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gesetzt wird. Nach den schon öfter benutzten Sätzen ist

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F_1(\beta) \quad = \quad \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{\lambda(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)}{\alpha}$$

absolut convergent, wenn die Integrale

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha} \quad , \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergiren. Was das zweite Integral betrifft, so wurde dessen Convergenz schon so eben verlangt. Das erste, welches geschrieben werden kann:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\varrho(\alpha)\,\varphi(\alpha)$$

wo $\varphi(\alpha)$ für $\alpha = o$ nicht unendlich wird, ist auch convergent, wenn $\varrho(\alpha)$ nicht unendlich wird, welches eine Forderung ist, die wir für die Darstellbarkeit der Function $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ ja ohnedies stellen müssen. Wir haben also im Ganzen die Bedingungen:

$$\varrho(\alpha) \overset{\infty}{\leq} 1 \quad , \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\,\psi'(\alpha) \text{ ist convergent,}$$

deren zweite auch $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \overset{\infty}{\leq} \tau(\alpha)$ geschrieben werden kann. Setzen wir z. B. $\psi(\alpha) = ll\frac{1}{\alpha}$, so muss sein $\dfrac{\varrho(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}} \overset{\infty}{\leq} \tau(\alpha)$. Hier kann also

z. B. $\varrho(\alpha) = \tau(\alpha) \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$ gesetzt werden, d. i. langsamer Null werden, als die kleinsten negativen Potenzen von $\mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$.

30. Bemerkungen über diese Bedingung für die absolute Convergenz von K im Falle $1 < \psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$.

Man erkennt in den vorstehenden Bedingungen jene wieder, die durch die absolute Convergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \, f'(\alpha)$$

den Functionen ϱ und ψ auferlegt wurden. Da diese Bedingungen in dem Intervall $1 < \psi < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$, wie gleich zu zeigen, mehr Functionen ϱ zulassen, als die vorher für das Intervall $\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$ gefundene nothwendige Bedingung $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ für das erstere Intervall zulassen würde, so mussten wir mindestens auf die nämlichen Bedingungen, wie sie aus der absoluten Convergenz von $\int_0^a d\alpha \, f'(\alpha)$ folgen, fallen, da ich an einem früheren Orte gezeigt habe[18]), dass die Functionen $f(\alpha)$, die das Integral $\int_0^a d\alpha \, f'(\alpha)$ zu einem absolut convergenten machen, auch die absolute Convergenz von

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \, f(\beta)$$

bewirken.

Die obige Bedingung $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ oder

18) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 58, Art. 10.

$$\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$$

gesetzt, $\rho(\alpha)\mu(\alpha) \underset{\backsim}{<} \tau(\alpha)$ giebt für jedes vorgelegte $\psi(\alpha)$ ein zugehöriges Intervall, aus welchem solche Functionen $\rho(\alpha)$ bezogen werden können, für welche das Integral K absolut convergirt. Die Grenze in der Richtung des langsamsten Nullwerdens von $\rho(\alpha)$ ist gegeben durch

$$\rho(\alpha)\mu(\alpha) \backsim \tau(\alpha).$$

Es wird $\mu(\alpha)$ für $1 < \psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ zwar < 1 (denn aus $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ folgt $\psi'(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$) aber stets $> \tau(\alpha)$ sein, da das Integral $\int\limits_0^a d\alpha\frac{\mu(\alpha)}{\alpha} = \int\limits_0^a d\alpha\psi'(\alpha)$ nicht convergent ist, so dass vorstehende Bedingung stets $\rho(\alpha) < 1$ ergiebt. Für $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ folgt $\mu(\alpha) \backsim 1$ und $\rho(\alpha) \backsim \tau(\alpha)$. Wird $\psi(\alpha)$ noch stärker unendlich als $l\frac{1}{\alpha}$, so liefert die Bedingung $\rho(\alpha)\mu(\alpha) \backsim \tau(\alpha)$ das Resultat $\rho(\alpha) < \tau(\alpha)$, welches kein Interesse mehr bietet, da das Integral $\int\limits_0^a d\alpha\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha d\beta\,\rho(\beta)\cos\psi(\beta)$ für $\rho(\alpha) \overset{\backsim}{\leq} \tau(\alpha)$ und jedes Unendlich von ψ absolut convergent ist.

31. Graphische Darstellung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz.

Um diese verschiedenen Bedingungen vergleichen zu können, stellen wir sie wieder graphisch dar, wobei die ursprüngliche Dirichletsche, welche unendlich viele Maxima der Function überhaupt ausschliesst, dem Falle $\rho(\alpha) = 0$ entsprechen würde, und nicht in die Figur aufgenommen werden kann; die übrigen werden für $\overset{-1}{\rho(\alpha)}$ dargestellt. Der graphischen Darstellung legen wir folgende tabellarische Uebersicht zu Grunde:

$\psi(\alpha) =$	$l_3\frac{1}{\alpha}$	$l_2\frac{1}{\alpha}$	$l\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$e^{\frac{1}{\alpha}}$	
	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	nach Bedingung II $\big(f(\alpha) - f(o) \sim \tau(\alpha)\big)$ d. i. $\varrho(\alpha) \sim \tau(\alpha)$
In den Horizontalreihen rechter Hand steht das schwächste Unendlich oder die grösste Null von $\frac{1}{\varrho(\alpha)}$, für welche der zweite Hauptsatz noch gilt.	$\frac{1}{\tau_2(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau_1(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2\tau(\alpha)}$	$\frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha\tau(\alpha)}$	nach Bedingung III: abs. Conv. von $\int_0^a f'(\alpha)d\alpha$ d. i. $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$
	$\frac{1}{\tau_2(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau_1(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	nach Bedingung IV: abs. Conv. von $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$. Für $1 < \psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$: $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ d. i. für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$: $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$
	1	1	1	$\alpha^{\frac{1}{2}}$	α	$\alpha e^{-\frac{1}{2\alpha}}$	nach Bedingung V: für $\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$: $\varrho(\alpha) < 1$ für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$: $\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$.

Zur Bestimmung von $\tau_r(\alpha)$ hat man (Art. 20) erstens den Ausdruck:

$$\tau(\alpha) = \left(l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots\ldots l_r\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \tau_r(\alpha) ,$$

zweitens die Ungleichheit:

$$\frac{1}{l_{r+1}\frac{1}{\alpha}} > \tau_r(\alpha) > \frac{1}{\left(l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} , \ \mu \text{ beliebig klein.}$$

Bei der graphischen Darstellung, Tafel II, des Functionensystems

$$\left(\frac{1}{\varrho(\alpha)} , \psi(\alpha)\right)$$

als Punctsystem in einer $\left(\frac{1}{\varrho}, \psi\right)$ Coordinatenebene, werden die Puncte, für die $\frac{1}{\varrho} > 1$ ist, oberhalb der ψAxe, die Puncte, für die $\frac{1}{\varrho} < 1$ ist, unter-

halb der ψAxe gedacht, so dass zwei Puncte $\left(\frac{1}{\varrho}, \psi\right)$ und $\left(\frac{1}{\varrho_1}, \psi\right)$ von der ψAxe oben und unten gleich entfernt liegen, wenn $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\varrho_1} \backsim 1$ ist.

32. Bemerkungen über die Ergebnisse der obigen Vergleichung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz.

Um die eigentliche Bedeutung der in Rede stehenden Bedingungen wohl zu verstehen, fassen wir die nothwendige (V, Art. 24 oder in der graphischen Darstellung die unterste) in's Auge. Wir müssen wohl unterscheiden zwischen Bedingungen lediglich für die Darstellbarkeit einer Function und solchen allgemeinen Bedingungen, unter denen der

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

endlich und bestimmt, also convergent ist. Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function ist eine solche, welche anzeigt, wann die Formel:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} f(\alpha)$$

stattfindet, und wir dürfen sie als erfüllbar und erfüllt ansehen, auch im Falle $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ unendlich oder unbestimmt ist, wenn alsdann nur der $\text{Limes}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ ebenfalls unendlich oder zwischen denselben Grenzen wie $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ unbestimmt ist. Hiernach ist die in Rede stehende Bedingung V eine Bedingung im weiteren Sinne für die Convergenz und nicht eine solche für die Darstellbarkeit allein. Allerdings, falls gleichzeitig $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ und L endlich und bestimmt sind, so habe ich (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 6) nachgewiesen, dass L nur $= \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ sein kann. Neu war es mir aber, wie dies aus der Be-

dingung V folgt, dass $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt sein kann, während der zugehörige

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

convergent ist.

Diese Unterscheidungen macht die graphische Darstellung übersichtlich. Das gesammte schraffirte Gebiet über der Linie, welche die Grenzfunction $\frac{1}{\varrho(\alpha)}$ nach der Bedingung V darstellt, gehört den Functionssystemen

$$\left(\varrho(\alpha)\ ,\ \psi(\alpha)\right)$$

zu, für welche

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

endlich und bestimmt und zwar = o ist. Dies zerfällt in die beiden durch die ψAxe getrennten Theile. Den Puncten des oberen Gebietstheiles gehören die Functionssysteme $\left(\varrho(\alpha)\ ,\ \psi(\alpha)\right)$ zu, bei denen $\varrho(\alpha) < 1$ ist, denen des unteren Gebietstheils die Systeme mit unendlich werdendem $\varrho(\alpha)$. Die Puncte des oberen Gebietstheils werden demnach bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{1}{\varrho(\alpha)} > 1\ ,\ \psi(\alpha) > 1\ ,$$

die des unteren durch die Bedingungen:

$$1 < \varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}\ ,\ \psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}\,.$$

Und alle Systeme dieses letzteren Gebiets entsprechen der neuen und merkwürdigen Form der Nichtdarstellbarkeit einer Function, wo $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, während

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = o$$

ist. Hier ein Beispiel. Es sei $\psi(\alpha) = \alpha^{-\mu}$, so wird aus $1 < \varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$:

$$1 < \varrho(\alpha) < \alpha^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Ist also $\mu > 0$, so erhält man für $\varrho(\alpha)$ stets einen Spielraum des Unendlichwerdens, für den $L = 0$ ist. Setzen wir z. B. $\mu = 4$, so folgt:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\frac{\cos\frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}\right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0,$$

während $$\lim_{\alpha=0} f(\alpha) = \lim_{\alpha=0} \frac{\cos\frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}$$

zwischen unendlichen Grenzen schwankt.

Nach der Tabelle findet die Formel

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \Big[\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} \Big[\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big]$$

wirklich statt: erstens für $\varrho(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > 1$, dann für $\varrho(\alpha) \sim 1$, $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$, endlich für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, $\varrho(\alpha) > \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$.

Im oben erörterten Sinne sind die Bedingungen I bis IV Art. 24 nicht Bedingungen für die Convergenz von L, sondern für die Darstellbarkeit von f(o). Von jenen Bedingungen schliesst am wenigsten darstellbare Functionen aus Bedingung IV. Von den übrigen Bedingungen ist III besser als II im Intervall $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$, umgekehrt II besser als III im Intervall $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$.

33. Allgemeine Bemerkungen über das Convergenzproblem der Fourierschen Reihen.

Da uns nun Bedingung V lehrt, dass, falls nur $\varrho(\alpha)$ verschwindet, alle Functionen $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ darstellbar sind, so haben wir hier eine erhebliche Ausdehnung des Convergenzbereiches der

Fourierschen Reihen gewonnen. Die Fouriersche Reihe stellt danach eine integrirbare Function f(x) für einen besonderen Werth $x = x_1$ dar, wenn die Unterschiede:

$$f(x_1 + \alpha) - f(x_1) \; , \; f(x_1 - \alpha) - f(x_1)$$

in einem beliebig kleinen Intervall $o \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ auf die Form:

$$\varrho_o(\alpha) + \varrho_1(\alpha) \cos \psi_1(\alpha) + \varrho_2(\alpha) \cos \psi_2(\alpha) + \dots$$

gebracht werden können, wo $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ mit α verschwinden, und $\psi_1, \psi_2, \dots$ mit $\frac{1}{\alpha}$ unendlich werden, und beide Functionenreihen bei $\alpha = o$ nicht unendlich viele Maxima haben. Ueber die Annahme unendlich vieler Glieder obiger Reihe ist in den „Schlussbetrachtungen I" die Rede.

Aber so erfreulich solche Resultate sein mögen, unseren tieferen theoretischen Wissenstrieb lassen sie unbefriedigt. Sie lehren nur die ausreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit nach Fourierschen Reihen in dieser oder jener Richtung hinausschieben, aber das Grundproblem, ob die Entwickelbarkeit unter Umständen schon bei den stetigen Functionen oder erst bei den integrirbaren, oder gar bei diesen auch noch nicht aufhöre, bleibt unberührt.

Und doch ist der von uns eingeschlagene Weg, besondere Functionenformen auf ihre Darstellbarkeit zu untersuchen, der einzige, auf dem man hoffen kann, jene Frage zu erledigen.

Zum Glück zeigt es sich denn auch, dass nur noch ein Schritt in der eingeschlagenen Richtung erforderlich ist, um die Grenze der Darstellbarkeit zu erreichen.

IV. Capitel.

Darstellung der Bedingungen, unter denen die Fourierschen Reihen divergiren.

34. Auseinandersetzung des Grundgedankens dieser Untersuchung.

Betrachten wir das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

setzen $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$, $\psi(\alpha) > 1$, und nehmen h schon sehr gross an, so kann man es in drei Theile zerfallend sich denken:

$$\int_0^{\alpha_0} \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \quad \int_{\alpha_1}^{a}$$

die folgende Beschaffenheit haben: Im ersten ist $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}$ sehr gross gegen h, im dritten ist h sehr gross gegen $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}$, das mittlere enthält den Punct $\psi(\alpha) = \alpha h$, somit auch die grösste Strecke, in der beim Wachsthum von h, periodisch wiederkehrend, keine Zeichenwechsel der Function $f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ stattfinden, oder doch abwechselnd die positiven und die negativen Werthe dieser Function weitaus überwiegen. Nehmen wir an, dass $\varrho(\alpha) > \tau(\alpha)$, oder dass

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$$

nicht convergent ist, welches die einzige Annahme ist, unter der man Divergenz des $\text{Limes}_{h=\infty}$ von

$$\int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

überhaupt erwarten kann, so wird solche Divergenz auch nur von der Strecke ohne Zeichenwechsel im mittleren Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ herrühren können. Unsere Untersuchung des Limes

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

hat nun ergeben, dass für $\varrho(\alpha) < 1$

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

immer verschwindet. Greift man also aus dem mittleren Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ die Strecke ohne Zeichenwechsel heraus:

$$\int_{\alpha'_0}^{\alpha'_1} d\alpha \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = [\sin \psi(\alpha) \sin \alpha h] \int_{\alpha'_0}^{\alpha'_1} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$$

so ist offenbar $\alpha'_1 - \alpha'_0$ so klein, dass

$$\lim (\alpha'_1 - \alpha'_0) \frac{\varrho(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}, \quad \alpha'_0 \leqq \bar{\alpha} \leqq \alpha'_1$$

verschwindet, wenn h unendlich wird. Die Strecke ohne Zeichenwechsel, d. i. die Strecke, in der $\psi(\alpha)$ und αh nahebei gleich sind, ist also offenbar zu klein, um Divergenz erzeugen zu können, und da die Curven $y = \psi(x)$, $y = xh$ die eine wachsend, die andere abnehmend sich kreuzen, so kann sie nicht anders als sehr klein sein. Um diese Strecke zu vergrössern, wird man an Stelle der gegen $\alpha = 0$ hin nur

wachsenden Function $\psi(\alpha)$ eine Function $\Psi(\alpha)$ einzuführen haben, die bei gegen Null abnehmendem α unendlich wird, aber in der Weise, dass sie, nachdem sie gewachsen ist, stets wieder eine Strecke abnimmt, um dann wieder zu wachsen, jedoch um ein grösseres Stück, als das, um welches sie eben abgenommen hatte; kurzum eine Function, die mit unendlich vielen Maximis unendlich wird. Wenn der Punct, für den $\Psi(\alpha) = \mathrm{h}\alpha$ ist, einer Strecke angehört, in der $\Psi(\alpha)$ mit α abnimmt, so wird es möglich sein, dass längs dieser Strecke die Differenz $\Psi(\alpha) - \alpha\mathrm{h}$ durchweg sehr klein bleibt, und der Projection dieser Strecke auf die αAxe wird ein möglichst grosses Stück $\alpha_0' \ldots \alpha_1'$ ohne Zeichenwechsel von $\sin \Psi(\alpha) \sin \alpha\mathrm{h}$ entsprechen (Taf. III, die Fig. rechts).

Es liegt also nahe, nachdem man den $\mathrm{Limes}_{\mathrm{h}=\infty}$ von

$$\mathrm{J} = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha\mathrm{h}}{\alpha}$$

für eine Function $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ untersucht hat, in der $\psi(\alpha)$ nur wachsend unendlich wird, zu setzen:

$$f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin\Big(\mathrm{u} + \mathrm{v} \sin \psi(\alpha)\Big)$$

und obigen Limes für diese Function zu discutiren, in der man u, v und ψ für $\alpha = 0$ unendlich werdend abnimmt. Wer jedoch die vorstehende Untersuchung des $\lim \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha\mathrm{h}}{\alpha}$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gelesen hat, wird mir gern glauben, dass die entsprechende Untersuchung für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin\Big(\mathrm{u} + \mathrm{v} \sin \psi(\alpha)\Big)$, so hoch unstreitig ihr Interesse sein würde, dennoch zu einem unmöglichen Umfang anwachsen müsste.

Ich habe daher vorgezogen, das Problem in einer Weise zu schematisiren, die uns bezüglich etwaiger Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln verhältnissmässig leicht ebenso viel lehrt, als wir aus der Untersuchung von lim J für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin\Big(\mathrm{u} + \mathrm{v} \sin \psi(\alpha)\Big)$ erfahren könnten, wenngleich ich gern zugeben will, dass die Ergebnisse dieser letzteren Untersuchung insofern allgemeiner als die der unten angestellten werden müssten, als sie, abgesehen von der Erledigung der Divergenzfrage, die nothwendigen Bedingungen für die Darstellbarkeit

einer Function durch Fouriersche Reihen noch erheblich weiter hinaus, als durch unsere bisherigen Untersuchungen geschehen, und gerade mitten in ein höchst interessantes Functionengebiet hineinrücken würden.

35. Beschreibung der einzuführenden schematisirten Function.

Unsere Schematisirung des Divergenzproblems besteht in folgender Definition der in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ auftretenden Function $\Psi(\alpha)$. Ein Intervall $o \leqq x \leqq x_0$, wo wir $x_0 \geqq a$ annehmen wollen, zerlegen wir in die Theile

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_0 - x_1 \\ \Delta_2 &= x_1 - x_2 \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_{p+1} &= x_p - x_{p+1} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

mit der Bestimmung, dass:

$$\begin{aligned} x_0 &> x_1 > x_2 \ldots, \\ \Delta_1 &> \Delta_2 > \ldots, \end{aligned}$$

und dass $x_\infty = o$, also $\Delta_\infty = o$, mithin

$$x_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \text{ in infin.}$$

sei.

Nun sei die Function $\Psi(\alpha)$

gleich $h_1\alpha$ im Intervall $x_1 \ldots a$
,, $h_2\alpha$,, ,, $x_2 \ldots x_1$
. . . .

wo $h_1 < h_2 < \ldots$ und $h_\infty = \infty$. Bestimmt man endlich die Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ und die Grössen $h_1, h_2 \ldots$ so, dass die Producte $h_p x_p, h_p x_{p-1}$ mit p unendlich werden, so ist $\Psi(\alpha)$ eine mit unendlich vielen Maximis — die hier in Spitzen ausarten — unendlich werdende Function, wie sie in der Fig. links Taf. III dargestellt ist. $\Psi(\alpha)$ springt für $\alpha = x_1, x_2, \ldots$ und zwar resp. um $(h_2 - h_1)x_1, (h_3 - h_2)x_2, \ldots$. Um von dem Gang der Function $\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ oder einfacher vom Gang von $\sin \Psi(\alpha)$ eine Vorstellung zu gewinnen, nennen wir Dichtigkeit der Maxima einer Function f(x) an der Stelle $x = x'$ die Längeneinheit dividirt durch die Summe der Entfernungen des x' von den beiden nächsten Maximis von f(x), bei welcher Definition die Dichtigkeit der Maxima eine stetige Function von x' ist. Hiernach ist die Dichtigkeit der Maxima von

sin αh bei der Veränderung von α constant. Die Dichtigkeit der Maxima von sin $\Psi(\alpha)$ ist in jedem Intervall Δ oder $(x_{p+1} < \alpha < x_p)$ constant.

Nun springt $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ im Allgemeinen ebenfalls, wenn α einen Werth x_p passirt. Ich werde unten zeigen, dass es möglich ist, nicht allein $f(\alpha)$ sammt einer beliebigen endlichen Anzahl Differentialquotienten stetig zu erhalten, sondern in Gebiet $o < \alpha \leqq a$ sammt allen ihren Differentialquotienten. Ich will indessen gleich anführen, worauf mich Herr Weierstrass aufmerksam gemacht hat, dass, wenn man nur wünscht, $f(\alpha)$ selbst stetig zu erhalten, dies am einfachsten erreicht wird, indem man die an den Sprungstellen aneinanderstossenden Werthe $h_{p+1}x_p$ und $h_p x_p$ von $\Psi(\alpha)$ als Vielfache von π bestimmt. Z. B. nach der sofort einzuführenden Festsetzung über die $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ und $h_1, h_2, \cdots$ ist

$$x_p h_{p+1} = x_{p+1}^{-1}\ ,\ x_p h_p = x_{p-1}^{-1}\ ,\ x_p = \frac{x_0}{\prod_0^{p-1}(2q+1)}\ .$$

Hier braucht man also nur $x_0 \pi = 1$ anzunehmen.

Um das erstrebte Resultat, nämlich die Divergenz des

$$\lim \int_0^a d\alpha\ \varrho(\alpha)\ \sin\ \Psi(\alpha)\ \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

besonders augenfällig zu machen, verfügen wir über die Grössen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots$ in folgender Weise.

Wir setzen:

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 = x_0 - x_1 = x_1 & & h_1 = \dfrac{1}{x_0 x_1} \\ \Delta_2 = x_1 - x_2 = 2x_2 & & h_2 = \dfrac{1}{x_1 x_2} \\ \Delta_3 = x_2 - x_3 = 4x_3 & & . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & & . \\ \Delta_{p+1} = x_p - x_{p+1} = 2^p x_{p+1} & & h_{p+1} = \dfrac{1}{x_p x_{p+1}}\ . \end{array}$$

Aus dem System links folgt:

$$x_p = \frac{x_0}{\prod_0^{p-1}(2^q+1)}\ .$$

36. Es wird zuerst die Divergenz des $\lim \int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ **nachgewiesen.**

Wir betrachten zuerst das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

zerlegen es in die Theile:

$$\int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a,$$

und setzen $h = h_p$. Das dritte Integral kann geschrieben werden:

$$\int_{x_{p-1}}^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \sum_{q=1}^{q=p-1} \int_{x_q}^{x_{q-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin \alpha h_q \sin \alpha h_p$$

$$= \sum_{q=1}^{q=p-1} \left\{ \frac{1}{x_q} \left| \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q} \right|_{x_q}^{\xi} + \frac{1}{x_{q-1}} \left| \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q} \right|_{\xi}^{x_{q-1}} \right\}$$

falls a der Kürze halber gleich x_0 angenommen wird, und unter Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes. Es ist ferner:

$$\frac{1}{h_p \pm h_q} = \frac{1}{h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}$$

und der grösste Werth von $\frac{h_q}{h_p}$ ist $\frac{h_{p-1}}{h_p} = \frac{x_p}{x_{p-2}} = \frac{1}{(2^{p-1} + 1)(2^{p-2} + 1)}$.

Die Coefficienten der Sinus unter dem Summenzeichen haben die Form

$$\frac{1}{x_q h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}, \quad \frac{1}{x_{q-1} h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_q}}.$$

Da die Summe über $p - 1$ Summanden sich erstreckt, $x_q < x_{q-1}$, $\frac{h_q}{h_p} < 1$ ist, so wird jedenfalls die ganze Summe verschwinden, wenn

$\frac{p}{x_q h_p}$, $q = p - 1$ gesetzt, für $p = \infty$ verschwindet. Wegen $h_p = \frac{1}{x_p x_{p-1}}$ ist aber

$$\frac{p}{x_{p-1} h_p} \doteq p x_p = \frac{ap}{\prod\limits_{0}^{p-1} (2^q + 1)}$$

und verschwindet allerdings für $p = \infty$. Untersuchen wir zweitens das erste Integral:

$$\int\limits_0^{x_p} d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \sum_{q=p}^{q=\infty} \int\limits_{x_{q+1}}^{x_q} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin \alpha h_{q+1} \sin \alpha h_p$$

$$= \sum_{q=p}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{x_{q+1}} \Bigg|_{x_{q+1}}^{\xi} \frac{\sin \alpha(h_{q+1} - h_p)}{h_{q+1} - h_p} - \frac{\sin \alpha(h_{q+1} + h_p)}{h_{q+1} + h_p} + \frac{1}{x_q} \Bigg|_{\xi}^{x_q} \frac{\sin \alpha(h_{q+1} - h_p)}{h_{q+1} - h_p} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \alpha(h_{q+1} + h_p)}{h_{q+1} + h_p} \right\},$$

so kommt es wieder auf die Abschätzung der Grösse:

$$\frac{1}{x_{q+1} h_{q+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h_p}{h_{q+1}}}$$

an, wenn $p, p + 1, \ldots$ statt q gesetzt wird. Der grösste Werth von $\frac{h_p}{h_{q+1}}$ ist wieder $\frac{h_p}{h_{p+1}} = \frac{x_{p+1}}{x_{p-1}} = \frac{1}{(2^p + 1)(2^{p-1} + 1)}$. Ferner ist

$$\frac{1}{x_{q+1} h_{q+1}} = x_q = \frac{a}{\prod\limits_{0}^{q-1} (2^r + 1)}.$$

Eine Reihe der Form:

$$x_p u_0 + x_{p+1} u_1 + x_{p+2} u_2 + \cdots$$

werden wir schreiben können:

$$\frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1} (2^q + 1)} \left\{ u_0 + \frac{u_1}{2^p + 1} + \frac{u_2}{(2^p + 1)(2^{p+1} + 1)} + \cdots \right\},$$

und, falls die u endlich bleiben, verschwindet die Reihe, wenn p unendlich wird, somit auch die obige Summe, in die wir das Integral

$$\int_0^{x_p} d\alpha \, \sin \Psi(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$$

transformirt hatten.

Betrachten wir endlich das mittlere Integral:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \, \sin \Psi(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{(\sin \alpha h_p)^2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Big|_{x_p}^{x_{p-1}} \log \alpha - \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{\cos 2 h_p \alpha}{\alpha} d\alpha \, .$$

Es ist

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \, \frac{\cos 2 h_p \alpha}{\alpha} = \frac{1}{x_p h_p} \int_{x_p h_p}^{\xi} d\alpha \cos 2\alpha + \frac{1}{x_{p-1} h_p} \int_{\xi}^{x_{p-1} h_p} d\alpha \, \cos 2\alpha$$

Wegen $\frac{1}{x_p h_p} = x_{p-1}$, $\frac{1}{x_{p-1} h_p} = x_p$ verschwindet für $p = \infty$ das Integral links. D e r l e t z t e B e s t a n d t h e i l d e s u r s p r ü n g l i c h e n I n t e g r a l s $\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, d e r n o c h z u b e t r a c h t e n i s t:

$$\frac{1}{2} \Big|_{x_p}^{x_{p-1}} \log \alpha = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{2^{p-1} x_p}{x_p}\right) = \frac{1}{2} \log (1 + 2^{p-1})$$

w i r d m i t p u n e n d l i c h.

37. Alsdann wird eine hinreichend langsam Null werdende Function eingeführt, damit auch $\lim \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \, \sin \Psi(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ **divergirt.**

Wir haben also im vorigen Art. gesehen, dass das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \, \sin \Psi(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a ,$$

wenn h ins Unbegrenzte wächst, ebenfalls ohne Ende wiederkehrend Werthe annimmt, die ins Unbegrenzte wachsen. Der erste und der dritte Theil rechts nähern sich der Null und auch ein Theil des mittleren Integrals, während der andere Theil des mittleren Integrals gleich $\frac{1}{2}\log(1+2^{p-1})$ wird, so oft h bei seinem Wachsen einen der Werthe h_p passirt. Führen wir jetzt wieder $\varrho(\alpha)$ unter dem Integral ein, betrachten also:

$$\int_0^a d\alpha\,\varrho(\alpha)\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = \int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a$$

so ist es klar, dass, falls $\varrho(\alpha) < 1$, das erste und dritte Integral und der Theil:

$$-\frac{1}{2}\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}\cos 2h_p\alpha$$

des mittleren Integrals wieder und zwar a fortiori verschwinden, wenn p unendlich wird, weil bei Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes wir jetzt $\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, statt wie oben $\frac{1}{\alpha}$ vor die Integrale nehmen dürfen. Der Theil des mittleren Integrals, welcher unendlich werden soll, lautet:

$$\frac{1}{2}\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2}\varrho(\xi)\,\log(1+2^{p-1})\,,\; x_p \leqq \xi \leqq x_{p-1}\,.$$

Dieser Ausdruck ist grösser als $\varrho(x_p)\log(1+2^{p-1})$.

Wir haben also $\varrho(x)$ so anzunehmen, dass

$$\varrho\left[\frac{a}{\prod\limits_0^{p-1}(2^q+1)}\right]\log(1+2^{p-1}) > 1\,,$$

wenn eben $\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$ mit p unendlich werden soll.

Setzen wir:

$$\frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1}(2^q+1)} = \frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1}2^q\,\prod(1+2^{-q})} = \alpha$$

so folgt:

$$\frac{1}{\prod\limits_{0}^{p-1}2^q} = 2^{-p(p-1)} \sim \alpha$$

oder

$$p \sim \sqrt{\log\frac{1}{\alpha}}$$

Da nun $\log(1+2^{p-1}) \sim p$, so ist ϱ so zu bestimmen, dass

$$1 > \varrho(\alpha) > \frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{\alpha}}}\,.$$

Falls $\varrho(\alpha)$ dieser Bedingung genügt, ist

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\varrho(\alpha)\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

divergent.

38. Untersuchung der Frage, wie stark das Integral $\int_0^a d\alpha\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$ bei seiner Divergenz mit h unendlich wird.

Es ist noch von Interesse, das Unendlich des vorstehenden Limes zu bestimmen, mit andern Worten die am langsamsten Null werdende Function $\varphi(h)$ zu ermitteln, mit der multiplicirt, vorstehendes Integral endlich bleibt, wenn h unendlich wird, wobei wir der Einfachheit halber $\varrho(\alpha) = 1$ annehmen wollen. Es bleibt ohne Zweifel endlich das Product:

$$\frac{1}{\log(1+2^{p-1})}\int_0^a d\alpha\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha},$$

wenn p und h verbunden sind durch die Relation:

$$h = \frac{1}{x_p x_{p-1}} = \frac{1}{a^2} \prod_0^{p-1} (2^q + 1) \prod_0^{p-2} (2^q + 1) \backsim 2^{p(p-1)+(p-1)(p-2)}$$

woraus folgt:

$$p \backsim \sqrt{\log h} ,$$

so dass das Product:

$$\frac{1}{\sqrt{\log h}} \int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

endlich bleibt, wenn h unendlich wird.

39. Verallgemeinerung des Functionen-Schema $\Psi(x)$.

Wir wollen noch die schematisirte Function $\Psi(x)$ nach allgemeineren Principien zusammensetzen, indem wir uns die Frage vorlegen, wie die $x_1, x_2, \ldots$ und $h_1, h_2 \ldots$ überhaupt zu bestimmen sind, damit das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zwischen unendlichen Grenzen schwanke, wenn h unendlich wird.

Setzen wir zunächst:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_0 - x_1 &&= u_0 x_1 \\ \Delta_2 &= x_1 - x_2 &&= u_1 x_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta_{p+1} &= x_p - x_{p+1} &&= u_p x_{p+1} \end{aligned}$$

so folgt aus diesem System:

$$x_p = \frac{x_0}{(1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_{p-1})} .$$

Falls also $\prod_0^\infty (1 + u_p) = \infty$ ist, hat man:

$$x_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \text{ in infin.}$$

Beiläufig bemerkt, erhält man durch Addition des obigen Systems:

$$x_0 - x_{p+1} = u_0 x_1 + u_1 x_2 + \cdots u_p x_{p+1}$$

$$= x_0 \left\{ \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{u_1}{(1+u_0)(1+u_1)} + \cdots \frac{u_p}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_p)} \right.$$

woraus für $p = \infty$ folgt:

$$1 = \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{u_1}{(1+u_0)(1+u_1)} + \cdots \frac{u_p}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_p)}$$

ein (lediglich an die Bedingung $\prod\limits_0^\infty (1+u_p) = \infty$ gebundener) Satz, den ich mich nicht erinnere, erwähnt gefunden zu haben, und der gelegentlich nützlich sein kann. Für $1 + u_0 = 1 + u_1 = \cdots = x$ folgt daraus die gemeine geometrische Reihe.

Für unsere Zwecke muss der $\log\left(1 + \frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}\right)$ oder die Grösse $\frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}$, d. i. die Grösse u_p mit p unendlich werden. Man hat also zuerst:

$$u_p > 1 .$$

Weiter muss sein $\lim \frac{h_{p-1}}{h_p} < 1$. Drittens muss sein

$$\frac{p}{x_p h_p} < 1 .$$

Endlich muss die Reihe

$$\sum_p^\infty \frac{1}{x_p h_p}$$

für $p = \infty$ verschwinden, d. i. die Reihe

$$\frac{1}{x_1 h_1} + \frac{1}{x_2 h_2} + \cdots$$

convergent sein. Unter diesen vier Bedingungen wird der $\lim_{h=\infty}$ $\int\limits_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, wenn $\varrho(\alpha)$ hinreichend langsam Null wird, divergiren. Nach dem Olivier-Abelschen Satz muss $\lim \frac{p}{x_p h_p}$

Null sein, wenn die Reihe mit dem Gliede $\frac{1}{x_p h_p}$ convergiren soll. Setzt man also

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p}$$

und wie oben

$$x_{p-1} - x_p = u_{p-1} x_p$$

so reduciren sich die Bedingungen für die u und v auf diese:

1. $\lim u_p = \infty$.
2. v_p ist das Glied einer absolut convergenten Reihe.

Denn die Bedingung $\lim \frac{h_{p-1}}{h_p} < 1$, welche lautet:

$$\lim \frac{v_p}{v_{p-1}} \frac{1}{1 + u_{p-1}} < 1$$

ist schon durch 1. erfüllt.

40. Ueber die allgemeinere Frage: Wie rasch kann überhaupt das Integral $\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ mit h unendlich werden.

Um nun schliesslich die hieraus entspringende Frage zu erledigen, wie rasch überhaupt das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

mit h unendlich werden kann, so hat man zu benützen, dass

$$\frac{\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}}{l(1 + u_{p-1})}$$

endlich bleibt. Wir haben:

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p} = \frac{1}{x_0 v_p}(1 + u_0)(1 + u_1) \cdots (1 + u_{p-1}) ,$$

und dürfen $x_0 = 1$ annehmen. Die Aufgabe ist aus der Beziehung

$$\frac{\prod_{0}^{p-1}(1+u_q)}{v_p} = h$$

das grösstmögliche Unendlich von $l(1+u_{p-1}) = \lambda(h)$ darzustellen, welches entsteht, wenn den u_q und v_p alle ihnen durch die oben gefundenen Bedingungen (dass u_p mit p zugleich beliebig rasch unendlich werde, und dass v_p das Glied einer unbedingt convergenten Reihe sei) gestatteten Formen ertheilt werden.

Nimmt man die Logarithmen an beiden Seiten und bringt die Gleichung in diese Form:

$$l(1+u_{p-1}) = lh - \left\{\sum_{1}^{p-2} l(1+u_q) + l\frac{1}{v_p}\right\}$$

so sieht man zunächst, dass $l(1+u_{p-1})$ jedenfalls nicht $>$ lh sein kann. Sehen wir zu, ob es $\sim$ lh gedacht werden darf.

Man schreibe der Kürze halber:

$$l(1+u_{q-1}) = w_q\ ,\ v_p = \gamma_p \frac{\tau(p)}{p}\ ,\ \text{wo } \gamma_p < 1\ ,$$

und bringe obige Gleichung in die Form:

$$w_p\left\{1 + \frac{\sum_{1}^{p-1} w_q}{w_q} + \frac{1}{w_p}\, l\frac{p}{\tau(p)\gamma_p}\right\} = lh\ .$$

Um das Resultat $w_p \sim lh$ zu erhalten, ist es am günstigsten, das Unendlich der Glieder in der Klammer links zu verkleinern. Wir nehmen das Unendlich von γ_p^{-1} so klein an, dass $l\frac{p}{\tau(p)\gamma_p} \sim lp$. Wird jetzt noch angenommen $w_p \sim e^{Mp}$, so ist der Limes des zweiten Gliedes in der Klammer (dem im Falle $w_p = e^{Mp}$ die Form $\frac{e^{Mp} - e^M}{e^M - 1}$ ertheilt werden kann) ein endlicher. Der des dritten Gliedes ist es natürlich auch, es ist also für $w_p \gtrsim e^{Mp}$ auch $w_p \sim lh$.

Daher lh wirklich das grösstmögliche Unendlich jenes Integrals:

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

vorstellt.

Somit wird das Integral

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} ,$$

falls $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ gesetzt wird, und $\varrho(\alpha) < 1$, durch lh dividirt, stets den Limes Null haben, wird aber durch $\lambda(h) < lh$ dividirt, einen unbestimmten Limes haben können.

Dies Resultat wird auf eine beliebige integrirbare Function $f(\alpha)$ auszudehnen sein, weil keine Function möglich ist, die ein rascheres (periodisch wiederkehrendes) Wachsen des Integrals ergeben könnte, als die in diesem Artikel abgeleitete $\sin \Psi(\alpha)$.

Jetzt lässt sich auch feststellen, bei einer wie kleinen Null von $\varrho(x)$ in $f(x) = \varrho(x)\varphi(x)$, $\lim_{x=0} \varphi(x)$ von Null und unendlich verschieden angenommen, zuerst divergente Fouriersche Reihen auftreten. Aehnlich wie Art. 37 hat man für $\varrho(x)$ die Bedingung zu erfüllen: $\varrho(x_p)\, l(1 + 2^{p-1}) > 1$, wo $x_p \cdot \prod_0^{p-1}(1 + u_{p-1}) = x_0$ ist. Setzen wir ferner $\varrho(x) = r(lx)$, so haben wir: $r\left(\sum_1^{p-1} w_q\right) l(1 + 2^{p-1}) > 1$, oder, wenn das Integral mit $\sin \Psi(\alpha)$ wie lh unendlich werden soll, muss sein: $r(w_p)\, l(1 + 2^{p-1}) > 1$. Nun ist festzustellen, für welche am langsamsten unendlich werdenden Functionen w_p man $w_p \backsim \sum_0^p w_p$ hat. Führt man statt der Reihe ein Integral ein, so findet man leicht $w_p = e^{\mu p}$, woraus $\varrho(e^{\mu p}) \cdot p > 1$, und endlich: $\varrho(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ sich ergiebt.

Während also in den Art. 37, 38 für das endlich bleibende Verhältniss $\frac{1}{\sqrt{lh}}\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ gefunden wurde $\varrho(\alpha) > \frac{1}{\sqrt{l\frac{1}{\alpha}}}$, so hier für den endlichen Limes $\frac{1}{lh}\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ die Bedingung $\varrho(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$.

Und für irgend eine Function $f(x) = \varrho(x)\varphi(x)$ (wo $\varphi(x) \backsim 1$), wird man Divergenz des Integrals J erst für $\varrho(x) l\frac{1}{x} > 1$ erwarten können.

41. Stetigmachung der schematisirten Function Ψ. Sie wird zunächst mit beliebig vielen Differentialquotienten stetig gemacht.

Nun sei $\Psi_1(\alpha)$ eine Function, die sonst überall gleich $\Psi(\alpha)$ ist, und die nur in den Intervallen $(x_p - \varepsilon_p \ldots x_p + \varepsilon'_p)$ anders bestimmt werden soll. So hat man:

$$\int_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \sin \Psi_1(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$
$$+ \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p-\varepsilon_p}^{x_p+\varepsilon'_p} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha h \left\{ \sin \Psi_1(\alpha) - \sin \Psi(\alpha) \right\},$$

wenn man der Bequemlichkeit halber annimmt $x_1 + \varepsilon'_1 < a < x_0 - \varepsilon_0$.

Die Summe rechts können wir schreiben:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{W_p(\varepsilon_p + \varepsilon'_p)}{x_p - \varepsilon_p} = \sum_{p=1}^{p=\infty} (\varepsilon_p + \varepsilon'_p) \frac{\varrho(\bar\alpha)}{\bar\alpha} \sin \bar\alpha h \left\{ \sin \Psi_1(\bar\alpha) - \sin \Psi(\bar\alpha) \right\}, x_p - \varepsilon_p \leqq \bar\alpha \leqq x_p + \varepsilon'_p$$

wo W_p endlich bleibt auch für $p = \infty$. Nun kann man aber ε_p und ε'_p stets so wählen, dass die vorstehende Summe endlich bleibt. Natürlich muss $\varepsilon_p < x_p$ angenommen werden, und setzen wir noch $\varepsilon_p = \varepsilon'_p$, so braucht nur $\sum \frac{\varepsilon_p}{x_p}$ endlich zu sein, was vollauf erreicht wird, wenn man z. B. $\varepsilon_p = x_p^2$ setzt. Dann also geht aus der Gleichheit Eingangs dieses Art. hervor, dass die Integrale

$$\int_0^a d\alpha\varrho(\alpha)\ \sin\ \Psi_1(\alpha)\ \frac{\sin\alpha h}{\alpha}\quad,\quad \int_0^a d\alpha\varrho(\alpha)\ \sin\ \Psi(\alpha)\ \frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

beide mit h unendlich werden, während die Function $\Psi_1(\alpha)$ in den Intervallen $(x_p - \varepsilon_p \ldots . x_p + \varepsilon_p)$ noch ganz beliebig ist. In diese Intervalle fallen die Sprünge der Function $\Psi(\alpha)$ und wir können nun ohne Weiteres die Function $\Psi_1(\alpha)$ so annehmen, dass nicht allein sie sondern auch beliebig viele ihre Differentialquotienten im ganzen Intervall $x_p - \varepsilon_p \leqq \alpha \leqq x_p + \varepsilon_p$ stetig sind, wie dies aus der Interpolationstheorie bekannt ist. Es sei z. B. die Stetigkeit von $\Psi_1(\alpha)$ und von m Differentialquotienten dieser Function im Intervall $x_p - \varepsilon_p \leqq \alpha \leqq x_p + \varepsilon_p$ verlangt, so setzen wir in diesem Intervall:

$$\Psi_1(\alpha) = S_p(\alpha) = a_0^{(p)} + \alpha a_1^{(p)} + \alpha^2 a_2^{(p)} + \ldots \alpha^n a_n^{(p)}$$

Für $\alpha > x_p + \varepsilon_p$ ist zunächst $\Psi_1(\alpha) = h_p\alpha$, für $\alpha < x_p - \varepsilon_p$ ist zunächst $\Psi_1(\alpha) = h_{p+1}\alpha$. Man hat also die Coefficienten $a_q^{(p)}$ in $S_p^{(\alpha)}$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} S_p(x_p - \varepsilon_p) &= h_{p+1}(x_p - \varepsilon_p) \\ S_p(x_p + \varepsilon_p) &= h_p(x_p + \varepsilon_p) \\ S_p'(x_p - \varepsilon_p) &= h_{p+1} \\ S_p'(x_p + \varepsilon_p) &= h_p \\ S_p^{(r)}(x_p \pm \varepsilon_p) &= o\ ;\ r = 2, 3, \ldots m. \end{aligned}$$

Da dies $2m + 2$ Gleichungen sind, so darf n nicht kleiner als $2m + 1$ sein. (Siehe die Figur links, Taf. III.)

42. Stetigmachung der Function Ψ. Sie wird durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt. Vorbereitung.

Schliesslich wollen wir noch zeigen, wie man eine Function $\Psi_2(\alpha)$ an die Stelle von $\Psi(\alpha)$ setzen kann, die im Intervall $o < \alpha \leqq a$ mit allen ihren Differentialquotienten stetig ist.

Während wir im vorigen Art. die bei Annäherung an $\alpha = o$ unbegrenzt oft springende Function $\Psi(\alpha)$ durch eine stetige Function $\Psi_1(\alpha)$ in der Weise ersetzt haben, dass wir in die Function $\Psi(\alpha)$ in der Umgebung der Sprungstellen stetig sich ändernde Strecken einfügten, so wollen

wir jetzt anders verfahren. Man kann die unstetige Function nach der von Fourier herrührenden Methode durch darstellende Formeln ausdrücken, wobei die unstetige Function als Grenze einer stetigen sich darbietet, in deren analytischem Ausdruck ein Parameter einen Grenzwerth erhält. Setzt man z. B.

$$f(x,k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^b d\alpha\, \varphi(\alpha)\, k e^{-k^2(\alpha-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{k(a-x)}^{k(b-x)} d\alpha\, \varphi\left(x+\frac{\alpha}{k}\right) e^{-\alpha^2},$$

so erhält $\lim_{k=\infty} f(x,k)$ für $a < x < b$ den Werth $\varphi(x)$, und, wenn x ausserhalb dieses Intervalls liegt, den Werth Null.

Betrachten wir ferner dies Integral:

$$\psi_p(x,k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \alpha h_p \cdot k\varkappa_p e^{-k^2\varkappa^2_p(\alpha-x)^2},$$

welches in das erstere durch Vertauschung von $\alpha h_p, k\varkappa_p, x_{p-1}, x_p$ mit $\varphi(\alpha)$, k, a, b übergeht, so wird es im Intervall $x_p < \alpha < x_{p-1}$ gleich $x h_p$, ausserhalb Null werden, wenn k (und damit zugleich $k x_p$) unendlich wird. Bildet man dann weiter die Summe:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \psi_p(x, k)$$

so kann man darin erstens, wie ich sofort zeigen werde, die $\varkappa_p$ stets so bestimmen, dass die Reihe convergirt und unbegrenzt oft nach x differenzirbar ist. Eine Reihe mit dem Gliede $U_p = u_p e^{-v_p}$ convergirt u. A. wenn:

$$\lim\left[v_{p+1} - v_p - (lu_{p+1} - lu_p)\right] > 0$$

ist. (Um dies zu beweisen, bilde man $\frac{U_{p+1}}{u_p}$ mit $U_p = e^{-(v_p - \log u_p)}$.)

Nun geben wir, indem wir die Bestimmungen des Art. 35 hinsichtlich der Grössen x_p, h_p festhalten, $\psi_p(x,k)$ die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{p-1} x_p \bar{\alpha} h_p \cdot k\varkappa_p e^{-k^2\varkappa^2_p(\bar{\alpha}-x)^2}, \quad x_p \leqq \bar{\alpha} \leqq x_{p-1}.$$

Es ist $x_p x_{p-1} h_p = 1$, und da $\bar{\alpha} \leqq x_{p-1}$ ist, so ist vorstehender Ausdruck höchstens:

$$\sim 2^p \varkappa_p e^{-k^2 \varkappa^2{}_p (\bar{\alpha} - x)^2}.$$

Die Grösse $(\bar{\alpha} - x)^2$ nähert sich mit unendlich werdendem p wachsend der Grenze x^2, also reducirt sich die Behufs der Convergenz der Reihe $\Sigma\psi_p(x, k)$ zu erfüllende Bedingung:

$$\lim\left\{k^2\varkappa^2_{p+1}(\bar{\alpha} - x)^2_{p+1} - k^2\varkappa^2_p(\bar{\alpha} - x)_p - \left(\log 2 + \log\frac{\varkappa_{p+1}}{\varkappa_p}\right)\right\} > 0$$

auf:

$$k^2x^2\lim(\varkappa^2_{p+1} - \varkappa^2_p) + k^2\lim\varkappa^2_{p+1}\left[(\bar{\alpha} - x)^2_{p+1} - (\bar{\alpha} - x)^2_p\right] \lim\left(\log 2 + \log\frac{k_{p+1}}{\varkappa_p}\right) > 0$$

welche z. B. für $\varkappa_p = p$ erfüllt ist. Dies würde sie auch sein, wenn wir irgend einen n ten Differentialquotienten von $\psi_p(x, k)$ genommen hätten statt dieser Grösse selbst. In der letzten Klammer hätte der $\log\frac{\varkappa_{p+1}}{\varkappa_p}$ den Factor $2n + 1$ erhalten. So dass allerdings $\Sigma\psi_p(x, k)$ beliebig oft differenzirbar ist.

Im Ganzen hat also $\sum_{p=q}^{p=\infty}\psi(x, k)$ die Eigenschaften: erstens zu convergiren, zweitens sammt unbegrenzt vielen Differentialquotienten eine stetige Function von x zu sein, drittens für $k = \infty$, falls x zwischen x_r und x_{r-1} liegt, wo $r - 1 \geqq q$, den Grenzwerth xh_r anzunehmen.

43. Stetigmachung etc. Einführung der mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetigen Function.

Dies festgestellt, wollen wir die Function $\Psi_2(x)$ auf folgende Weise bestimmen. Sie unterscheidet sich von der eben discutirten Summe nur dadurch, dass auch k in jedem Gliede verschieden ist. Indem jedoch $k_1 < k_2 < \dots$ angenommen wird, hat die Summe

$$\Psi_2(x) = \Sigma\psi_p(x, k_p)$$

die eben hervorgehobenen drei Eigenschaften ebenfalls. Die k_p bestimmen wir so. Wir unterscheiden die Intervalle

$$\dots (x_3 + \varepsilon_3 \dots x_2 - \varepsilon_2),\ (x_2 + \varepsilon_2 \dots x_1 - \varepsilon_1),\ (x_1 + \varepsilon_1 \dots x_0 - \varepsilon_0),$$

die wir mit $\dots i_3, i_2, i_1$ bezeichnen und diese:

$\cdots(x_3 - \varepsilon_3 \cdots x_3 + \varepsilon_3)$, $(x_2 - \varepsilon_2 \cdots x_2 + \varepsilon_2)$, $(x_1 - \varepsilon_1 \cdots x_1 + \varepsilon_1)$, $(x_0 - \varepsilon_0 \cdots x_0)$ die wir mit $\ldots j_3, j_2, j_1, j_0$ bezeichnen.

Irgend eine der Grössen $\psi_p(x, k)$ ist in Bezug auf ihre Veränderung mit x beschaffen wie folgt. Bilden wir den Differentialquotienten:

$$\frac{d\psi_p(x, k)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \alpha h_p \,.\, k^3 \varkappa_p^3(\alpha - x) e^{-k^2\varkappa^2_p(\alpha - x)}$$

so ist er positiv in sämmtlichen Intervallen $i_{p+1}, i_{p+2}, \cdots$ negativ in den Intervallen $i_{p-1}, i_{p-2}, \cdots$

Jetzt bestimmen wir eine Grösse k_p so, dass $\psi_p(x, k_p) - x h_p$ im Intervall i_p numerisch kleiner als δ_p sei, und dass in allen übrigen Intervallen $\psi_p(x, k_p)$ selbst δ_p nicht erreiche, was immer möglich ist, da für $k = \infty$ beide Grössen: $\psi_p(x, k) - x h_p$, $\psi(x, k)$, wenn x in den bezeichneten Intervallen befindlich ist, verschwinden. Um die zweite Forderung zu erfüllen, wird es genügen, wenn δ_p durch $\psi(x_p - \varepsilon_p, k_p)$ und $\psi(x_{p-1} + \varepsilon_{p-1}, k_p)$ nicht mehr erreicht wird. Wenn nun diesen Bestimmungen gemäss $k_1, k_2, \ldots$ in allen Grössen $\psi_1(x, k_1)$, $\psi_2(x, k_2), \ldots$ gewählt sind, so setzen wir:

$$\Psi_2(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \psi(x, k_p)$$

und haben in irgend einem Intervall i_r:

$$\Psi_2(x) - \Psi(x) < \delta_1 + \delta_2 + \cdots \text{ in infin.}$$

Die Grössen $\delta_1, \delta_2, \cdots$ stehen in unserem Belieben. Setzen wir $\delta_1 = \frac{1}{2}\delta$, $\delta_2 = \frac{1}{4}\delta$, $\delta_3 = \frac{1}{8}\delta, \cdots$ wo δ ein vorgeschriebenes beliebig Kleines vorstellt, so gelangen wir zu der Einsicht, d a s s e s e i n e F u n c t i o n v o n x

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \Psi(\alpha) \gamma_p e^{-\gamma^2_p(\alpha - x)^2}$$

g i e b t, d i e u n b e g r e n z t o f t n a c h x d i f f e r e n z i r b a r i s t, u n d i n d e n I n t e r v a l l e n $i_1, i_2, \ldots,$ w e l c h e s i c h b e l i e b i g n a h e a n d i e I n t e r v a l l e $(x_1 \cdots x_0), (x_2 \cdots x_1), \cdots$ a n s c h l i e s s e n, d i e F u n c t i o n Ψ b i s a u f e i n e n F e h l e r u n t e r v o r g e s c h r i e b e n e r G r e n z e δ d a r s t e l l t.

44. Stetigmachung etc. Nachweis, dass, Ψ_2 an die Stelle von Ψ gesetzt, das Fouriersche Integral gleichfalls einen divergenten Limes hat.

Die Differenz $\Psi_2(x) - \Psi(x)$ hat im Intervall i_r noch folgende Eigenschaft. Sie besteht aus den Theilen:

$$\sum_{p=1}^{p=r-1} \psi_p(x, k_p) \ , \ \psi_r(x, k_r) - \Psi(x) \ , \ \sum_{p=r+1}^{p=\infty} \psi_p(x, k_p) \ .$$

Der erste Theil hat wegen $x > \alpha$ einen negativen Differentialquotienten, der dritte einen positiven und der mittlere Theil:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_r}^{x_{r-1}} d\alpha \cdot \alpha h_r \cdot \gamma_r e^{-\gamma_r^2(\alpha - x)^2} - x h_r$$

hat im Intervall $x_r < x < x_{r-1}$ nur ein Maximum.

Dann die Grösse:

$$\int_a^b d\alpha\, \alpha e^{-\gamma^2(\alpha - x)^2} = \frac{1}{e^{\gamma^2 x}} \int_a^b d\alpha\, \alpha \frac{e^{2x\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$$

besteht aus zwei Factoren, von denen der erste von $e^{-a^2\gamma^2}$ bis $e^{-b^2\gamma^2}$ abnimmt, der zweite von $\int_a^b d\alpha\, \alpha \frac{e^{2a\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$ bis $\int_a^b d\alpha\, \alpha \frac{e^{2b\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$ zunimmt, beides in einer Weise, dass zwischen den Grenzen a, b höchstens ein Maximum oder Minimum sein kann. Dann ist aber ein Maximum vorhanden, denn der Differentialquotient:

$$2\gamma^2 \int_a^b d\alpha\, \alpha(\alpha - x) e^{-\gamma^2(\alpha - x)^2}$$

ist positiv für $x = a$, negativ für $x = b$.

Wir können also setzen:

$$\Psi_2(x) = \Psi(x) + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

wo, während x ein Intervall i_p durchläuft, eines der Δ nur zunimmt, eines uur abnimmt, und eines höchstens ein Maximum durchläuft.

Nun ersuche ich den Leser, einen Blick auf die Analyse des Art. 36 zu werfen. Wenn wir das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi_2(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$$

wie dort das Integral $\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$ zerlegen in die Theile:

$$\int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^{a}$$

so lässt sich von den beiden äusseren zunächst ganz ähnlich wie dort zeigen, dass sie für $p = \infty$ verschwinden.

Denn z. B. das Integral

$$\int_{x_q}^{x_{q-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin (\alpha h_q + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \sin \alpha h_p$$

kann mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes, und indem man bedenkt, dass die Grössen $\sin \Delta_p$, $\cos \Delta_p$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich oft vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergehen können, in eine endliche Anzahl Theile der Form

$$\pm \frac{\lambda}{\varkappa} \Bigg|_{\varkappa}^{\varkappa_1} \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q}$$

zerlegt werden, wo λ endlich ist und $\varkappa$ und $\varkappa_1$ dem Intervall angehören, welches die Grenzen des Integrals einschliessen.

Was das mittlere Integral betrifft, so hat man:

$$2\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \sin(\alpha h_p + \Sigma\Delta) \sin \alpha h_p = \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha}(1 - \cos 2h_p\alpha) \cos \Sigma\Delta + \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin 2h_p\alpha \cdot \sin \Sigma\Delta$$

Der Theil

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \cos \Sigma\Delta$$

wird, da $\cos \Sigma\Delta$ von 1 beliebig wenig verschieden gemacht werden kann, mit p unendlich. Der Rest wird, wie abermals mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes leicht zu zeigen, Null für $p = \infty$.

Es ist also im Ganzen nachgewiesen, dass der $\text{Limes}_{h=\infty}$ des Inlegrals:

$$\int_0^a d\alpha \left[\varrho(\alpha) \sin \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\beta \Psi(\beta) \gamma_p e^{-\gamma^2_p (\beta-\alpha)^2} \right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

divergent ist, falls $\varrho(\alpha)$ eine ähnlich wie im Art. 37 zu bestimmende mit α verschwindende Function vorstellt. Es ist dann die Function

$$f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\beta\, \Psi(\beta)\, \gamma_p\, e^{-\gamma^2_p (\beta-\alpha)^2}$$

im Gebiete $o < \alpha \leqq a$ sammt ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig.

Schlussbetrachtungen.

Die vorstehende Abhandlung zerfällt wesentlich in drei Abtheilungen, von denen die erste u. A. in einer bestimmten Richtung den durch die bisherigen Untersuchungen gestatteten Spielraum für die Darstellbarkeit der Functionen durch Fouriersche Reihen und Integrale erweitert, die dritte Abtheilung dagegen die bisher gewöhnlich vermuthete Ausdehnung jenes Spielraums beschränkt, indem die Bedingungen entwickelt werden, unter denen eine Function in einem Puncte nicht darstellbar ist. Beide Untersuchungen, die der ersten und die der letzten Abtheilung, geben Veranlassung zu gewissen ergänzenden Betrachtungen, mit denen wir die Abhandlung schliessen wollen.

I.

Soweit der erste Theil der Untersuchung sich mit der Erweiterung der Bedingung für die Darstellbarkeit beschäftigt, kann sein Ergebniss so ausgedrückt werden:

Wenn eine Function f(x) in den in Betracht kommenden Intervallen integrirbar ist und ausserdem in einer beliebig kleinen einen Punct $x = x_1$ umgebenden Strecke sich auf die Form

$$f(x_1) = f(x_1) + \varrho(x - x_1) \cdot \cos \psi(x - x_1)$$

bringen lässt, in der $\varrho(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ mit x, ohne unendlich viele Maxima zu durchlaufen, verschwinden, so ist $f(x_1)$ durch eine Fouriersche Reihe oder ein Fouriersches Integral darstellbar.

Dieser Satz ist offenbar nur ein erster Schritt in einem für die Darstellbarkeit neu zu erwerbenden Gebiete. Ich werde dies sogleich näher ausführen. Bilden wir die Reihe

$$\varrho_1(x) \cos \psi_1(x) + \varrho_2(x) \cos \psi_2(x) + \ldots,$$

nehmen an, dass die ϱ_p sich in die Form $\mu_p \varrho'_p(x)$ bringen lassen, wo $\Sigma \mu_p$ eine unbedingt convergente Zahlenreihe vorstellt, dass die Grössen ψ_p ohne Maxima für $x = o$ unendlich werden, und in der Strecke $o \leqq x \leqq a$ zwischen zwei ebenso unendlich werdenden Functionen $\psi_u(x), \psi_o(x)$ eingeschlossen sind: so wird es, wie aus dem erwähnten ersten Theile dieser Abhandlung ohne Weiteres folgt, stets so grosse Werthe von h geben, dass das Integral

$$\int_o^a d\alpha \varrho'_p(\alpha) \cos \psi_p(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

für jeden Werth von p unter eine beliebig kleine endliche Grenze sinkt, und dann muss auch

$$\lim_{h=\infty} \int_o^a d\alpha \left(\sum_{p=1}^{p=\infty} \varrho_p(\alpha) \cos \psi_p(\alpha) \right) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = o$$

sein. Dies ist die naheliegendste Verallgemeinerung der im obigen Satze gestellten Bedingung. Es schliesst sich daran eine doppelte Aufgabe.

Einmal kann gefragt werden: Giebt es nicht allgemeinere Bedingungen für die Function $\psi_p(\alpha)$, wie die eben angeführte? Mit anderen Worten: unter welchen Umständen wird

$$\lim \int_o^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = o$$

sein, wenn $f(\alpha)$ die Form $\sum_{p=1}^{p=\infty} \varrho_p(\alpha) \cos \psi(p, \alpha)$ hat, und jedes Paar $\varrho_p(\alpha), \psi(p, \alpha)$ den bisher bei $\varrho(\alpha), \psi(\alpha)$ vorausgesetzten Gang hat? Die

andere Frage ist: Durch welche Functionen kann der Cosinus ersetzt werden?

Mit der zweiten Frage, die übrigens schliesslich auf die erste zurückführt, habe ich mich beschäftigt, und will darüber Einiges mittheilen.

Wir nehmen statt des Cosinus eine Function:

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \mu_p \cos px$$

an, unter μ_p das Glied einer unbedingt convergenten Zahlenreihe verstanden. Bilden wir jetzt die Reihe:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \varrho(\alpha) \cos(p\psi(\alpha)) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

so ist sie, weil $\varrho(\alpha) \cos p\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $\alpha = o$ endlich bleibt, von o an integrirbar und man hat:

$$\int_o^a d\alpha \varrho(\alpha) \varphi[\psi(\alpha)] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \sum_1^\infty \mu_p \int_o^a d\alpha \varrho(\alpha) \cos(p\psi(\alpha)) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}.$$

Schreiben wir die rechte Seite

$$\sum_1^\infty \mu_p \lambda_p(h),$$

so fragt es sich, ob:

$$\lim_{h=\infty} \sum_1^\infty \mu_p \lambda_p(\alpha) = \sum_1^\infty \mu_p \lim_{h=\infty} \lambda(h) = o$$

ist. Dies wird der Fall sein, wenn die Reihe $\Sigma \mu_p \lambda_p(h)$ nicht nur für $h < \infty$, sondern auch für $h = \infty$ vollständig convergent ist (was Andere gleichmässig convergent nennen). Und dies wird wiederum stattfinden, wenn $\lambda_p(h)$, wie auch p und h gleichzeitig oder nacheinander unendlich werden, endliche Grenzen nicht übersteigt.

Das successive Unendlichwerden von p und h ist rasch erledigt. Denkt man sich in:

$$\lambda_p(h) = \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha) \cos p\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

h endlich und p unendlich werdend, so verschwindet dies Integral nach dem ersten Hauptsatz, da man einen beliebig kleinen Null enthaltenden Theil des Integrals abschneiden kann, und im Reste für $\psi(\alpha)$ eine neue Veränderliche eingeführt werden darf, ohne dass die Grenzen unendlich werden. Bleibt p endlich und wird h unendlich, so verschwindet das Integral, ebenfalls wegen des ersten Theils der Abhandlung.

Complicirter ist die Untersuchung des Falles, wo gleichzeitig p und h unendlich wird, die in die Theile

$$p \lesseqgtr h$$

zerfällt. Am Leichtesten wird man mit dem Fall $p \gtrsim h$ fertig, weil alsdann die Gleichung $\psi'(\alpha_1) + \frac{h}{p} = o$ (Art. 1) für hinreichend grosse Werthe von p keine Wurzel zwischen o und a hat. Im Falle $p < h$, liegt dort eine Wurzel, und man muss alsdann, ähnlich wie bei der Untersuchung des

$$\lim \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

mehrere Zerlegungen anwenden und die infinitäre Auflösung gewisser Gleichungen benützen. Im Ganzen nimmt die Untersuchung des Integrals mit cos $p\psi(\alpha)$ nicht weniger Raum ein, als die mit cos $\psi(\alpha)$ allein.

Man kann aber noch weiter gehen, indem man für die Function $\varphi(x)$ nicht die Form $\Sigma \mu_p \cos px$ voraussetzt, wonach $\varphi(x)$ stetig ist, sondern annimmt, dass $\varphi(x)$ eine durch eine Sinuscosinus-Reihe dargestellte Function ist, welche beliebig viele Unstetigkeiten besitzt, die nur nicht in jedem kleinsten Intervall vorkommen dürfen. Wenigstens finde ich diese Angabe, allerdings ohne nähere Begründung, in meinen Notizen aus einer Zeit, wo ich eine Uebung und Sicherheit in dergleichen

Untersuchungen besass, welche man leider nur durch steten Gebrauch dieser Eigenschaften sich erhalten kann. Das zu untersuchende Integral ist in diesem allgemeinen Falle ein Anderes, und man erhält es durch Summation der Sinus-cosinus-Reihe.

Mit der so als darstellbar nachgewiesenen oder nachzuweisenden Funktion $\varrho(\alpha)\,\varphi(\psi(\alpha))$ kann man alsdann wieder andere Functionen

$$\Sigma\,\varrho_p(\alpha)\,\varphi_p(\psi_p)$$

zusammensetzen, und ich glaube, dass wir hiermit, wenigstens in allgemeinen Zügen, die Ergebnisse hinsichtlich der Darstellbarkeit der Functionen durch Fouriersche Darstellungsformeln, welche auf dem eingeschlagenen Wege zu erreichen sind oder sein mögen, erschöpft haben.

II.

Das Hauptergebniss des dritten Theils dieser Abhandlung ist die Bemerkung, dass das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

für $h = \infty$ einen divergenten Limes haben kann, auch wenn $f(x)$ für $x \geqq o$ stetig ist. Geben wir diesem Ergebniss die Form, dass

$$\lim_{h=\infty} \int_{-a}^{+b} d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x}$$

auch im Falle $f(x)$ im Intervall $-a \cdots +b$ stetig ist, für $x = o$, statt $\pi f(o)$ zu geben, ein zwischen unendlichen Grenzen unbestimmtes Resultat liefern kann, so können wir diesen Satz unmittelbar auf die Fourierschen Darstellungsformeln beziehen.

Es könnte hier ein Einwand versucht werden, der allerdings aus einer etwas zurückgebliebenen Auffassung des Functionsbegriffs entspränge, dem ich aber doch sogleich zu begegnen für rathsam halte. Man könnte

nämlich einwerfen, dass die Nichtdarstellbarkeit von $f(x) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ für $\alpha = o$ ganz und gar nichts Neues an sich habe, da ja die Function $\Psi(\alpha)$ im Puncte $\alpha = o$ unendlich sei, und somit der Sinus seinen Sinn verliere. Läge z. B. die Function $x \sin \frac{1}{x}$ vor, so sei für $x = o$ der $\sin \frac{1}{x}$ ein Zeichen ohne Bedeutung, wie ja mit dem Zeichen $\frac{1}{o}$, wenn unter Null die Abwesenheit jeglicher Grösse verstanden wird, auch kein Sinn verbunden werden könne.

Indessen, wie angedeutet, ist auf Grund des richtigen Functionsbegriffs dies Bedenken leicht zu beseitigen.

Ich will darauf kein Gewicht legen, dass man analytisch den Sinus, der doch durch Umkehrung eines algebraischen Integrals erhalten wird, auch so definiren kann, dass $x \sin \frac{1}{x}$ für $x = o$ Null ist; denn in unserer Function $\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ ist $\Psi(\alpha)$ eben keine hinreichend einfache Function, um daran ähnliche Operationen durchführen zu können.

Nun, wenn ich überhaupt von einer Function spreche, bin ich alsdann an einen analytischen Ausdruck gebunden, oder ist sie nicht vielmehr gegeben, wenn ich festgesetzt habe, welchen Werth sie für jeden numerischen Werth ihres Arguments vorstellen soll? Jetzt bestimme ich eine Function f(x) durch die Bedingungen:

1. $f(o) = o$

2. Für $x \gtrless o$ sei $f(x) = \varrho(x) \sin \Psi(x)$ im Sinne des Art. 35. Diese Function ist für ein den Punct $x = o$ enthaltendes Intervall stetig, für ein ähnliches Intervall unter Ausschluss des Punctes $x = o$ sogar mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig, und gleichwohl für $x = o$ nicht darstellbar.

Man kann übrigens aus der Function $\varrho(x) \sin \Psi(x)$ noch andere nicht darstellbare Functionen erhalten, deren Entwickelung nach Fourierschen Reihen oder deren Ausdruck durch ein Fouriersches Integral in jedem kleinsten Intervall unendlich wird. Denn bilden wir die Function

$$f(\sin px) = \varrho(\sin px) \cos \Psi(\sin px)$$

mit der Bestimmung $f(o) = o$, so ist diese Function für jedes x stetig. Gleiches gilt von dieser:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \varrho(\sin px) \cos \Psi(\sin px) .$$

Setzt man endlich:

$$H(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-A}^{+B} d\alpha\, F(\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x} ,$$

so hat diese Function in jedem kleinsten Intervall einen Punct, in dem sie unendlich ist, oder genauer, die μ_p können stets so bestimmt werden, dass dies der Fall ist. Es bedarf das aber des Beweises, da wir zwar die Reihe $F(\alpha)$ gliedweise integriren können, aber den Grenzübergang $h = \infty$ nicht ohne Weiteres gliedweise ausführen dürfen. Nehmen wir eine bestimmte Reihe $\Sigma \mu_p$ an, und setzen der Kürze halber:

$$\lambda_p(h) = \int_{-A}^{+B} d\alpha\, \varrho(\sin p\alpha) \cos \Psi(\sin p\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x} ,$$

ferner

$$H(x) = \sum_1^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) = H_m + R_m$$

wo

$$H_m = \sum_1^{m} , \quad R_m = \sum_{m+1}^{\infty} ,$$

so wird die Function H_m in einer Reihe von Puncten mit h unendlich. Sollte nun zufällig die Function R_m in denselben Puncten gerade so unendlich werden, dass das Unendlichwerden von H_m dadurch aufgehoben würde, so könnte dies nicht mehr der Fall sein, wenn anstatt R_m gesetzt wurde

$$R'_m = a \sum_{m+1}^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) ,$$

weil die unendlich werdenden Werthe mit der beliebigen Zahl a multiplicirt sind.

Setzt man jetzt:

$$F(x) = \sum_{1}^{m_1} + \sum_{m_1+1}^{m_2} + \sum_{m_2+1}^{m_3} + \cdots \text{ in infin.},$$

so wird $a_1 \left\{ \sum_{m_1+1}^{m_2} + \text{etc} \right\}$ das Unendlichwerden von $\sum_{1}^{m_1}$ nicht aufheben.

Weiter wird $a_2 a_1 \left\{ \sum_{m_2+1}^{m_3} + \cdots \right\}$ das von $\sum_{1}^{m_1} + a_1 \sum_{m_1+1}^{m_2}$ nicht aufheben, u. s. f.

Es wird also

$$F(x) = \sum_{1}^{m_1} + a_1 \sum_{m_1+1}^{m_2} + a_1 a_2 \sum_{m_2+1}^{m_3} + \cdots$$

in jedem kleinsten Intervall unendlich werden. Q. E. D.

Einige Druckfehler.

Seite

2. In der Ueberschrift von III muss es heissen: $\frac{f(\alpha + \varphi(\alpha))}{f(\alpha)}$.

16. Zweite Zeile muss es heissen: nur wachsen oder nur abnehmen.

19. Vierzehnte Zeile muss es heissen: durch Subtraction.

21. Erste Zeile Art. 9 muss es heissen: Damit ist denn . . . .

29. In der ersten Hälfte der Seite muss es heissen: $\delta = \pm \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \cdot u$.

42. Erste Zeile muss a statt α stehen.

48. Dreizehnte Zeile muss es heissen: schreiben wir.

52. Sechszehnte und siebenzehnte Zeile: $\psi(\alpha) \lesssim 1\frac{1}{\alpha}$ oder $> 1\frac{1}{\alpha}$ ist.

83. Dritte und fünfte Zeile fehlt am Schluss: $\}$ und $+ \cdots \}$

Ueber die Bewegung

des

Firnes und der Gletscher.

Von

Dr. Fr. Pfaff.

Mit 8 Holzschnitten und einer Steindrucktafel.

Ueber die Bewegung

des

Firnes und der Gletscher.

Von

Dr. Fr. Pfaff.

Als die Gletscher die Aufmerksamkeit der Naturforscher auf sich zogen, wurde auch sofort die, wenn auch für kurze Beobachtung unmerkliche, doch aus ihren Wirkungen sehr auffallend hervortretende Fortbewegung derselben als das Wichtigste dieser wunderbaren Naturerscheinung erkannt. Wie so oft in naturwissenschaftlichen Fragen finden wir auch hier die Theorie der Beobachtung weit vorauseilen, und ehe noch irgend welche Messungen der Bewegung angestellt wurden, finden wir schon 2 Theorieen über die Ursachen derselben aufgestellt, welche bis auf unsere Zeiten ihre Vertreter gefunden haben und später als Gleitungstheorie und Dilatationstheorie bezeichnet wurden. Letztere wurde zuerst von Scheuchzer in seinen Itinera alpina 1723 entwickelt, erstere von Altmann 1751 und von Gruner 1760 zuerst ausgesprochen. Saussure und Charpentier vertraten die Gleitungstheorie, Agassiz die Dilatationstheorie. Erst mit dem 4ten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts begann die zur Begründung einer Theorie unerlässliche genauere Beobachtung und wurde mit bewunderungswürdiger Energie und Ausdauer mehr als 20 Jahre hindurch von verschiedenen Beobachtern, unter denen vor Allen Agassiz die ausgedehntesten Beobachtungsreihen auf dem Aargletscher anstellte, fortgesetzt. Neben ihm haben Forbes,

die Gebrüder v. Schlagintweit, Tyndall ebenfalls sehr eingehende Untersuchungen über die Gletscherbewegung vorgenommen. Durch dieselben haben sich zunächst ganz bestimmte Gesetze für die Bewegung herausgestellt, nemlich

1) dass ähnlich der Bewegung des Wassers in einem Strome die Geschwindigkeit in der Mitte und an der Oberfläche grösser sei, als am Rande und in der Tiefe;

2) dass sie im Sommer viel rascher erfolge, als im Winter, und

3) sehr ungleich sei an verschiedenen Stellen.

Die Art und Weise der Beobachtung, wie sie zur Ermittlung dieser Gesetze allein angewendet wurde und von einem Einzelnen auch nur angewendet werden kann, nemlich mit Hülfe eines Theodolithen die Fortbewegung einer Reihe von Pfählen zu bestimmen, die ursprünglich in einer geraden Linie quer über den Gletscher aufgestellt wurden, liess die Frage unentschieden, ob die Bewegung ununterbrochen vor sich gehe, oder ruckweise, ebenso, ob nicht auch zuweilen in vertikaler Richtung eine Bewegung der Oberfläche stattfinde. Das erstere zu bestimmen, war mir 1873 durch Beobachtungen am Aletschgletscher möglich,[1]) aus denen hervorging, dass die Bewegung ununterbrochen, wenn auch ungleichmässig vor sich gehe. Ob auch eine Bewegung in vertikaler Richtung erfolge, darüber liegen für den Gletscherstamm noch keine Beobachtungsreihen vor.

Schon die Thatsache, dass sich der Gletscher auch im Winter vorwärts bewege, lässt die Dilatationstheorie, nach welcher es in den Haarspalten des Gletschers gefrierendes Schmelzwasser ist, welches den Eisstrom vorwärts schiebt, als höchst unwahrscheinlich erscheinen; auch die Beobachtung, dass die Bewegung ununterbrochen vor sich gehe, ist kaum mit derselben zu vereinigen. Aber auch die Gleitungstheorie, nach welcher sich der Gletscher allein durch die Schwere vorwärts bewegt, fand noch viele Bedenken, und es muss als ein sehr bedeutender Fortschritt auf dem Gebiete der Gletscherkunde bezeichnet werden, dass Forbes mit aller Energie die Plasticität oder, wie er es nannte, Viscosität des Eises als wesentlich bei der Fortbewegung mitwirkend hin-

1) Sitzungsberichte der phys. med. Societät zu Erlangen, 1874.

stellte. Und in der That drängt sich Jedem, der die Gletscher in der Natur beobachtet, dieser Gedanke so überwältigend auf, dass schon 1773 Bordier aus Genf bei Besprechung des Gletscherphänomens annahm, dass das Eis „nicht für eine vollkommen starre und unbewegliche Masse, sondern für einen Haufen erstarrten Stoffes, ähnlich wie erweichtes Wachs, das bis zu einem gewissen Grade biegsam und dehnbar sei, anzusehen sei".

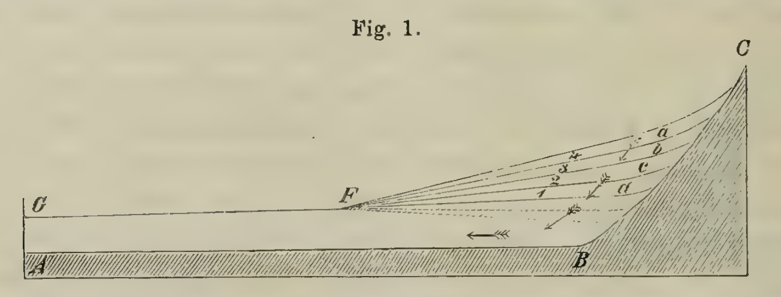
Die Gebrüder v. Schlagintweit, Tyndall und v. Helmholtz zeigten später auch, dass bei sehr starkem Drucke Eisstückchen zu einem klaren Eiscylinder verwandelt werden können in Folge der merkwürdigen von Faraday entdeckten s. g. Regelation des Eises, und ebenso in beliebige Formen gepresst werden können.

Dennoch fand auch jetzt noch diese Gleitungstheorie noch manche Gegner, und in der That war auch von 2 Seiten her ein Angriff auf sie sehr leicht. Einmal machte man darauf aufmerksam, dass Gletscher auf sehr wenig geneigter Unterlage sich fortbewegten und dass ein Druck, eine vis a tergo in dem Grade nicht nachzuweisen sei, um eine so ungeheuere Eismasse von der Länge mehrerer Meilen und von einer Dicke von mindestens 1000 Fuss an vielen Stellen, zum Gleiten zu bringen. Dann waren auch die Beobachtungen selbst noch insoferne unvollkommen, als sie sich nur auf den Gletscherstamm und nicht auf die ungleich ausgedehnteren Firnmassen erstreckten. Das brachte es natürlich auch mit sich, dass eine scharf und bestimmt formulirte Erklärung der Gletscherbewegung nicht gegeben werden konnte. „Der Gletscher ist eine unvollkommene Flüssigkeit oder ein zäher Körper, welcher in Abhänge von gewisser Neigung hinuntergedrängt wird durch den natürlichen Druck seiner Theile". Ueber diese allgemeine, von Forbes mit diesen Worten gegebene Erklärung kam man nicht hinaus.

Während nun die ersteren Bedenken gegen diese Theorie durch nähere und genauere Bestimmung der Plasticität des Eises gehoben werden konnten, bedurfte es, um die Mangelhaftigkeit der Theorie und unserer Kenntnisse nach der zweiten Seite zu ergänzen, einer Untersuchung des Verhaltens des Firns an einem grösseren Gletscher. Sie erschien um so nöthiger, als nicht nur die Art und Weise der Bewegung des Gletscherstammes, sondern auch die Structurverhältnisse desselben,

die ebenfalls zu so viel Discussionen Veranlassung gaben, wesentlich von dem Verhalten des Firnes beeinflusst werden müssen und a priori das Verhalten des Firns nicht erschlossen werden kann. Das Auftreten von Blöcken, die hoch oben auf den Firn fielen, am Ende des Gletschers zeigt uns nur, *dass* sich auch die Firnmassen nach abwärts bewegen, aber durchaus nicht, wie dieselben vorwärts rücken. Offenbar sind hier 2 Möglichkeiten denkbar, nemlich einmal, dass die *oberflächlichen* Schichten des Firnes einfach thalabwärts rutschen und sich dabei allmählich in Eis verwandeln, oder dass die oberflächlichen Schichten allmählich in die Tiefe sinken, *unter* der Oberfläche sich in Eis umwandeln und durch den Druck der jedes Jahr neu auffallenden oberflächlichen Schichten, sowie durch die Schwere auf dem geneigten Grunde hervorquellen und als Gletschereis unterhalb der Firnlinie erscheinen. Nach der letzteren Ansicht würden wir folgendes Bild erhalten:

Fig. 1.



Es stelle $A\ B\ C$ (Fig. 1) einen Längsschnitt durch einen Gletscher dar, in dem von G—F der Gletscherstamm, von F—C der Firn sich ausbreite. Es sei bei F die Firnlinie, d. h. die Linie, unterhalb welcher nur Eis, oberhalb welcher nur Firn angetroffen wird, so giebt uns F den Punkt an, an welchem die jährlich auffallenden Schneemassen sich am Ende des Sommers auskeilen. Auf dem Durchschnitte, den wir uns am Ende des Sommers gemacht denken, werden daher die einzelnen Schichten alle einen keilförmigen Durchschnitt erkennen lassen. Offenbar werden aber die tieferen von den höheren gedrückt, und um so stärker, je dicker die Ueberlagerung wird. Durch diesen Druck werden sie nicht nur verdichtet und in Eis umgewandelt, sondern gezwungen, nach der einzigen freien Stelle thalabwärts nach A zu auszuweichen. So wird die Firnschichte a nach und nach in die Lage b c gelangen und die Firn-

massen werden den durch die Pfeile angedeuteten Weg nach abwärts und vorwärts einschlagen.

Die erörterten Verhältnisse liessen es im höchsten Grade wünschenswerth erscheinen, wenigstens eine Versuchsreihe im Firne selbst anzustellen, um zu sehen, wie sich die Bewegung desselben verhalte. Man musste im Voraus darauf gefasst sein, dass nur eine geringe Bewegung stattfinden würde, da die Firnmassen oberflächlich eine viel grössere Ausdehnung besitzen, als der Eisstrom des Gletschers, zu dem sie sich verhalten, wie ein Quellsee zu dem daraus hervorgehenden Flusse, und da die Bewegung des Gletschers selbst bekanntlich nur eine sehr geringe ist. Dennoch durfte man erwarten, dass diese Bewegung in einem Tage schon wohl messbar werden könnte, wenn man nur grössere Instrumente anwendete, die auch geringere Verrückungen sicher zu constatiren erlaubten.

Zu den Beobachtungen wählte ich wieder den Aletschgletscher, nicht nur wegen früherer Bekanntschaft mit demselben, sondern auch, weil er der grösste ist, in gewisser Beziehung auch als einer der regelmässigsten bezeichnet werden kann und auch die Ausrüstung zu einem mehrtägigen Aufenthalte im Firn von dem nahe seinem Ufer im Mittellauf stehenden Jungfrau-Hotêl verhältnissmässig leicht erhalten werden kann. Die Munificenz Sr. Majestät des Königs Ludwig II. bot die Mittel, Alles so vorzubereiten, wie es nur für die Lösung der gestellten Aufgabe nöthig erschien. Geht man einmal daran, sich an die Untersuchung des Firnes zu machen, so bieten sich eine so grosse Menge von Fragen dar, dass ein Einzelner nicht daran denken kann, sie alle auch nur oberflächlich beantworten zu wollen, und auch künftige Forscher auf diesem noch fast ganz unangebauten Felde werden nicht umhin können, sich auf die Lösung einiger derselben zu beschränken. Ich hatte mir vorgenommen, durch die Beobachtung auf folgende Fragen Antwort zu erhalten:

I. Wie verhält sich die Bewegung des Firnes, und zwar in dreierlei Beziehung, nemlich findet

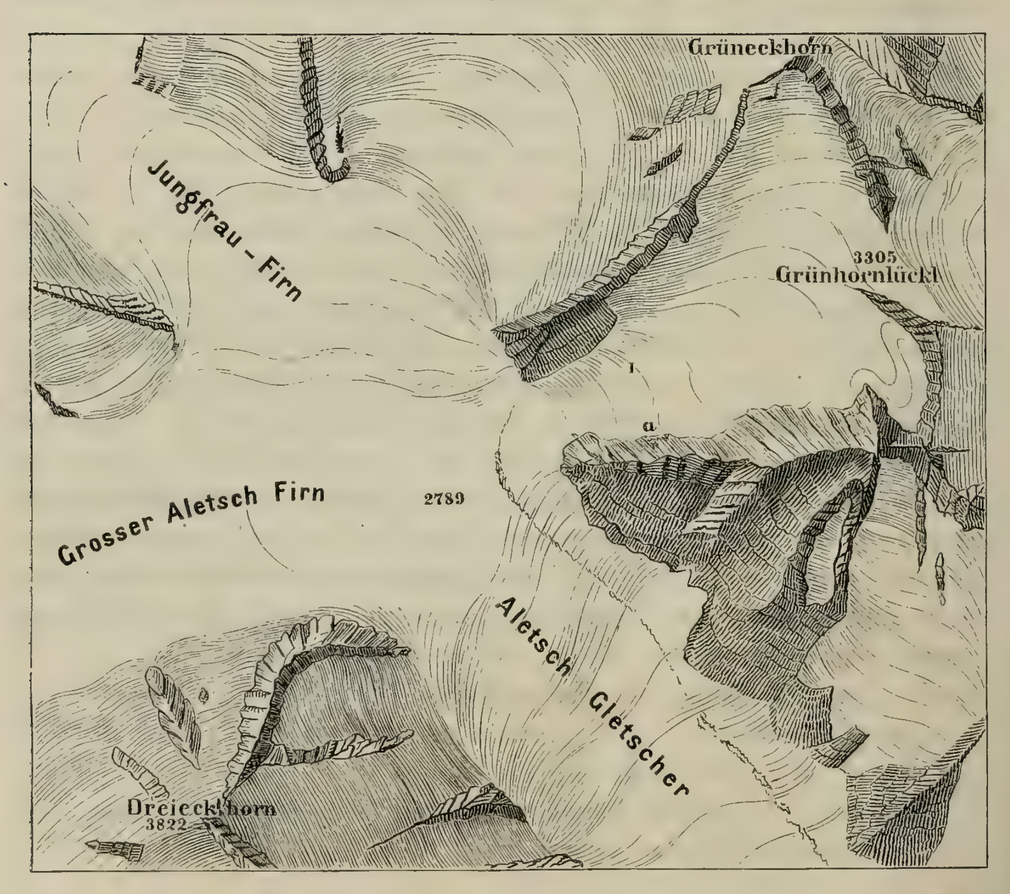
a) eine Bewegung in horizontaler,
b) in vertikaler,
c) in seitlicher Richtung, und
d) eine Ungleichheit derselben an verschiedenen Stellen eines und desselben Querschnittes statt?

II. Findet in der That ein Uebergang von Firn in festes Eis durch den Druck der überlagernden Schichten nach der Tiefe zu statt?

I.

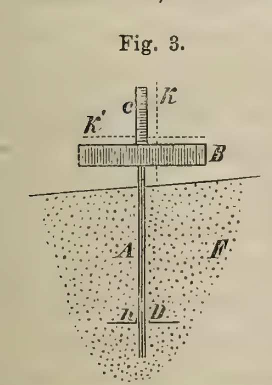
Die Beobachtungen zur Ermittlung dieser Fragen wurden nun in folgender Weise angestellt. Als Object der Beobachtung wurde der von der Grünhornlücke herabsteigende Firnstrom des Aletsch gewählt, da sich an dem südlichen Rande desselben das Ufer sehr passend zur Aufstellung der Instrumente und eines Zeltes zeigte, zwei Erfordernisse, welche sich in der Firnregion weniger oft an einer Stelle vereinigt finden, als man vielleicht glaubt. Die Verhältnisse dieser Firnmasse

Fig. 2.



giebt die Figur 2, die im Maassstabe von 1 : 50,000 entworfen ist. Die grösste Breite beträgt 2500 Meter, ihre grösste Länge bis zum Concordienplatz, wie die Stelle genannt wird, an welcher die verschiedenen Firnströme des Aletsch zusammenkommen, 2700 Meter. Der Flächeninhalt dieser Firnabtheilung beträgt nach meinen Messungen auf der Dufour'schen Karte 3,3 Millionen Q.-Meter. Die Breite des Armes betrug hier 850 Meter, die Neigung der Oberfläche 10 Grade. Der Querschnitt bildete eine flache Wölbung ähnlich der einer Chaussee, doch etwas stärker gekrümmt. Auf einem solchen Querschnitte wurden nun 2 in Centimeter getheilte Scalen aufgestellt, die erste (I Fig. 2) 275 Meter, die zweite auf dem höchsten Puncte des Querschnittes 290 Meter von der ersten, also 560 Meter vom Ufer entfernt. Die Scalen waren doppelt in der Art, wie es Fig. 3 veranschaulicht, welche zugleich die Befestigung derselben erkennen lässt. An einer 1,2 Meter langen Blechröhre *A* war eine breitere Skala, *B*, mit senkrechten Strichen, und eine schmälere, *C*, mit horizontalen befestigt. Die Röhre ging bei *D* durch eine mit einer Hülse versehenen Platte von Weissblech, die durch einen Holzstift *h*, der durch die Mitte der Röhre und die Hülse hindurchging, an die letztere befestigt war.[1] Die Aufstellung wurde in der Art vorgenommen, dass ein Loch in den Firn *F* gegraben wurde, in welches die Röhre mit der Platte senkrecht gestellt wurde. Dann wurde das Loch wieder fest mit Firn ausgefüllt.

Fig. 3.



Zur Beobachtung der beiden Scalen und zur Bestimmung ihrer Bewegung sowohl in horizontaler, wie in vertikaler Richtung mussten 2 vollkommen unverrückt bleibende Fernrohre angewendet werden. Ich hatte zu diesem Zwecke dieselben, bei *a* Fig. 2, auf einem und demselben Stative, einem starken Dreifusse, in der Art befestigt, dass sie sowohl horizontal wie vertikal sich leicht drehen und feststellen liessen und ähnlich einem Theodolithen nach der Klemmung durch eine Mikro-

1) Es geschah dies deswegen, um die Platten nach Beendigung des Versuches im Firn lassen und doch die Scalen herausnehmen zu können. Bei starkem Ziehen brach der dünne Holzstift und die Röhre konnte ohne diese herausgezogen werden.

meterschraube noch etwas bewegt werden konnten. Die horizontale Stellung der horizontalen Drehachse wurde durch eine Libelle controlirt. Dadurch war es möglich, die Fäden im Kreuze genau auf einen beliebigen Theilstrich einzustellen, im Anfange beiläufig der durch die punktirten Linien *k k'* entsprechenden Stellung. Das eine Fernrohr, ein Fraunhofer'sches, hatte ein 3zölliges Objectiv, das andere, für die nähere Scala verwendetes, war ein Steinheil'sches mit einem 2zölligen Objectiv. Mit beiden konnte noch ein halber Centimeter sehr scharf unterschieden werden. Um sich von dem unverrückten Stande der Fernrohre zu überzeugen, war auf dem grossen noch ein kleines angebracht, welches um eine auf dem Fernrohre befestigte senkrechte Achse gedreht und leicht festgeklemmt werden konnte. Mit diesem kleinen Fernrohre wurde nun vor dem Beginne der Beobachtungen ein ausgezeichneter Punkt der gegenüberliegenden Bergwand aufgesucht und hierauf das Fernröhrchen festgeklemmt. Dieser Punkt, sowie die Umgebung desselben, die Lage der Spalten in den Felsen, wurde dann genau abgezeichnet[2]) und vor jeder Beobachtung der Scalen zunächst die Stellung des Fernrohres durch das kleine controlirt, indem auch eine kleine Verrückung des grossen Fernrohrs bei der bedeutenden Entfernung des gewählten Punktes am jenseitigen Ufer ein sehr starkes Heraustreten des markirten Punktes aus dem Fadenkreuze des kleinen Fernrohres erzeugt haben würde.

Abends um 6½ Uhr konnte die erste Aufzeichnung des Standes der Scalen gemacht werden. Sie wurden von da mit Ausnahme der Nachtstunden stündlich oder alle 2 Stunden aufgeschrieben und ergaben folgende Verrückungen in den nebenbezeichneten Stunden. Ein — bedeutet in der Reihe der die horizontale Bewegung anzeigenden Zahlen, dass die Bewegung rückwärts, also dem Ursprunge des Gletschers zugekehrt erfolgt war, in der Reihe der die vertikale Verschiebung anzeigenden, dass sie nach oben erfolgte, also ein Aufsteigen der Scala stattfand. Unter I h stehen die Zahlen für die horizontale, unter V die für die vertikale Bewegung der auf der Mitte des Firnstromes errichteten

---

1) Namentlich wenn man nicht stündliche Beobachtungen macht, dürfte das genaue Aufzeichnen sehr zu empfehlen sein, da mit dem wechselnden Stande der Sonne das Bild eines solchen Punktes sich so verändern kann, dass ohne Hülfe einer solchen Zeichnung derselbe dann schwer noch als derselbe zu erkennen ist.

Scala, unter II dieselben Grössen der dem Ufer näheren und zwar in Centimetern.

Leider wurde das Wetter schon am Nachmittage des dritten Tages so rauh, zugleich machten Hagel, Schneegestöber und heftige Winde jede Beobachtung unmöglich, so dass ich, da auch am 4ten kein Zeichen der Besserung des Wetters eintrat, den Rückzug antreten musste. Die Versuche über Verdunstung und Ablation wurden dadurch auch in ihren Resultaten unsicher, weswegen ich sie übergehe.

Stunde.	I			II	
	h.	v.		h.	v.
6^h 30	0	0		0	0
8^h	12	0,25		8	2
2ter Tag					
5^h	28	0,75		4	4
7^h	12	0,5		4	0
9^h	4	—2		0,5	—1,5
10^h	4	—8		2	—2
11^h	2	6		—4	0
1^h	0,25	7		—2	1,5
3^h	—10	17		1	3,5
4^h	6	1		1	0,5
5^h	1	1		1	0,25
6^h	—3	1		0	1
7^h	4	2		1	0,5
8^h	—6	2,5		—2	1,0
3ter Tag					
5^h	15	34		20	14
6^h	3	—2,5		1	2
7^h	6	—2,5		2	3
8^h	6	—0,5		2,5	1
9^h	6	—3		1	1
10^h	0	8		—1	0,5
11^h	8	2		0,5	2
12^h	6	8		1	—2
1^h	0	4		0	0,5
2^h	0	6		0	3
	104,25	82,5		41,5	35,75

Die beiliegende Tafel I giebt in graphischer Darstellung diese Bewegung, zu der wir folgende Bemerkungen zu machen haben. Es ergiebt sich daraus:

1) Dass in der That am Firne eine sehr energische vertikale Bewegung neben der horizontalen sich bemerklich macht;

2) dass auch für den Firn das Gesetz gilt, nach welchem sich die dem Ufer näheren Punkte langsamer vorwärts bewegen, als die in der Mitte, und zwar sowohl für die horizontale, wie für die vertikale Bewegung;

3) der Gang der Bewegung, so verschieden er auch nach den einzelnen Beobachtungen erscheint, zeigt doch ziemlich viele Aehnlichkeiten, namentlich das Verhältniss der vertikalen zur horizontalen Bewegung ist in beiden Fällen nahezu gleich; mit Vernachlässigung der Bruchtheile wäre es gleich, wenn die Summe in II h 44 wäre, statt 41;

4) es ergiebt sich ferner daraus, wie ungenügend zur Bestimmung der eigenthümlichen Bewegungserscheinungen des Firnes eine Beobachtung, die nur zweimal oder gar nur einmal in 24 Stunden gemacht wird, sein würde. Selbst eine von 6 zu 6 Stunden aufgezeichnete Beobachtung würde uns ein ganz anderes Bild geben. Würde man z. B. am 2. Tage um 5 Uhr Früh und um 3 Uhr Nachmittags beobachtet haben, so würde man die Scala sehr langsam um 2 cm. vorwärts und ebensoviel abwärts gerückt angenommen haben, während sie in Wirklichkeit eine, wie die Figur zeigt, höchst complicirte Bewegung ausführte. Wir können daher die scheinbar so einfache Bewegung bei Nacht auch nicht sicher als geradeso erfolgt annehmen, wie es die punktirte Linie angiebt, sondern nur das Gesammtresultat derselben, wie es durch dieselbe in der Tafel angedeutet ist. Ob auch an dem eigentlichen Gletscherstamme ein ähnlicher Wechsel in der Richtung der Bewegung stattfinde, geht aus den bisherigen Beobachtungen nicht hervor, da dieselben meist nur von 24 zu 24 Stunden oder von 12 zu 12 Stunden angestellt wurden, und da sie immer eine ganze Pfahlreihe quer über den Gletscher in ihrem Vorwärtsrücken bestimmen sollten, wurde und konnte auch gar nicht eine Bewegung in vertikaler Richtung erkannt werden.

Wenn auch die Beobachtungen in ähnlicher Weise, wie ich sie anstellte, selbst in noch kürzeren Intervallen vorgenommen und aufgezeichnet würden, so hätte man doch in einer Beziehung immer noch kein richtiges

Bild von der Bewegung der Punkte des Firnes, an denen die Scalen aufgestellt wurden, indem eine seitliche, von der Mitte des Gletschers nach dem Ufer zu vor sich gehende Bewegung, wenn sie genau in der Richtung der Achse des Fernrohrs erfolgt, sich gar nicht bemerklich macht, überhaupt die an der Scala beobachtete Vorwärtsbewegung nur dann die wirkliche Bewegung vollständig anzeigt, wenn dieselbe genau senkrecht zur Fernrohrachse, d. h. genau in der Richtung der Längsachse des Firn- oder Gletscherstammes erfolgt. So lange die Breite oder richtiger der Querschnitt desselben sich gleich bleibt, wird auch eine seitliche Bewegung kaum in erheblicher Weise auftreten können, dagegen ist sie wohl bemerklich, wo sich die Gletscher ausbreiten. Dass auch im Firn dieselbe auftrete, konnte ich in folgender Weise erkennen:

Am ersten Morgen wurde um die auf der Mitte des Firnes befestigte Scala ein Quadrat in der Weise abgesteckt, dass die Röhre den Mittelpunkt desselben bildete und die 4 Ecken desselben je 20 Meter von dem Mittelpunkte entfernt der Art bezeichnet wurden, dass 2 in die Längsrichtung des Firnarmes zu liegen kamen, 2 auf den Querschnitt des Gletschers. Nach 3mal 24 Stunden wurde das Quadrat wieder gemessen. Es ergab folgende Veränderungen: Bezeichnen wir die 4 Ecken mit *a*, *b*, *c*, *d*, von denen *a* und *c* auf der Längsachse, *b* und *d* auf dem Querschnitte des Gletschers lagen und zwar *a* weiter thalabwärts als *c*, *b* näher dem Ufer, auf welchem ich beobachtete, *C* die Röhre, den Mittelpunkt des Quadrates, so ergab die Messung, dass *Ca* um 24 Ctm. länger, *Cc* um 5 Ctm. kürzer als 20 Meter geworden war; die Querdiagonale hatte in ihren beiden Hälften an Länge zugenommen und zwar *Cb* um 25 Ctm., *Cd* um 48 Ctm.; die Querdiagonale war also um 73 Ctm. länger geworden, während die Längsdiagonale nur um 19 Ctm. an Ausdehnung gewonnen hatte.[1]) In Beziehung auf die letztere geht aus der Messung hervor, dass eine Ungleichheit in der Abwärtsbewegung der 3 Punkte in der Art stattfand, dass offenbar *a* und *c* sich schneller bewegten als der Mittelpunkt *C* des Quadrates, aber auch

---

1) Ich habe es unterlassen, durch eine Figur diese Veränderung darzustellen, weil im Kleinen das richtige Verhältniss schwer darzustellen wäre. Würden wir die Diagonale 10 Ctm. lang zeichnen, so würde die Verlängerung von 19 Ctm. nur ½ Mm. in der Zeichnung betragen.

b und *d*, denn die bei der 2ten Messung von *b* nach *d* gespannte Schnur ging um 15 Ctm. von *C* entfernt (näher an *a*) an der Röhre vorbei, ebenso ging die gerade Linie von *a* nach *c* auf der Seite von *b* an der Röhre, und zwar um 24 Ctm. von *C* entfernt vorbei.

Es geht aus diesen Beobachtungen jedenfalls soviel hervor, dass auch verhältnissmässig kurze Strecken von einander entfernte Punkte, wie die Eckpunkte unseres Quadrates, dessen Diagonalen 40 Meter lang waren, eine Ungleichheit der Bewegung erkennen lassen, und dass entschieden auch eine Lateralbewegung, eine Verschiebung der Firntheile nach den Seiten hin Statt habe. Natürlich lässt sich aus solchen Beobachtungen, wie die der Veränderung unseres Quadrates, nur die relative Lageveränderung der Eckpunkte bestimmen, um das wirkliche Fortrücken nach der Länge und Breite zu bestimmen, müsste wenigstens von einem dieser Punkte die Verschiebung nach der Länge und Breite bekannt sein. Von einem Beobachtungsstandpunkte aus lässt sich aber das nicht ermitteln, da von demselben immer nur die Verrückung in einer auf der Visirlinie senkrechten Richtung bestimmt werden kann, wenn man nicht zugleich über Mittel verfügt, welche die Distanz der Scala vom Beobachtungsort bis auf Millimeter genau zu messen gestattet, deren Anwendung übrigens bei der Beschaffenheit des Terrains kaum möglich sein dürfte. Dagegen könnte die Seiten- und Längsbewegung sehr wohl bestimmt werden, wenn gleichzeitig von 2 Beobachtern aus 2 verschiedenen Stellen ein und dieselbe Scala verfolgt würde.

Fassen wir das schliessliche Resultat der mancherlei Bewegungen in horizontaler und vertikaler Richtung für die ganze Beobachtungszeit zusammen, vergleichen wir also die Lage des Mittelpunktes der Scala am Anfang und am Ende der Beobachtung, so finden wir, dass derselbe in 43½ Stunden auf der Scala *A* der Firnmitte um 104 Ctm. vorwärts und um 82,5 Ctm. in senkrechter Richtung abwärts, derselbe Punkt der dem Ufer näheren Scala *B* um 41,5 Ctm. vorwärts und um 35,75 Ctm. abwärts sich verrückt hatte. Es kommt demnach im Mittel auf

		pro Stunde	pro Tag
für *A*	horizontal	2,4	57,6
	vertikal	1,9	45,6
für *B*	horizontal	0,95	22,8
	vertikal	0,82	19,68

Der Betrag der Bewegung ist ein ziemlich bedeutender, ähnlich der Schnelligkeit, welche der Gletscher weiter unten in seinem Eisstrom erkennen lässt. Die ungleich grössere Neigung des Firnstromes an der Beobachtungsstelle, die 10^0 betrug, wird diese verhältnissmässig grosse Schnelligkeit nicht befremdlich erscheinen lassen.

Vergleichen wir die Lage des Mittelpunktes der Scala auf Tafel I mit der Lage am Ende der Beobachtungsreihe, so sehen wir, dass, wenn auch auf Umwegen, in der That eine sehr energische Abwärtsbewegung der Firnschichten Statt findet. Verbinden wir die beiden genannten Punkte, Anfang und Ende der Beobachtung durch eine gerade gestrichelte Linie (S. 1 u. S. 2 der Tafel), so bildet dieselbe für die Scala *A* einen Winkel von 39^0, für *B* von 40^0, Winkel, welche dem in Fig. 1 S. 110 durch die Pfeile angezeigten vollständig gleichkommen. Die angeführten Beobachtungen sprechen also entschieden für die S. 110 als möglich angenommene Theorie, dass die Firnmassen in horizontaler und in vertikaler Richtung sich fortbewegen, und dass die oberflächlichen Schichten allmählich in die Tiefe wandern.

II.

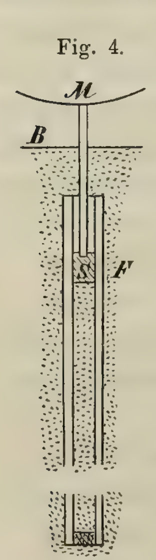
Die zweite Frage, welche durch die Beobachtung entschieden werden sollte, war die, ob schon durch den Druck der oberflächlichen Schichten auf die tieferen sich diese letzteren in Eis verwandelten.

Man hat bisher stets eine allmähliche Umwandlung des Firnes in Gletschereis durch den Schmelzungsprocess an der Oberfläche und das Gefrieren dieses die tieferen Firnkörner überziehenden Wassers angenommen. Nun ist es ganz sicher, dass auch in der Firnregion noch die oberflächlichen Schichten im Sommer etwas schmelzen, aber dennoch findet dieser Process in so geringem Maasse Statt, dass eine tiefgreifende Vereisung im Firne nicht eintreten kann und in der That auch nicht beobachtet wird. Nun tritt aber das feste Gletschereis, soweit

die tiefsten Spalten einen Einblick in den Gletscher gestatten, schon ganz nahe der Firnlinie in gewaltiger Dicke auf. Dieses Eis kann unmöglich bis in die grössten Tiefen hinab durch die Oberflächenschmelzung und wiederholte Eisrindenbildung aus diesem Schneewasser um die Firnkörner herum entstanden sein. Für dieses erscheint die Annahme viel einfacher, dass durch den Druck der neuen Firnlager die alten in Eis verwandelt werden. So viel mir bekannt ist, hat man dem Drucke keine oder nur eine sehr untergeordnete Rolle bei der Bildung des Gletschereises zugeschrieben; ich möchte dem Drucke die grösste, wenn auch nicht ausschliessliche Wirkung dabei zutheilen. Versuche, die ich über die Plasticität des Eises im vorigen Winter angestellt hatte,[3]) machten mir diese Annahme von der Wirkung des Druckes auf den Firn sehr wahrscheinlich und ich hatte daher Vorkehrungen getroffen, um im Firn selbst die Richtigkeit derselben zu prüfen.

Es wurde zu diesem Behufe in eine Glasröhre von 7,25 Mm. im Lumen und 35 Ctm. Länge ein stählerner Stempel *s* (Fig. 4) eingepasst, an dem oben eine kleine Messingschale *M* befestigt war, die zur Aufnahme von Gewichten diente. Die unten geschlossene Glasröhre wurde nun mit dem Firn bis auf einige Centimeter an ihrem oberen Rand gefüllt und in senkrechter Stellung so in den Firn *F* eingesenkt, dass die Schale bis *B* vom Firn bedeckt war, und rings herum um die Schale und die Gewichte Schollen von zusammengebackenem Firn gelegt. Auf die Schale wurde ein Gewicht von 300 Grm. gelegt. Dadurch wurde der Druck auf den Firncylinder im Innern der Glasröhre, in Atmosphären ausgedrückt, ziemlich genau $^4/_5$ Atmosphären, das entspricht dem Drucke einer Wassersäule von 8,5 Meter Höhe. Das specifische Gewicht des Firnes schwankt zwischen 0,6 und 0,3, eine Bestimmung des specifischen Gewichts des Firnes, den ich hier verwendete, war 0,4. Demnach war der von mir angewendete Druck entsprechend dem einer Firnlage von 17 Meter Dicke.

Fig. 4.



3) Sitzungsberichte der physik. medic. Societät zu Erlangen 1875.

Nach einigen Stunden schon hatte sich der Stempel in der Röhre fast bis an die Schale gesenkt, was mich bewog, ihn herauszunehmen und frischen lockeren Firn nachzufüllen, und einige Male wiederholt wurde. Als ich drei Tage diesen Druck hatte einwirken lassen, wurde die Glasröhre aus dem Firne herausgenommen und es zeigte sich nun der untere Theil der Röhre vollständig von einem klaren und compacten Eiscylinder erfüllt, der nur im oberen Ende ein poröses, zelliges Ansehen hatte, was offenbar dem Umstande zuzuschreiben ist, dass die bei dem letztmaligen Nachfüllen eingebrachte Firnmasse noch nicht lange genug dem Drucke ausgesetzt war. Wäre es möglich gewesen, den Druck noch einen ganzen Tag einwirken zu lassen, so würde sich wohl auch diese oberste Lage noch in compactes Eis verwandelt haben.

Ich glaube aus diesen Versuchen den Schluss ziehen zu dürfen, dass, je nachdem man das spezifische Gewicht des Firnes zu 0,3 oder 0,6 annimmt, in einer Tiefe von 25 bis zu 13 Metern der Firn in Eis übergeht, womit übrigens nicht gesagt sein soll, dass nicht schon vielleicht ein noch geringerer Druck, wenn er nur länger wirkt, dieselbe Umwandlung des Firnes in Eis erzeugt.

So viel geht unter allen Umständen aber daraus hervor, dass wir die grossen Firnmulden in der Tiefe nicht von Firn, sondern von Eis angefüllt anzunehmen haben.

Wenn ich eben sagte, dass vielleicht schon ein geringerer aber länger wirkender Druck hinreichen dürfte, um Firn in Eis zu verwandeln, so stützt sich diese Vermuthung auf die schon oben erwähnten Versuche über die Plasticität des Eises, deren Resultate ich, ehe ich an die Erörterung der Frage nach der Ursache der Gletscherbewegung gehe, noch kurz voranzuschicken habe. Die Beobachtung der Gletscher selbst, ihre eigenthümliche Bewegung durch bald enge, bald weite Thäler, das Anschmiegen der Eismasse an alle Unebenheiten zeigte, so zu sagen, durch einen von der Natur im Grossen angestellten Versuch in überzeugender Weise die Plasticität des Eises. Die oben schon erwähnten Versuche von Schlagintweit, Tyndall und Helmholtz liessen erkennen, dass durch sehr starken Druck Eisstückchen zu einer zusammenhängenden Masse vereinigt, durch verhältnissmässig enge Oeffnungen gepresst und im beliebige Formen gebracht werden können. Man

nahm nun von der einen Seite an, dass der Druck der höher gelegenen Gletschertheile, namentlich des Firnes den Eisstrom vorwärts presse, dagegen wurde von andrer Seite geltend gemacht, dass eine so colossale Eismasse, wie sie ein mehrere Meilen langer Gletscher darstellt, unmöglich von einer verhältnissmässig geringen Masse, wie der Firn vorwärts gedrückt und durch die Thalengen hindurchgedrängt werden könne. Ebensowenig, behauptete man, könne auf einer nur wenig Grade geneigten Unterfläche, wie die mancher Gletscher in ihrem Unterlaufe, sich die Masse durch die Schwere allein vorwärts bewegen ohne eine besondere vis a tergo, und wie, sagten die Gegner der Gleitungstheorie, hätten sich erst die ungeheuer langen alten Gletscher z. B. der Rhonegletscher durch das enge, gewundene Rhonethal bei einer Neigung desselben von nur wenigen Minuten bis über den Genfer See hinaus ohne eine andere drängende Kraft bewegen können?

Betrachtet man näher diese und andre gegen die Gleitungstheorie vorgebrachten Bedenken, so wird man sofort einsehen, dass sie alle darin ihren Grund haben, die Plasticität des Eises als sehr gering anzunehmen und, wie es die bisherigen Versuche allerdings auch nur erkennen liessen, erst bei sehr hohem Drucke hervortretend. Bei geringerem Drucke nahm man an, sei das Eis auch im Grossen, wie es der Augenschein lehre, eine höchst spröde unnachgiebige Masse.

Dies bewog mich, näher zu bestimmen, bei welchem Drucke noch die Plasticität erkenntlich sei, und experimentell zu ermitteln, welches das minimum des Druckes sei, unter dem das Eis seine Form noch ändere.

Es ergab sich aus diesen Versuchen, die ich im Winter 1875 anstellte wo wir hier 14 Tage eine nie über Null steigende Temperatur hatten, dass die Plasticität des Eises wesentlich bedingt sei von der Temperatur und dem Druck, und zwar in der Art, dass Erniedrigung der ersteren sie und zwar sehr rasch herabsetzt, umgekehrt bei steigender Temperatur dieselbe sehr rasch zunimmt.

Ebenso zeigt sich die D a u e r des Druckes von wesentlichem Einfluss. Die Plasticität d. h. die Nachgiebigkeit und Formveränderung einer Eismasse durch Druck, wenn der letztere gering, die Temperatur zugleich mehrere Grade unter Null ist, giebt sich oft erst nach 2 und 3 Mal 24 Stunden deutlich zu erkennen. N a h e s e i n e m S c h m e l z-

punkte ist das Eis aber als ein im höchsten Grade plastischer Körper anzusehen, schon ein Druck von $^1/_{30}$ Atmosphäre*) reicht hin, um seine Gestalt zu verändern. Der einzige Unterschied zwischen dem Eise und nach gewöhnlichem Sprachgebrauche plastischen Stoffen ist der, dass das Eis etwas mehr Zeit braucht, um sich in Bewegung zu setzen. Doch zeigt sich die Plasticität bei höherem Drucke, schon bei 2—3 Atmosphären, bei einer dem Schmelzpuncte nahen Temperatur, rasch merklich auftretend. Bei dieser Temperatur dürfte die Plasticität wahrscheinlich bei jedem Druckgrade, auch dem niedrigsten, wenn er nur lange anhält, noch nachzuweisen sein.

Ich glaube, dass nach diesen Versuchen die Ursache der Gletscherbewegung vollkommen klar sein dürfte und dass alle Schwierigkeiten, welche der Theorie von Forbes noch entgegengesetzt werden konnten, als vollständig beseitigt angesehen werden dürfen. Wir können in keiner Weise uns besser eine Vorstellung von der Bewegung eines Gletschers machen, als wenn wir uns dächten, dass alles Eis und Schnee weggenommen und etwa durch eine feuchte, noch eben plastische Lehmmasse ersetzt würde. Als einzigen Grund der Vorwärtsbewegung dieser Masse würden wir die Schwere anzunehmen haben. Je nach der Konfiguration des Bodens kann sich dieselbe als Druck, als Zug, als Abrutschen äussern, und zwar als das eine oder das andere, je nachdem

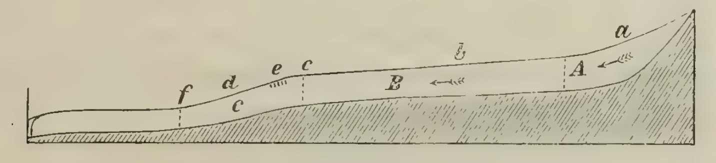


Fig. 5.

2 mit einander verglichene und einander nahe stehende Stellen ein geringeres oder ein grösseres Gefälle erkennen lassen. Es stelle die Figur 5 einen Durchsnitt durch einen Gletscher dar (oder durch ein ähnlich geformtes Gefäss mit Lehm gefüllt), so wird wegen der grösseren Neigung die Masse *a* sich schneller bewegen, als *b* und in Folge dessen auf

*) In den Sitzungsberichten der Erlanger Soc. phys. med., März 1875, in welcher diese Versuche mitgetheilt sind, ist durch einen Druckfehler $^1/_8$ statt $^1/_{30}$ gesetzt.

b drücken, *d* dagegen wird wieder mit grösserer Geschwindigkeit sich bewegen als *c* und einen Zug ausüben, der, wenn er grösser ist, als die Kohäsionskraft des Eises, bei *e* Risse erzeugen wird, die unterhalb *f*, wo sich das Verhältniss der Geschwindigkeit der höheren und tieferen Parthien umkehrt, wieder verschwinden müssen. Es braucht wohl kaum der Erwähnung, dass alle diese Fälle durch die Beobachtung an den Gletschern nachgewiesen sind.

Denken wir uns eine solche Masse durch Querschnitte in einzelne Stücke (*A*, *B*, *C*) getheilt, wie es die punktirten Linien angeben, so ist offenbar, dass überall, wo der Boden nicht vollkommen horizontal ist, jedes Stück, wenn es allein vorhanden wäre, sich abwärts bewegen würde. Selbst auf vollkommen horizontaler Unterlage würde noch eine Vorwärtsbewegung Statt finden, so wie die Masse so dick wäre, dass der Druck der oberen Schichten hinreichen würde, eine Verschiebung der Theilchen auf einander zu erzeugen, was an dem Eise wie wir oben sahen, bei einer Temperatur nahe dem Nullpuncte schon bei einem Drucke von $^1/_{30}$ Atmosphäre Statt hat. Denken wir uns z. B. eine Eismasse *E* von allen Seiten eingeschlossen und nur auf einer nach *A*

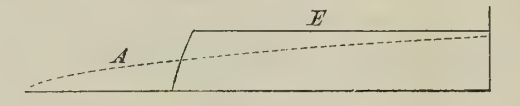


Fig. 6.

hin offen, so wird durch den Druck der oberen Schichten dieselbe eine Form annehmen müssen, wie sie die punktirte Linie angiebt. Die Form der Oberfläche und das Aufhören der Bewegung wird von der Dicke der Masse und dem Plasticitätscoëfficienten, d. h. davon abhängen, wo die Kohäsion und der Druck einander das Gleichgewicht halten.

Wir können somit sagen: Jede Stelle eines Gletschers bewegt sich selbständig durch die Schwere vorwärts, ist aber sowohl durch die voran gehenden Massentheilchen wie durch die nachfolgenden beeinflusst und zwar kann dieser Einfluss ebensowohl ein beschleunigender, wie ein verlangsamender sein. Wenn auch sehr bedeutend modificirt, gelten doch noch die hydrostatischen Gesetze auch für die plastischen Massen in gewissem Grade und zwar in um so höherem, als die plastische Masse

sich dem Zustande der Flüssigkeit mehr nähert. Daraus erklärt sich die vertikale, aufsteigende und dann wieder niedergehende und selbst rückwärtsgerichtete Bewegung, wie wir sie am Firne nachgewiesen haben und wie sie auch wohl noch weiter unten am Gletscherstamme durch Beobachtung gefunden werden dürfte.

Die Selbständigkeit der Bewegung jeder einzelnen Parthie des Gletschers und der geringe Einfluss des Druckes höher gelegener Parthien als vorwärtsdrängende Kraft ist uns durch zwei Beispiele in der Natur sehr klar vor Augen gelegt, wie mir kein anderes sonst bekannt geworden ist. Es ist dieses das Verhalten des Aletschgletschers am Mergelinsee und des Gurglergletschers am Langthaler See*). Ein Querschnitt durch den Gletscher und den See, welcher ein kleines Seitenthal des Hauptthales einnimmt, bietet in beiden Fällen folgende Figur dar, nur mit etwas anderen Dimensionen an letzterem. Bei *A* ist der Mergelinsee,

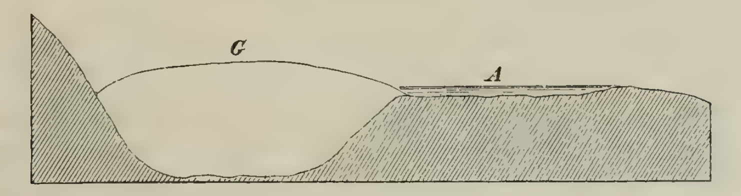


Fig. 7.

G der Gletscher, welcher sich in einer zur Ebene des Papieres senkrechten Richtung gegen den Leser zu bewegt. Der Gletscher hat unterhalb des Sees noch eine Länge von 9500 Metern. Würde diese lange Eismasse erheblichen Widerstand dem Fortrücken der höheren ober dem See gelegenen Massen entgegensetzen, so würde sich der Gletscher sicher viel weiter nach *A* in das kleine Seethal ausbreiten. Dieses seitliche Ausweichen ist aber so gering, dass der Umriss des Gletscherrandes eine kaum bemerkliche Ausbiegung nach dieser Seite hin erkennen lässt. Nach der Dufourschen Karte ist derselbe genau der beistehenden Figur (8) entsprechend, in welcher die Richtung des Pfeiles die Richtung der Be-

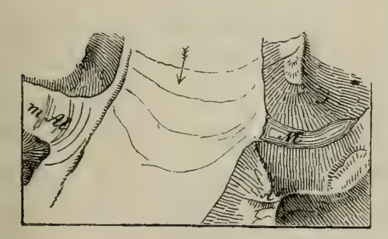


Fig. 8.

* Siehe K. Sonklar, die Oetzthaler Gebirgsgruppe. Taf. VIII.

wegung des Gletschers andeutet. *M* Mergelinsee. *A* Aeggischhorn. *m Al.* Mittel-Aletschgletscher. Noch eine andere Erscheinung findet ihre einfachste Erklärung durch die oben mitgetheilten Versuche über die Plasticität des Eises und die Steigerung derselben mit steigender Temperatur, nämlich die längst bekannte Thatsache, dass sich die Gletscher in der warmen Jahreszeit ungleich schneller, als im Winter bewegen, aber auch bei grosser Kälte nicht ganz stille stehen. Durch die eben näher entwickelte Erklärung fallen auch alle Schwierigkeiten weg, welche die Bewegung der ungeheuer langen Gletscher der Eiszeit darzubieten scheint. Wir können hier nur wiederholen, dass eine sehr dicke Eismasse — und als eine solche müssen wir jedenfalls diese alten Gletscher annehmen — durch ihre eigene Schwere selbst auf einer horizontalen Unterfläche sich fortbewegen musste, also noch vielmehr auf einer, wenn auch nur schwach geneigten, wie sie die Thäler, durch welche jene alten Gletscher sich bewegten, entschieden darboten.

Die so vielfach discutirte Frage nach der Bänder-Structur der Gletscher wird durch die vorhergehenden Erörterungen ebenfalls in einem anderen Lichte erscheinen. Halten wir fest, dass vermöge der hohen Plasticität des Eises jede Stelle, wenn auch nicht vollständig unabhängig von dem Verhalten der benachbarten Massentheilchen doch in gewissem Grade sich selbständig bewege, in sofern als an jeder Stelle die allgemeine Bewegungsursache sich in besonderer Weise geltend macht, so werden wir die Structur des Gletschers nicht als etwas bleibendes, ein in einer bestimmten Region erzeugtes Phänomen annehmen, sondern als eine Folge des durch ungleiche Geschwindigkeit der Bewegung einzelner Theile erzeugten Druckes und der Spannung, wie es Forbes und Tyndall schon angenommen haben. Die grosse Ungleichheit in der Bewegung einzelner Theile nöthigt uns die Structurverhältnisse als eine höchst wandelbare, fortwährend sich ändernde und lediglich von der Bewegung erzeugte Erscheinung anzusehen. Wie lange eine an irgend einen Stelle hervorgerufene Bänderstructur sich erhält, ebenso die Frage, wie lange etwa die Jahresschichten des Firnes sich noch gesondert forterhalten, dürfte kaum in Allgemeinen beantwortet werden können, es wird das wesentlich davon abhängen, wie diese Massen sich weiter unten bewegen, ob die Neigungsverhältnisse und die übrigen Gestaltungsverhältnisse des

Thales, durch welches sich der Gletscher bewegt, von der Art sind, dass die Bewegung eine sehr ungleiche an verschiedenen Stellen sein muss, oder nicht. In ersterem Falle werden in kurzer Zeit die früher in einer Firnschichte vereinigten Eistheilchen weit von einander getrennt sein, die Schichtung des Firnes wird dann bald spurlos verschwunden sein und die weiter unten auftretende Bänderstructur hat nichts mit derselben mehr zu schaffen.

Gerade in Beziehung auf diese Frage wäre es von dem grössten Interesse, wenn in dem Firne weiter oben und ganz nahe der Firnlinie und dem Gletscherstamme selbst ebenfalls nahe dieser Linie gleichzeitig genaue Beobachtungen an mehreren Querschnitten in ähnlicher Weise angestellt würden, wie die von mir vorgenommenen, und wenn ähnlich wie es Agassiz auf dem Gletscherstamme des Aargletschers anordnete, auch im Firne Signale angebracht würden, welche die Bewegung derselben während eines längeren Zeitraumes namentlich auch in vertikaler Richtung zu bestimmen gestatteten.

Der Einzelne kann in dieser Beziehung wenig mehr leisten, aber durch eine Vereinigung mehrerer nach demselben Plane solche gleichzeitige Beobachtungen vernehmender Forscher würde die Gletscherfrage endlich rasch ihrem vollständigen Abschlusse entgegengeführt werden können.

II Tag
III Tag
III Tag
II Tag
S_1
S_2



Bestimmung

des

Geographischen Längenunterschiedes

zwischen

Leipzig und München

durch die Professoren

Dr. Carl v. Bauernfeind und **Dr. Carl Bruhns**

und deren Assistenten

Dr. H. Seeliger, L. Weinek und **Dr. J. H. Franke.**

Mit einer Steindrucktafel.

Der mathematisch-physikalischen Classe der K. Bayr. Akademie der Wissenschaften vorgelegt am 8. Januar 1876.

Bestimmung

des

Geographischen Längenunterschiedes

zwischen

Leipzig und München.

Die Ausführung telegraphischer Längenbestimmungen zwischen München und mehreren astronomischen Punkten der an Bayern grenzenden Staaten war längst eine Forderung der Europäischen Gradmessung, als sich die Verfasser dieser Abhandlung bei der im Jahre 1871 zu Wien abgehaltenen dritten allgemeinen Conferenz der Gradmessungs-Commissäre vereinigten, zunächst den geographischen Längenunterschied ihrer Wohnorte festzustellen.

Besondere Verhältnisse brachten es mit sich, dass diese Bestimmung erst im Jahre 1873 unternommen werden konnte und in München nicht, wie bei allen folgenden, von der Königlichen Sternwarte, sondern vom Königlichen Polytechnikum ausging; ein Umstand, der im vorigen Jahre eine geodätische Uebertragung der Längendifferenz vom Polytechnikum auf die Sternwarte nach sich zog.

Hienach zerfällt unsere Arbeit in zwei nach Inhalt und Umfang wesentlich verschiedene Abschnitte, von denen der erste die telegraphische

Bestimmung des Längenunterschieds zwischen der Sternwarte in Leipzig und dem Polytechnikum in München, und der zweite die geodätische Ermittelung der Längendifferenz zwischen diesem Polytechnikum und der Sternwarte in Bogenhausen enthält.

Die Redaction des ersten Abschnitts hat vorzugsweise Prof. Bruhns und die des zweiten Prof. Bauernfeind in München besorgt.

Erster Abschnitt.

Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen der Sternwarte in Leipzig und dem Polytechnikum in München auf telegraphischem Wege.

Die Beobachtungen wurden zu Leipzig im östlichen Meridianzimmer der neuen Sternwarte auf einem 9,4 Meter vom Mittelpunkte des Hauptgebäudes abliegenden Steinpfeiler und in München auf einem eben solchen Pfeiler gemacht, der sich in dem nordwestlichen Viertel des zum Polytechnikum gehörigen Hofraumes nahe an der Umfassungsmauer befindet. Dieser letztere Beobachtungspfeiler war nach Anordnung des Herrn Prof. v. Bauernfeind behufs fester Aufstellung des Passagen-Instruments mit einer nach den Himmelsgegenden orientirten rechteckigen Sandsteinplatte bedeckt und mit einem zerlegbaren Bretterhause überbaut, das mit einem zur Aufnahme der galvanischen Batterie dienenden Raume des Kellergeschosses im nördlichen Flügel des Polytechnikums in elektrischer Verbindung stand.

Während von der Leipziger Sternwarte eine ständige Drahtleitung zu der dortigen Telegraphenstation führt, musste eine solche in München zwischen dem Polytechnikum und dem Telegraphenamts-Gebäude auf die Dauer der Beobachtungen und auf Kosten der Kgl. Bayer. Gradmessungs-Commission erst hergestellt werden. Die Ausführung besorgte das Kgl. Telegraphenamt, welches uns auch eben so bereitwillig als die Kais. Deutsche Telegraphendirektion innerhalb der Zeit vom 8. bis 31. Juli 1873 nicht nur die Drahtleitung zwischen München und Leipzig, sondern auch einen Telegraphisten von 9 bis 3 Uhr Nachts zur Verfügung stellte; was wir mit besonderem Danke öffentlich anzuerkennen uns verpflichtet fühlen.

Von den zu den Beobachtungen verwendeten gleichbeschaffenen Passagen-Instrumenten mit gebrochenem Fernrohre aus der Werkstätte von Pistor u. Martins in Berlin gehörte das eine der Leipziger Sternwarte, das andere dem Kgl. preussischen geodätischen Institute. Dieses ist auch der Besitzer der von Mayr u. Wolf in Wien verfertigten Registrir-Apparate, Rheostaten und Tangentenbussolen, welche bei den Bestimmungen benutzt wurden. Die Relais für die Leitungen waren von der Sternwarte in Leipzig geliefert. Auch hiefür sprechen wir namentlich dem Herrn Präsidenten des Königlich Preussischen geodätischen Instituts unsern verbindlichen Dank aus.

Die Einrichtung der Passagen-Instrumente und Registrir-Apparate ist auf Seite 8 u. ff. der „Astronomisch-geodätischen Arbeiten für die Europäische Gradmessung im Jahre 1870" von Professor C. Bruhns, Leipzig 1871, beschrieben, und weitere Nachrichten über die gebrauchten Registrir-Apparate finden sich: von Direktor v. Littrow im LII. Bande der „Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien" und von Professor Kaiser im II. Bande der „Annalen der Sternwarte in Leiden."

Als Beobachter waren die Astronomen Herr Dr. H. Seeliger und Herr L. Weinek, beide zur Zeit der Messungen an der Sternwarte in Leipzig beschäftigt, aufgestellt; dieselben wechselten, um die persönliche Gleichung zu eliminiren, die Stationen in der Art, dass zuerst Herr Weinek in München und Herr Seeliger in Leipzig, hierauf der letztere in München und der erstere in Leipzig, schliesslich wieder Herr Weinek in München und Herr Seeliger in Leipzig beobachtete. Jeder der beiden Beobachter führte stets seinen Taster zum Signalgeben und sein Relais bei sich.

Die Beobachtungsmethoden waren von denen, welche schon früher bei den Längenbestimmungen Leipzig-Gotha, Leipzig-Mannheim u. s. w. angewendet und in den hierauf bezüglichen Abhandlungen von Direktor P. A. Hansen in Gotha, Professor C. Bruhns in Leipzig, u. A. beschrieben wurden, principiell nicht verschieden und die Abweichungen im Einzelnen sind theils aus dem in Tabelle Nr. 1 aufgestellten Beobachtungsprogramme, theils aus nachstehenden Bemerkungen zu ersehen.

Die Beobachtungen dauerten vom 8. bis 31. Juli 1873. An jedem Abend wurde um 9 Uhr zuerst die Leitung probirt und gegenseitige Nachricht über das Wetter gegeben. Darauf begannen die Beobachtungen zu einer ersten Zeitbestimmung. Nach derselben fand der telegraphische Signalwechsel zur Vergleichung der Uhren zwischen beiden Stationen statt, worauf die zweite Zeitbestimmung nach Art der ersten und schliesslich eine gegenseitige Mittheilung der auf beiden Stationen erzielten Ergebnisse folgte. Nur an den Abenden des 13., 17., 21., 22., 23., 25., 29., 30., 31. Juli war der Himmel an beiden Stationen gleichzeitig klar. Wenn nun auch ausser an jenen Abenden in Leipzig am 8., 9., 10., 11., 14., 15., 16., 24. und in München am 15., 16., 19. Juli beobachtet werden konnte, so wurden doch diese einseitigen und oft durch Wolken gestörten Sternbeobachtungen nicht mit unter die Daten der Längenbestimmung München-Leipzig aufgenommen.

Zu jeder Zeitbestimmung wurde die Beobachtung von zwei Polsternen, einer zu Anfang, einer zu Ende für nöthig erachtet; bei dem Passiren des Polsterns durch die Fäden, wenn der Stern in die Nähe des Mittelfadens gekommen war, wurde umgelegt und zwischen den Culminationen von zwei Polsternen hat man 10 oder 11 Zeitsterne beobachtet, dabei nach dem fünften Zeitstern abermals umgelegt. Wie sich aus dem folgenden Programm ergibt, wurde also jeden Abend sechsmal das Instrument umgelegt und wenigstens achtmal nivellirt, zumal sich an dem Münchener Pfeiler kleine, durch Temperatureinflüsse erzeugte Niveau-Aenderungen kundgaben. Die Umlegungen dienten zur Bestimmung der Collimationsfehler, das Nivelliren zur Ermittelung der Neigungen, und aus den Beobachtungen der Polsterne und der Zeitsterne wurde der Fehler des Azimuths bestimmt.

Die sechs Umlegungen an jedem Abend, wenn es klar war, sind immer beibehalten worden, und es wurde, wenn man an beiden Stationen an einem Abend mit Kreis „Ost“ begonnen hat, am anderen Abend mit Kreis „West“ angefangen: beide Stationen hatten demnach stets dieselbe Kreislage.

Die Sterne waren so gewählt, dass die mittlere Zenithdistanz der Zeitsterne nach Süden nahezu gleich war der mittleren Zenithdistanz der

Polsterne nach Norden, weil dadurch verschiedene Instrumentalfehler eliminirt wurden. Es war die mittlere Zenithdistanz der Polsterne in Leipzig $34^0,0$ und in München $37^0,2$; die der Zeitsterne in Leipzig $37^0,6$ und in München $34^0,4$.

Für die Zeitsterne wurde die Registrirmethode angewandt, die Polsterne sind mit Auge und Ohr beobachtet: die Differenz beider Methoden wurde ermittelt und bei den Reductionen verwerthet. Das Registriren der Passagen der Zeitsterne geschah durch einen localen Stromschluss der Batterie, jedoch wurde der Strom mit Hilfe von Tangentenbussolen so modificirt, dass er etwa eben so stark war, als wenn nachher die Leitung von Leipzig nach München eingeschaltet und von einer Station zur anderen Zeitsignale zur Vergleichung der Uhren gegeben wurden.

Damit auf jeder Station der ankommende und abgehende Strom gleich stark wurde, hat man ihn auf beiden Stationen getheilt: in dem einem Zweige befand sich das Signalrelais und die Tangentenbussole, in dem anderen der innerhalb sehr weiter Grenzen veränderliche Rheostat von Siemens u. Halske. Zu erwähnen ist noch besonders, dass die Bussolen diesmal weiter wie früher von dem Relais entfernt waren, und zwar desswegen, damit eine von Herrn Seeliger bei vorausgegangenen Längenbestimmungen vermuthete Beeinflussung der Bussolen durch den Magneten des Relais' nicht stattfinden konnte. Vor dem Signalwechsel wurde an jedem Orte zwei Minuten lang der Stromkreis geschlossen und der Widerstand so lange verändert, bis die Nadeln der Bussolen bei abgehendem und ankommendem Strome gleiche Grade anzeigten.

Die Signalwechsel wurden folgendermassen ausgeführt: Erst gab Station A 20 Sekunden lang Zeichen in Intervallen von $1/2$ bis 1 Sekunde, dann trat 5 Sekunden lang Pause ein, worauf 20 Signale in möglichst unregelmässigen Intervallen von 1 bis 2 Sekunden folgten; dann trat abermals eine Pause von 5 Sekunden und eine Folge von 20 Signalen mit unregelmässigen Intervallen von 1 bis 2 Sekunden Dauer ein. Nunmehr gab nach einer Pause von 1 Minute die Station B dieselbe Anzahl von Signalen wie A, nachdem die anfänglichen Widerstandsgrössen in den Zweigleitungen geregelt waren. Die zuerst und zuletzt gegebenen Zeichen dienten nur als Aufforderung zur Aufmerksamkeit, die

eigentlichen Signale waren die, welche in Intervallen von 1 bis 2 Sekunden gegeben wurden. Da sich die Signale mehrfach nicht deutlich aufzeichneten, so sind die undeutlichen zur Berechnung der Längendifferenz nicht mit benutzt worden.

Die Reduction aller Beobachtungen und deren Zusammenstellungen besorgten unter der Oberaufsicht von Prof. C. Bruhns die auf dem Titel genannten Herren Astronomen Seeliger und Weinek, und der denselben beigegebene Studirende Herr Muth in Leipzig.

Tabelle I. Beobachtungsprogramm.

Stern.		Grösse.	AR. 1873.	Decl. 1873.	
			Nivelliren.		
Polstern I	Naut. Alm.	4.5	$16^{h}\ 59^{m}\ 3^{s}$	+82° 14′ 33″	
	ε Urs. min.				Umlegen.
Polstern I	Naut. Alm.	4.5	16 59 3	+82 14 33	
			Nivelliren.		
Zeitstern 1	*B. A. C.* 5821	var.	$17^{h}\ 8^{m}\ 51^{s}$	+14° 32′ 13″	
- 2	*B. A. C.* 5841	6	12 39	+11 0 15	
- 3	*B. A. C.* 5860	5.5	15 40	+24 37 37	
- 4	*B. A. C.* 5890	5.5	19 54	− 4 58 21	
- 5	*B. A. C.* 5903	6	22 21	+ 0 26 2	
					Umlegen.
- 6	*B. A. C.* 5941	2	29 2	+12 39 16	
- 7	*B. A. C.* 5967	6	32 17	+24 23 12	
- 8	*B. A. C.* 5991	6	36 17	+16 0 43	
- 9	*B. A. C.* 6021	3.5	41 29	+27 47 47	
- 10	*B. A. C.* 6035	6.5	41 9	+ 9 53 26	
			Nivelliren.		
Polstern II	Naut. Alm.	4.5	$18^{h}\ 13^{m}\ 18^{s}$	+86° 36′ 25″	
	δ Urs. min.				Umlegen.
Polstern II	Naut. Alm.	4.5	18 13 18	+86 36 25	
			Nivelliren.		

Signalwechsel und Correspondenz.

Stern.		Grösse.	AR. 1873.	Decl. 1873.	
			Nivelliren.		
Polstern III	Naut. Alm.	6.7	$19^h\ 51^m\ 19^s$	$+88^0\ 55'\ 33''$	
	λ Urs. min.				Umlegen.
Polstern III	Naut. Alm.	6.7	19 51 19	+88 55 33	
			Nivelliren.		
Zeitstern 11	*B. A. C.* 7200	4	$20^h\ 40^m\ 46^s$	$+15^0\ 40'\ 11''$	
- 12	*B. A. C.* 7222	6.5	43 35	+ 7 23 38	
- 13	*B. A. C.* 7246	6	46 42	+26 37 27	
- 14	*B. A. C.* 7269	6	51 27	+ 3 42 24	
- 15	*B. A. C.* 7302	6	55 57	+ 6 40 58	
					Umlegen.
- 16	*B. A. C.* 7350	5	21 4 11	+ 9 37 19	
- 17	*B. A. C.* 7368	3	7 32	+29 42 26	
- 18	*B. A. C.* 7394	6.5	11 31	— 5 3 11	
- 19	*B. A. C.* 7410	5.5	15 20	+23 19 32	
- 20	*B. A. C.* 7437	6	18 16	+23 43 48	
- 21	*B. A. C.* 7478	3	24 52	— 6 7 44	
			Nivelliren.		
Polstern IV		7	$21^h\ 51^m\ 48^s$	$+83^0\ 26'\ 39''$	
	Carrington 3346				Umlegen.
Polstern IV		7	21 51 48	+83 26 39	
			Nivelliren.		

II. Die Position der beobachteten Sterne.

Von den Polsternen ist Polstern I = ε Ursae minoris
„ II = δ „ „
„ III = λ „ „
und Zeitstern 6 = α Ophiuchi
„ 17 = ζ Cygni.

Sowohl die mittleren als die scheinbaren Oerter dieser Sterne wurden aus dem Nautical Almanac entnommen.

Polstern IV ist aus Carrington's Catalog abgeleitet und die scheinbare Position ermittelt. Doch zeigte sich besonders aus den Leipziger Beobachtungen, welche wegen des festeren Pfeilers ein sicheres Resultat ergaben, dass, um das Azimuth mit dem der anderen Polsterne besser

in Uebereinstimmung zu bringen, eine Correction von $+0^s.50$ in AR. nöthig war. Selbige ist angebracht. Nachdem noch die Correction wegen der Aberration, an die Polsterne auch die von der Mondlänge abhängigen Glieder angebracht, wurde nach Anbringung der Neigung und der Collimation das vorläufige Azimuth abgeleitet. In selbigem zeigte sich auf beiden Stationen keine bedeutende Aenderung für den Abend und wurde daher aus dem Azimuth der Polsterne I und II, und III und IV das Mittel genommen, und die sich zeigende kleine Aenderung des Azimuths aus dem ersten Mittel und dem zweiten Mittel abgeleitet und schliesslich angebracht. Da nun der Uhrstand aus den dem Nautical Almanac entnommenen Positionen der beiden Zeitsterne α Ophiuchi und ζ Cygni bekannt, konnten mit diesen die scheinbaren Oerter, und aus diesen wieder die mittleren Oerter der Zeitsterne für 1873 abgeleitet werden.

Dasselbe ist für alle Sterne geschehen und sind die einzelnen Positionen in der folgenden Tabelle II enthalten. Tabelle III enthält die mittleren und scheinbaren Rectascensionen der Polsterne, — Tabelle IV die aus Tab. II abgeleiteten mittleren und scheinbaren Rectascensionen der Zeitsterne und mag noch bemerkt werden, dass die mittleren Oerter, welche sich auf das System der Sterne des Nautical Almanac beziehen, bis auf $\pm 0^s.02$ sich genau ergeben. Dies wird auch bestätigt durch Vergleichung der Positionen der Zeitsterne 1, 9, 11 und 21, welche in dem Catalog der astronomischen Vierteljahrschrift vorkommen und resp. bis auf $+0^s.04$, $+0^s.03$, $+0^s.011$, $+0^s.02$ übereinstimmen, welche Differenzen, da der Nautical Almanac für α Ophiuchi $0^s.02$, für ζ Cygni $0^s.10$ weniger hat, als der Catalog der astronomischen Vierteljahrschrift, auf $+0^s.02$, $+0^s.01$, $+0^s.01$, -0.08, also im Mittel auf $-0^s.01$ sinken, wenn man die Cataloge auf einander reduciren würde. Da auf beiden Stationen immer dieselben Sterne beobachtet sind, fallen übrigens alle Fehler in den Positionen der Sterne im Endresultate fort.

Selbstverständlich ist bei allen Sternen die tägliche Aberration berücksichtigt.

Tabelle II. Mittlere Oerter der Zeitsterne aus den Beobachtungen abgeleitet.

1873.		Zeitstern 1.	Zeitstern 2.	Zeitstern 3.	Zeitstern 4.	Zeitstern 5.
Leipzig	Jul. 13.	$17^h\ 8^m\ 51^s.31$	$17^h\ 12^m\ 38^s.67$	$17^h\ 15^m\ 40^s.34$	$17^h\ 19^m\ 53^s.52$	$17^h\ 22^m\ 20^s.91$
	- 17.	51.55	38.95	40.59	53.70	21.09
	- 21.	51.47	38.90	40.50	53.60	21.01
	- 22.	51.33	38.79	40.28	53.54	21.01
	- 23.	51.56	39.02	40.44	53.68	21.15
	- 25.	51.40	38.76	40.40	53.57	21.00
	- 29.	51.31	—	—	—	—
	- 30.	51.44	38.84	40.33	53.55	21.01
	- 31.	51.27	38.67	40.21	53.46	20.99
München	- 13.	51.14	38.43	40.23	53.34	20.84
	- 17.	51.37	38.70	40.35	53.46	20.91
	- 21.	50.94	38.62	40.21	53.40	20.90
	- 22.	51.57	38.82	40.52	53.68	21.07
	- 23.	51.40	38.71	40.31	53.42	20.88
	- 25.	51.53	38.88	40.51	53.63	21.09
	- 29.	51.40	38.78	40.43	53.63	20.89
	- 30.	51.57	38.95	40.50	53.57	21.12
	- 31.	51.46	38.90	40.42	53.62	21.17
		Zeitstern 7.	Zeitstern 8.	Zeitstern 9.	Zeitstern 10.	Zeitstern 11.
Leipzig	Jul. 13.	$17^h\ 32^m\ 17^s.18$	$17^h\ 36^m\ 16^s.61$	$17^h\ 41^m\ 29^s.38$	$17^h\ 44^m\ 8^s.63$	$20^h\ 39^m\ 46^s.03$
	- 17.	17.29	16.72	29.30	8.74	45.75
	- 21.	17.28	16.71	29.24	8.71	46.03
	- 22.	17.20	16.74	29.30	8.63	46.10
	- 23.	17.30	16.79	29.44	8.80	46.10
	- 25.	17.23	16.76	29.46	8.71	45.74
	- 29		—	29.25	—	45.92
	- 30.	17.16	16.54	29.20	8.41	—
	- 31.	17.23	16.67	29.21	8.57	46.01
München	- 13.	17.08	16.67	29.22	8.51	46.02
	- 17.	17.24	16.71	29.30	8.76	45.91
	- 21.	17.03	16.63	29.19	8.54	46.05
	- 22.	17.16	16.74	29.13	8.65	45.89
	- 23.	17.17	16.57	29.16	8.56	46.09
	- 25.	17.11	16.80	29.35	8.84	46.02
	- 29.	17.14	16.60	29.24	8.57	46.01
	- 30.	17.38	16.86	29.45	8.80	—
	- 31.	17.10	16.61	29.25	8.64	46.03
		Zeitstern 12.	Zeitstern 13.	Zeitstern 14.	Zeitstern 15.	Zeitstern 16.
Leipzig	Jul. 13.	$20^h\ 43^m\ 34^s.71$	$20^h\ 46^m\ 41^s.61$	$20^h\ 51^m\ 27^s.01$	$20^h\ 55^m\ 56^s.83$	$21^h\ 4^m\ 10^s.66$
	- 17.	34.46	41.30	26.80	56.63	10.47
	- 21.	34.84	41.65	27.07	56.98	10.66
	- 22.	34.88	41.63	27.10	56.89	10.76
	- 23.	34.80	41.59	27.02	56.93	10.65
	- 25.	34.66	41.44	26.87	56.78	10.55
	- 29.	34.75	41.52	27.10	56.87	10.52
	- 30.	—	—	—	—	—
	- 31.	34.78	41.69	27.06	56.89	10.60
München	- 13.	34.77	41.56	27.06	56.94	10.73
	- 17.	34.73	41.54	27.02	56.87	10.62
	- 21.	34.69	41.66	27.05	56.92	10.65
	- 22.	34.63	41.52	26.96	56.77	10.63
	- 23.	34.73	41.61	27.10	56.82	10.63
	- 25.	34.68	41.63	26.90	56.80	10.57
	- 29.	34.67	41.49	27.06	56.78	10.65
	- 30.	—	—	—	—	—
	- 31.	34.70	41.53	—	56.75	10.56

Tabelle II. Mittlere Oerter der Zeitsterne aus den Beobachtungen abgeleitet.

1873.		Zeitstern 18.	Zeitstern 19.	Zeitstern 20.	Zeitstern 21.
Leipzig	Jul. 13.	$21^h\ 11^m\ 31^s.24$	$21^h\ 15^m\ 19^s.86$	$21^h\ 18^m\ 15^s.61$	$21^h\ 24^m\ 52^s.24$
	- 17.	31.04	19.65	15.40	51.94
	- 21.	31.33	20.03	15.66	52.35
	- 22.	31.44	20.01	15.49	52.41
	- 23.	31.40	20.07	15.68	52.42
	- 25.	31.27	19.75	15.45	52.31
	- 29.	31.22	19.77	15.49	52.26
	- 31.	31.33	19.99	15.60	52.35
München	- 13.	31.35	20.08	15.74	52.49
	- 17.	31.19	19.89	15.50	52.20
	- 21.	31.26	20.02	15.64	52.45
	- 22.	31.22	19.01	15.54	52.15
	- 23.	31.25	19.79	15.43	52.21
	- 25.	31.31	19.90	15.59	52.32
	- 29.	31.24	20.00	15.63	52.38
	- 31.	31.36	19.94	15.54	52.28

Tabelle III. Angenommene mittlere Oerter der Polsterne. 1873.0

Stern.	Mittlere AR.	Mittlere Decl.
Polstern I. ε Urs. min.	$16^h\ 59^m\ 3^s.49$	$+82^0\ 14'\ 33''3$
- II. δ - -	18 13 18.50	+86 36 24.7
- III. λ - -	19 51 19.03	+88 55 33.1
- IV. Carringt. 3346	21 51 48.02	+83 26 38.6

Angenommene scheinbare Oerter der Polsterne.

Tag. 1873.	Polstern I. ε Urs. min. AR. app.	Polstern I. ε Urs. min. Decl. app.	Polstern II. δ Urs min. AR. app.	Polstern II. δ Urs min. Decl. app.
Juli 10.	$16^h\ 59^m\ 10^s.87$	$82^0\ 14'\ 37''.8$	$18^h\ 13^m\ 34^s.96$	$86^0\ 36'\ 24''.7$
- 20.	9.66	40.0	32.94	27.5
- 30.	8.26	41.7	30.38	30.1

Tag. 1873.	Polstern III. λ Urs. min. AR. app.	Polstern III. λ Urs. min. Decl. app.	Polstern IV. Carringt. 3346. AR. app.	Polstern IV. Carringt. 3346. Decl. app.
Juli 10.	$19^h\ 52^m\ 4^s.49$	$88^0\ 55'\ 27''.3$	$21^h\ 51^m\ 53^s.50$	$83^0\ 26'\ 27''.6$
- 20.	2.53	30.7	54.30	30.9
- 30.	51 58.67	34.0	54.80	34.4

Tabelle IV. Mittlere Rectascensionen der Zeitsterne 1873.0.

Stern	1.	17^h	8^m	$51^s.39$	
-	2.		12	38.79	
-	3.		15	40.39	
-	4.		19	53.55	
-	5.		22	21.00	
-	6.		29	2.35	Naut. Alm.
-	7.		32	17.19	
-	8.		36	16.69	
-	9.		41	29.28	
-	10.		44	8.65	
-	11.	20	39	45.98	
-	12.		43	34.72	
-	13.		46	41.56	
-	14.		51	27.01	
-	15.		55	56.84	
-	16.	21	4	10.62	
-	17.		7	31.89	Naut. Alm.
-	18.		11	31.28	
-	19.		15	19.90	
-	20.		18	15.56	
-	21.		24	52.30	

Tabelle IVa. Scheinbare Rectascensionen der Zeitsterne.

	1.	2.	3.	4.	5.
Juli 10.	17^h 8^m $53^s.38$	17^h 12^m $40^s.79$	17^h 15^m $42^s.41$	17^h 19^m $55^s.63$	17^h 22^m $23^s.05$
- 20.	53.34	40.76	42.36	55.62	23.04
- 30.	53.26	40.69	42.28	55.58	22.99
	6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Juli 10.	17^h 29^m $4^s.38$	17^h 32^m $19^s.25$	17^h 36^m $18^s.74$	17^h 41^m $31^s.37$	17^h 44^m $10^s.72$
- 20.	4.36	19.21	18.72	31.34	10.71
- 30.	4.30	19.14	18.66	31.26	10.67
	11.	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
Juli 10.	20^h 39^m $47^s.98$	20^h 43^m $36^s.75$	20^h 46^m $43^s.53$	20^h 51^m $29^s.05$	20^h 55^m $58^s.84$
- 20.	48.13	36.91	43.65	29.22	59.02
- 30.	48.22	37.03	43.76	29.34	59.16
	16.	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
Juli 10.	21^h 4^m $11^s.89$	21^h 7^m $33^s.78$	21^h 11^m $33^s.35$	21^h 15^m $21^s.79$	21^h 18^m $17^s.44$
- 20.	12.06	33.95	33.54	21.97	17.62
- 30.	12.20	34.08	33.69	22.10	17.76
	21.				
Juli 10.	21^h 24^m $54^s.34$				
- 20.	54.54				
- 30.	54.70				

III. Die Instrumente.

Die Construction der Passagen-Instrumente ist schon erwähnt. Die angewandte Vergrösserung ist die 90 fache; die Fadendistanzen sind für das in Leipzig gebrauchte Instrument bei Kreislage Ost für den Aequator $40^{s}148$; $26^{s}841$; $17^{s}945$; $13^{s}441$; $9^{s}028$; $8^{s}963$; $13^{s}536$; $17^{s}838$; $26^{s}728$; $40^{s}283$, für das in München gebrauchte Instrument $36^{s}338$; $24^{s}326$; $16^{s}253$; $12^{s}132$; $8^{s}215$; $7^{s}991$; $11^{s}925$; $15^{s}930$; $24^{s}127$; $36^{s}071$.

Die Coëfficienten der Instrumentalfehler sind für Leipzig und München in der folgenden Tabelle V enthalten.

Die Registrirapparate, die telegraphischen Apparate, die Widerstände sind ebenfalls in der Einleitung Seite 135 beschrieben; zur Registrirung der Secunden diente in Leipzig die Uhr Tiede II, mit einer Hansen'schen Contacteinrichtung, in München eine Uhr von Zachariae in Leipzig mit Quecksilbercontact.

Tabelle V. Coëfficienten der Instrumentalfehler.

Stern	Coëff. für c	Coëff. für i		Coëff. für k	
	Leipzig u. München	Leipzig	München	Leipzig	München
Polst. I	+ 7.410	+ 6.358	+ 6.137	— 3.807	— 4.154
- II	16.900	13.797	13.233	9.759	10.510
- III	53.311	42.243	40.368	32.487	34.817
- IV	8.762	7.421	7.151	4.657	5.063
Zeitst. 1	+ 1.033	+ 0.827	+ 0.860	+ 0.605	+ 0.573
- 2	1.019	0.777	0.812	0.659	0.615
- 3	1.100	0.983	1.008	0.494	0.439
- 4	1.004	0.557	0.602	0.834	0.802
- 5	1.000	0.631	0.673	0.776	0.740
- 6	1.025	0.800	0.834	0.641	0.595
- 7	1.098	0.981	1.005	0 498	0.442
- 8	1.040	0.849	0.881	0.601	0.553
- 9	1.130	1.036	1.060	0.451	0.393
- 10	1.015	0.761	0.797	0.672	0.629
- 11	1.039	0.844	0.876	0.605	0.558
- 12	1.008	0.726	0.764	0.699	0.658
- 13	1.119	1.016	1.040	0.469	0 411
- 14	1.002	0.676	0.715	0.740	0.705
- 15	1.007	0.716	0.755	0.708	0.667
- 16	1.014	0.757	0.793	0.675	0.632
- 17	1.151	1.070	1.099	0.424	0.364
- 18	1.004	0.555	0.600	0.837	0.805
- 19	1.089	0.961	0.988	0.512	0.458
- 20	1.092	0.968	0.994	0.506	0.452
- 21	1.006	0.540	0.587	0.848	0.817

IV. Die Instrumentalfehler.

1. Das Instrument in Leipzig.

Da zur Reduction der Beobachtungen wieder die Mayer'sche Formel angewandt wurde, haben wir die Neigung, den Collimationsfehler und das Azimuth zu geben.

a. Die Neigung.

Ein Theil der Libelle ist angenommen wie bei den frühern Längenbestimmungen zu $0^s.100$; für Ungleichheit der Zapfen ergab sich aus allen Beobachtungen $W - O = +0^s.483$. Die Nivellirungen sind in der nachfolgenden Tabelle angegeben und alle Nivellirungen bei Kreis Ost mit dem erhaltenen Werthe auf Kreis West reducirt.

Tabelle VI. Beobachtete Neigungen am Leipziger Instrument.

1873.	Sternzeit.	Kreislage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.	1873.	Sternzeit.	Kreislage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.
Juli 8.	$19^h.1$	O	$-0^p.55$	$-0^p.067$	Juli 11.	$16^h.5$	W	$+0^p.85$	$+0^p.850$
	19.3	O	−0.475	+0.008		16.6	W	+0.725	+0.725
	19.5	O	−0.425	+0.058		16.7	W	+1.175	+1.175
	19.7	W	+0.05	+0.050		16.9	O	+0.975	+1.458
	20.0	W	−0.125	−0.125		17.6	W	+1.400	+1.400
	20.1	W	0.000	0.000		17.7	W	+1.225	+1.225
	20.4	W	+0.50	+0.500		17.9	W	+1.125	+1.125
	21.3	O	−0.50	−0.017		18.1	O	+0.975	+1.458
	21.5	O	−0.675	−0.192		18.2	O	+0.975	+1.458
	21.8	W	+0.50	+0.500		18.3	O	+0.975	+1.458
Juli 9.	$16^h.5$	W	+0.70	+0.700	Juli 13.	16.5	W	+1.400	+1.400
	16.7	W	+0.625	+0.625		16.7	W	+0.900	+0.900
	16.9	O	+0.425	+0.908		16.9	O	+1.025	+1.508
	17.6	W	+0.775	+0.775		17.6	W	+1.375	+1.375
	17.7	O	+0.800	+0.800		17.9	W	+0.975	+0.975
	17.9	W	+0.650	+0.650		18.0	W	+1.100	+1.100
	18.1	O	+0.550	+0.550		18.1	O	+0.950	+1.433
	18.2	O	+0.500	+0.500		18.2	O	+0.875	+1.358
	18.3	O	+0.575	+0.575		18.3	O	+0.875	+1.358
Juli 10.	16.6	W	+0.425	+0.425		19.1	O	+0.450	+0.933
	16.8	O	+0.275	+0.758		19.3	O	+0.525	+1.008
	16.9	O	+0.175	+0.658		19.7	W	+0.875	+0.875
	17.6	W	+1.05	+1.050		20.0	W	+1.175	+1.175
	17.9	W	+0.825	+0.825		20.2	W	+1.000	+1.000

1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.	1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.
Juli 13.	$20^{h}.3$	W	$+1^{p}.125$	$+1^{p}.125$	Juli 21.	$20^{h}.0$	W	$+1^{p}.175$	$+1^{p}.175$
	21.3	O	+1.000	+1.483		20.1	W	+0.95	+0.950
	2.15	O	+0.900	+1.383		20.4	W	+1.00	+1.000
	2.18	W	+1.425	+1.425		21.3	O	+0.50	+0.983
Juli 14.	16.5	O	+0.325	+0.808		21.5	O	+0.30	+0.783
	16 6	O	+0.125	+0.608		21.8	W	+1.125	+1.125
	16.9	W	+0.875	+0.875	Juli 22.	16.6	O	+0.325	+0.808
	17.2	W	+1.275	+1.275		16.9	W	+0.725	+0.725
	17.3	O	+1.050	+1.533		17.6	O	+0.175	+0.658
Juli 15.	16.9	W	+1.15	+1.150		17.9	O	—0.400	+0.083
	17.6	O	+0.875	+1.358		18.2	W	+1.050	+1.050
	17.8	O	+0.60	+1.083		19.1	W	+1.125	+1.125
	17.9	O	+0.55	+1.033		19.7	O	+0.275	+0.758
	18.1	W	+0.825	+0.825		20.0	O	+0.350	+0.833
	18 2	W	+0.875	+0.875		20.1	O	+0.625	+1.108
Juli 16.	16.8	W	+0.40	+0.400		20.4	O	+0.525	+1.008
	17.3	O	—0.30	+0.183		21.3	W	+1.10	+1.100
	17.9	O	—0.025	+0.458		21.5	W	+0.875	+0.875
	18.0	O	0.000	+0.483		21.8	O	+0.35	+0.833
	18.2	W	+0.40	+0.400	Juli 23.	16.6	W	+0.500	+0.500
	18.3	W	+0.60	+0.600		16.9	O	—0.100	+0.383
Juli 17.	16.4	O	+0.075	+0.558		17.6	W	+0.85	+0.850
	16.6	O	0.000	+0.483		17.9	W	+0.65	+0.650
	16.9	W	+0.125	+0.125		18.2	O	+0.10	+0.583
	17.2	W	+0.95	+0.950		19.1	O	0.25	+0.233
	17.6	O	—0.175	+0.308		19.3	O	—0.075	+0.408
	17.8	O	—0.20	+0.283		20.0	W	+0.95	+0 950
	17.9	O	—0.30	+0.183		20.1	W	+0.425	+0.425
	18.2	W	+0.55	+0.550		20.2	W	+0.25	+0.250
	18.3	W	+0.425	+0.425		20.4	W	+0.50	+0.500
	19.1	W	+0.225	+0.225		21.3	O	0.00	+0.483
	19.3	W	+0.35	+0.350		21.5	O	+0.075	+0.558
	19.6	O	+0.275	+0.758		21.8	W	+0.125	+0.125
	20.0	O	+0.05	+0.533	Juli 24.	16.6	O	—0.30	+0.183
	20.2	O	+0.20	+0.683		16.9	W	+0.30	+0.300
	20.4	O	—0.075	+0.408		17.6	O	—0.15	+0.333
	21.3	W	+0.425	+0.425	Juli 25.	16.6	O	—0.025	+0.458
	21.5	W	+0.475	+0.475		16.9	W	+0.225	+0.225
	21.8	O	+0.15	+0.633		17.6	O	—0.05	+0.433
Juli 21.	16.6	W	+0.70	+0.700		17.9	O	+0.05	+0.533
	16.9	O	+0.40	+0.883		18.2	W	+0.50	+0.500
	17.6	W	+1.50	+1.500		19.1	W	+0.475	+0.475
	17.8	W	+1.275	+1.275		19.3	W	+0.425	+0.425
	18.2	O	+0.80	+1.283		19.6	W	+0.175	+0.175
	19.1	O	+0.325	+0.808		19.8	O	—0.125	+0.358
	19.3	O	+0.075	+0.558		20.0	O	+0.025	+0.508

1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.	1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.
Juli 25.	$20^h.2$	O	$-0^p.175$	$-0^p.308$	Juli 30.	$18^h.1$	W	$+0^p.55$	$+0^p.550$
	20.4	O	−0.075	+0.408		18.2	W	+0.95	+0.950
	21.3	W	+0.075	+0.075		18.3	W	+1.20	+1.200
	21.5	W	+0.400	+0.400		19.1	W	+1.00	+1.000
	21.8	O	+0.075	+0.558		19.5	W	+0.875	+0.875
Juli 29.	16.6	W	+0.500	+0.500	Juli 31.	16.6	W	+0.70	+0.700
	16.9	O	+0.425	+1.008		16.65	W	+0.45	+0.450
	17.1	O	0.000	+0.483		16.7	W	+0.625	+0.625
	17.9	W	+0.80	+0.800		16.9	O	+0.725	+1.208
	18.0	W	+1.05	+1.050		17.0	O	+0.475	+0.958
	18.1	O	+0.175	+0.658		17.5	O	+0.80	+1.283
	18.2	O	+0.325	+0.808		17.9	W	+0.500	+0.500
	19.1	O	+0.20	+0.683		18.1	O	+0.725	+1.208
	19.2	O	+0.70	+1.183		18.2	O	+0.60	+1.083
	19.4	O	+0.30	+0.783		19.1	O	+0.275	+0.758
	20.4	W	+0.575	+0.575		19.3	O	+0.275	+0.758
	20.7	W	+0.825	+0.825		19.5	O	+0.20	+0.683
	21.2	O	+0.25	+0.633		19.6	W	+0.675	+0.675
	21.3	O	+0.975	+1.458		19.8	W	+0.700	+0.700
	21.4	O	+0.55	+1.033		20.1	W	+0.650	+0.650
	21.5	O	+0.65	+1.133		20.2	O	+0.15	+0.633
	21.8	W	+0.80	+0.800		20.3	W	+1.05	+1.050
Juli 30.	16.6	O	+0.875	+1.358		20.4	W	+0.875	+0.875
	16.7	O	+0.55	+1.133		20.6	W	+0.90	+0.900
	16.9	W	+0.50	+0.500		21.4	O	+0.35	+0.833
	17.5	O	+0.50	+0.983		21.5	O	+0.575	+1.058
	17.6	O	+0.60	+1.083		21.8	W	+1.25	+1.250
	17.8	O	+0.30	+0.783		21.9	W	+1.05	+1.050
	17.9	O	+0.10	+0.583					

Die Nivellirungen wurden zuerst für jeden Abend zu Mitteln vereinigt und zwar für diejenigen Abende, an welchen alle Beobachtungen gelangen, zu zwei gesonderten Mitteln, das eine aus den Nivellirungen vor den telegraphischen Operationen, das andere aus den Nivellirungen nach denselben, selbige sind in Tabelle VII gegeben.

Tabelle VII. Mittel der Neigungen.

1873.	Mittel der Zeiten.	Mittel der Neigung bezogen auf Kreis *West*.
Juli 8.	20ʰ.3	+0ᵖ.072
- 9.	17.5	+0.676
- 10.	17.2	+0.743
- 11.	17.5	+1.233
- 13.	17.6	+1.267
	20.4	+1.156
- 14.	16.9	+1.020
- 15.	17.8	+1.054
- 16.	17.8	+0.421
- 17.	17.4	+0.429
	20.4	+0.499
- 21.	17.4	+1.128
	20.4	+0.923
- 22.	17.4	+0.665
	20.4	+0.955
- 23.	17.4	+0.593
	20.4	+0.437
- 24.	17.0	+0.272
- 25.	17.4	+0.430
	20.4	+0.369
- 29.	17.4	+0.758
	20.4	+0.911
- 30.	17.4	+0.902
	19.3	+0.938
- 31.	17.4	+0.891
	20.4	+0.848

Aus der Differenz der in dieser Tabelle enthaltenen Mittel finden sich als die Variation der Neigung für die Tage, an welchen beide Zeitbestimmungen erhalten sind, folgende Werthe:

Tabelle VIII. Variation der Neigung.

1873.	Zeit-Intervall.	Variation.
Juli 13.	2ʰ.8	−0ᵖ.111
- 17.	3.0	+0.070
- 21.	3.0	−0.205
- 22.	3.0	+0.290
- 23.	3.0	−0.156
- 25.	3.0	−0.061
- 29.	3.0	+0.153
- 30.	1.9	+0.036
- 31.	3.0	−0.043

Die Summe der Variation ist in 25,7 Stunden: —$0^p.027$
also in einer Stunde nur: —$0^p.001$
so dass die in Tabelle VII erhaltenen Mittel der Neigung für die Dauer jeder Zeitbestimmung beibehalten werden konnten. Für jeden Abend wäre sogar nur ein Mittel zu bilden nöthig gewesen, es wurde aber vorgezogen, eine Trennung durch die telegraphischen Arbeiten eintreten zu lassen. Die Neigung ist jedoch noch wegen Ungleichheit der Zapfen zu corrigiren und in Zeit zu verwandeln.

Die Zapfen-Correction ist für Kreis West: —$0^p.121$
Kreis Ost: —0.362
und mit dem Werthe eines Theiles zu $0^s.100$ ergibt sich für die Beobachtungstage die Neigung:

Tabelle IX. Angenommene Neigung.

1873.	Kreis *West.* Erste Zeitbest.	Kreis *Ost.* Erste Zeitbest.	Kreis *West.* Zweite Zeitbest.	Kreis *Ost.* Zweite Zeitbest.
Juli 13.	$+0^s.115$	$+0^s.090$	$+0^s.104$	$+0^s.079$
- 17.	+0.031	+0.007	+0.038	+0.014
- 21.	+0.101	+0.077	+0.080	+0.056
- 22.	+0.054	+0.030	+0.083	+0.059
- 23.	+0.047	+0.023	+0.032	+0.008
- 25.	+0.031	+0.007	+0.025	+0.001
- 29.	+0.064	+0.040	+0.079	+0.055
- 30.	+0.078	+0.054	+0.082	+0.058
- 31.	+0.077	+0.053	+0.073	+0.049

Der wahrscheinliche Fehler einer Nivellirung, aus der Tabelle VI und VII berechnet, gibt

$$\pm 0^p.17 = \pm 0^s.017,$$

der einer angenommenen Neigung in Tabelle IX, da zu jedem Werthe im Durchschnitt 8 Nivellirungen verwandt sind,

$$\pm 0^p.06 = \pm 0^s.006$$

b. Die Collimation.

Die Collimation wurde aus den Polsternbeobachtungen in beiden Kreislagen abgeleitet und ist, wenn T und T′ die wegen der Neigung corrigirten Durchgangszeiten durch den Mittelfaden in Kreislage West und Kreislage Ost bezeichnen, der Collimationsfehler

$$c = \mp \frac{T - T'}{2 \sec \delta}$$

wo das obere Zeichen für obere, das untere für untere Culmination gilt.

Die Tabelle X enthält die dazu gehörigen Daten.

Tabelle X. Ableitung des Collimationsfehlers am Instrument in Leipzig.

Tag.	Polstern	Durchgangszeit Kreis West.	Corr. für i.	Durchgangszeit Kreis Ost.	Corr. für i.	Durchgangszeit corr. für i. W	O	W—O	Collimation.
Juli 13.	I	$16^{h}\ 48^{m}\ 27^{s}.98$	$+0^{s}.73$	$16^{h}\ 48^{m}\ 26^{s}.05$	$+0^{s}.57$	$28^{s}.71$	$26^{s}.62$	$+\ 2^{s}.09$	$-0^{s}.141$
	II	18 2 53.29	1.59	18 2 50.44	1.25	54.88	51.69	3.19	0.095
	III	19 41 29.91	4.39	19 41 20.31	3.38	34.30	23.69	10.61	0.099
	IV	21 41 10.26	0.77	21 41 9.87	0.59	11.03	10.46	0.57	0.033
- 17.	I	16 48 18.20	+0.20	16 48 20.14	+0.04	18.40	20.18	− 1.78	+0.120*)
	II	18 2 45.50	0.43	18 2 51.52	0.10	45.93	51.62	5.69	0.168
	III	19 41 39.77	1.61	19 41 55.77	0.59	41.38	56.36	14.98	0.141
	IV	21 41 2.63	0.28	21 41 5.06	0.10	2.91	5.16	2.25	0.128
- 21.	I	16 48 12.68	+0.64	16 48 14.32	+0.49	13.32	14.81	− 1.49	+0.101
	II	18 2 40.93	1.39	18 2 45.08	1.06	42.32	46.14	3.82	0.113
	III	19 41 33.09	3.38	19 41 48.06	2.37	36.47	50.43	13.96	0.131
	IV	21 40 57.80	0.59	21 41 0.36	0.42	58.39	0.78	2.39	0.136
- 22.	I	16 48 11.68	+0.34	16 48 13.22	+0.19	12.02	13.41	− 1.39	+0.094
	II	18 2 40.84	0.74	18 2 44.86	0.41	41.58	45.27	3.69	0.109
	III	19 41 32.89	3.51	19 41 46.01	2.50	36.40	48.51	12.11	0.114
	IV	21 40 57.53	0.62	21 40 59.03	0.45	58.15	59.48	1.33	0.079
- 23.	I	16 48 10.95	+0.30	16 48 12.19	+0.15	11.25	12.34	− 1.09	+0.074
	II	18 2 39.98	0.65	18 2 42.89	0.32	40.63	43.21	2.58	0.076
	III	19 41 35.78	1.39	19 41 45.98	0.38	37.17	46.36	9.19	0.086
	IV	21 40 56.76	0.24	21 40 59.04	0.06	57.00	59.10	2.10	0.119
- 25.	I	16 48 7.75	+0.20	16 48 9.06	+0.04	7.95	9.10	− 1.15	+0.078
	II	18 2 36.63	0.43	18 2 38.93	0.10	37.06	39.03	1.97	0.058
	III	19 41 31.36	1.06	19 41 41.47	0.04	32.42	41.51	9.09	0.085
	IV	21 40 53.41	0.19	21 40 55.17	0.01	53.60	55.18	1.58	0.094
- 29.	II	18 2 31.00	+0.87	18 2 33.80	+0.54	31.87	34.34	− 2.47	+0.073
	III	19 41 26.61	3.38	19 41 36.17	2.36	29.99	38.53	8.54	0.080
	IV	21 40 48.68	0.59	21 40 51.03	0.41	49.27	51.44	2.17	0.124
- 30.	I	16 48 0.42	+0.50	16 48 2.31	+0.35	0.92	2.66	− 1.67	+0.117
	II	18 2 28.40	1.08	18 2 32.18	0.75	29.48	32.93	3.45	0.102
- 31.	I	16 47 58.69	+0.49	16 48 0.52	+0.33	59.18	0.85	− 1.74	+0.113
	II	18 2 26.79	1.06	18 2 31.57	0.72	27.85	32.29	4.44	0.131
	III	19 41 21.34	3.08	19 41 35.81	2.07	24.42	37.88	13.46	0.126
	IV	21 40 45.84	0.54	21 40 48.40	0.37	46.38	48.77	2.39	0.137

Die daraus abgeleiteten Mittel aus je 2 Polsternen resp. die Tagesmittel gibt Tabelle XI.

*) Am 15. Juli wurde der Collimationsfehler corrigirt.

Tabelle XI. Mittel der Collimation.

Tag.	Uhrzeit in Leipzig.	Mittel aus je 2 Polsternen.	Zeit.	Tagesmittel.
Juli 13.	$17^h.4$	$-0^s.118$	$19^h.05$	$-0^s.092$
	20.7	−0.066		
- 17.	17.4	+0.144	19.05	+0.140
	20.7	0.135		
- 21.	17.4	+0.107	19.05	+0.120
	20.7	0.134		
- 22.	17.4	+0.102	19.05	+0.099
	20.7	0.097		
- 23.	17.4	+0.075	19.05	+0.089
	20.7	0.103		
- 25.	17.4	+0.068	19.05	+0.079
	20.7	0.090		
- 29.	18.0	+0.073	19.8	+0.092
	20.7	0.102		
- 30.	17.4	—	17.4	+0.110
- 31.	17.4	+0.122	19.05	+0.127
	20.7	0.132		

Hieraus geht eine geringe der Zeit proportionale Aenderung der Collimation hervor. Es findet sich nämlich:

Tabelle XII. Variation der Collimation.

Juli 13.	in $3^h.3$	$+0^s.052$
- 17.	3.3	−0.009
- 21.	3.3	+0.027
- 22.	3.3	−0.005
- 23.	3.3	+0.028
- 25.	3.3	+0.022
- 29.	2.7	+0.029
- 31.	3.3	+0.010

Also in $25^h.8 = 0^s.154$ und in 1 Stunde $= +0^s.0060$.

Fast genau derselbe Werth, nämlich $0^s.057$ findet sich, wenn man die Tagesmittel nimmt und aus diesen und der Tabelle X die Variation ableitet.

Der Werth der Variation ist zwar nicht sehr bedeutend, konnte aber doch nicht vernachlässigt werden; es sind daher die in Tabelle XI gegebenen Werthe der Tagesmittel für die Collimation wegen der Variation corrigirt und die so verbesserten Werthe in Tabelle XIII bei der Reduction der Zeitsterne in der Beobachtungstabelle angenommen. Da die ersten Zeitsterne innerhalb 0.6 Stunde, die letzten innerhalb 0.75 Stunde hintereinander folgten, konnte für diese kurze Dauer der Collimationsfehler als constant betrachtet werden. Für die Polsterne wurde bei Ableitung des Azimuths das Mittel aus Kreislage Ost und West genommen.

Tabelle XIII. Angenommene Collimationsfehler.

1873.	Zeitstern 1—10.		Zeitstern 11—21.	
	Kr. West.	Kr. Ost.	Kr. West.	Kr. Ost.
Juli 13.	$-0^s.102$	$+0^s.102$	$-0^s.084$	$+0^s.084$
- 17.	+0.130	−0.130	+0.148	−0.148
- 21.	+0.110	−0.110	+0.128	−0.128
- 22.	+0.089	−0.089	+0.107	−0.107
- 23.	+0.079	−0.079	+0.097	−0.097
- 25.	+0.069	−0.069	+0.087	−0.087
- 29.	+0.077	−0.077	+0.095	−0.095
- 30.	+0.109	−0.109	+0.127	−0.127
- 31.	+0.117	−0.117	+0.135	−0.135

Der wahrscheinliche Fehler eines Collimationswerthes ergibt sich aus Tabelle X und XIII mit Berücksichtigung der Variation zu $\pm 0^s.012$, der eines Tagesmittels aus 4 Werthen zu $\pm 0^s.006$.

Da an dem einen Abend mit Kreis West, an dem andern mit Kreis Ost begonnen wurde, finden sich die Mittel aus den Collimationsfehlern aus den Tagen, an welchen alle 4 Polsterne beobachtet sind.

Kreis West beginnt $c = +0^s.073$
„ Ost „ $c = +0.088$

also eine genügende Uebereinstimmung, da die Differenz die wahrscheinlichen Fehler nur wenig übersteigt.

Die Richtigkeit der angenommenen Fädendistanzen wird dadurch bestätigt.

c. Das Azimuth.

Zunächst wurden nach der bekannten Formel

$$k = \frac{(\alpha' - T') - (\alpha - T)}{a' - a}$$

wo a und a' die Coefficienten des Azimuths k für 2 Sterne, T, T' die wegen Neigung und Collimation corrigirten Durchgangszeiten, α und α' die scheinbaren Rectascensionen der Sterne bezeichnet, mit den aus der Tabelle III entnommenen scheinbaren Oertern der Polsterne, die wegen der täglichen Aberration und den noch von der Mondlänge abhängigen Gliedern verbessert sind und der aus Tabelle IV angenommenen Position der beiden Sterne α Ophiuchi und ζ Cygni, verbessert wegen der täglichen Aberration, die vorläufigen Azimuthe abgeleitet.

Alle Zahlen zu dieser Ableitung, auch die scheinbaren Oerter der Sterne sind in Tabelle XIV enthalten.

Tag	Polstern.	Durchgangszeit der Polsterne corr. wg. i u. c.	Reduct. d. Aug. u. Ohr-Scala auf d. Rgstr.-Sc.	T' Durchgangszeit bzg. auf d. Rgstr.-Scala	α'	α'—T'	Zeitstern.	T Durchgangszeit der Zeitsterne corr. wg. i. c. u. dU.	α	α—T	α'—T' — (a—T)	Azimuth k.
Juli 13	I	16ʰ48ᵐ 27ˢ.67	+0ˢ.25	48ᵐ 27ˢ.92	16ʰ59ᵐ 10ˢ.62	10ᵐ 42ˢ.70	6	17ʰ18ᵐ 21ˢ.04	17ʰ 29ᵐ 4ˢ.39	10ᵐ 43ˢ.35	— 0ˢ.65	+0ˢ.146
	II	18 2 53.29	+0.25	2 53.54	18 13 34.59	10 41.05					— 2.30	+0.221
	III	19 41 29.00	+0.25	41 29.25	19 52 4.56	10 35.31	17	20 56 50.33	21 7 33.85	10 43.52	— 8.21	+0.249
	IV	21 41 10.75	+0.25	41 11.00	21 51 53.89	10 42.89					— 0.63	+0.124
- 17	I	16 48 19.29	+0.25	48 19.54	16 59 10.13	10 50.59	6	17 18 7.77	17 29 4.38	10 56.61	— 6.02	+1.353
	II	18 2 48.78	+0.25	2 49.03	18 13 33.91	10 44.88					—11.73	+1.128
	III	19 41 48.87	+0.25	41 49.12	19 52 4.21	10 15.12	17	20 56 37.78	21 7 33.92	10 56.14	—41.02	+1.307
	IV	21 41 4.04	+0.25	41 4.29	21 51 54.21	10 49.92					— 6.22	+1.224
- 21	I	16 48 14.07	+0.35	48 14.42	16 59 9.63	10 55.21	6	17 18 3.34	17 29 4.37	11 1.03	— 5.82	+1 308
	II	18 2 44.23	+0.35	2 44.58	18 13 32.94	10 48.36					—12.67	+1.218
	III	19 41 43.45	+0.35	41 43.80	19 52 3.08	10 19.28	17	20 56 33.02	21 7 33.98	11 0.96	—41.68	+1.267
	IV	21 40 59.58	+0.35	40 59.93	21 51 54.49	10 54.56					— 6.40	+1.260
- 22	I	16 48 12.72	+0.35	48 13.07	16 59 9.50	10 56.43	6	17 18 2.26	17 29 4.36	11 2.10	— 5.67	+1.274
	II	18 2 43.43	+0.35	2 43.78	18 13 32.67	10 48.89					—13.21	+1.270
	III	19 41 42.46	+0.35	41 42.81	19 52 2.64	10 19.83	17	20 56 31.92	21 7 33.99	11 2.07	—42.24	+1.284
	IV	21 40 58.82	+0.35	40 59.17	21 51 54.54	10 55.37					— 6.70	+1.319
- 23	I	16 48 11.80	+0.35	48 12.15	16 59 9.36	10 57.21	6	17 18 0.99	17 29 4.36	11 3.37	— 6.16	+1.384
	II	18 2 41.92	+0.35	2 42.27	18 13 32.40	10 50.13					—13.24	+1.273
	III	19 41 41.76	+0.35	41 42.11	19 52 2.18	10 20.07	17	20 56 30.73	21 7 34.00	11 3.27	—43.20	+1.313
	IV	21 40 58.05	+0.35	40 58.40	21 51 54.60	10 56.20					— 7.07	+1.313
- 25	I	16 48 8.53	+0.35	48 8.88	16 59 9.08	11 0.20	6	17 17 58.02	17 29 4.35	11 6.33	— 6.13	+1.378
	II	18 2 38.05	+0.35	2 38.40	18 13 31.88	10 53.48					—12.85	+1.235
	III	19 41 36.97	+0.35	41 37.32	19 52 1.29	10 23.97	17	20 56 27.79	21 7 34.03	11 6.24	—42.27	+1.284
	IV	21 40 54.39	+0.35	40 54.74	21 51 54.71	10 59.97					— 6.27	+1.224
- 29	II	18 2 33.11	+0.30	2 33.41	18 13 30.91	10 57.50	6	17 17 53.50	17 29 4.32	11 10.82	—13.32	+1.282
	III	19 41 33.26	+0.30	41 34.56	19 51 59.78	10 25.22	17	20 56 23.39	21 7 34.08	11 10.69	—45.47	+1.381
	IV	21 40 50.36	+0.30	40 50.66	21 51 54.88	11 4.22					— 6.47	+1.273
- 30	I	16 48 1.79	+0.30	48 2.09	16 59 8.36	11 6.27	6	17 17 51.45	17 29 4.31	11 12.86	— 6.59	+1.481
	II	18 2 31.21	+0.30	2 31.51	18 13 30.66	10 59.15					—13.71	+1.318
- 31	I	16 48 0.02	+0.30	48 0.32	16 59 8.21	11 7.89	6	17 17 50.51	17 29 4.30	11 13.79	— 5.90	+1.326
	II	18 2 30.07	+0.30	2 30.37	18 13 30.39	11 0.02					—13.77	+1.325
	III	19 41 31.15	+0.30	41 31.45	19 51 59.06	10 27.61	17	20 56 20.27	21 7 34.10	11 13.83	—46.22	+1.405
	IV	21 40 47.58	+0.30	40 47.88	21 51 54.96	11 7.08					— 6.75	+1.329

Die aus den einzelnen Polsternen gefundenen Werthe der Azimuthe weichen zwar sowohl hier als auch bei dem Münchener Instrumente von einander ab und ist besonders die Differenz zwischen dem Azimuth aus ε Ursae minoris und δ Ursae minoris auffallend, ein regelmässiger Gang ist aber nicht vorhanden und ist daher wohl der grösste Theil der Differenz den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben. Da die Zeitsterne in der Mitte zwischen je zwei Polsternen beobachtet sind, schien es am einfachsten, als Azimuth für jene das Mittel aus den beiden Azimuthen der Polsterne anzunehmen, und ist selbiges zunächst gleich bei Polstern I und II geschehen und damit die Azimuthcorrectionen der ersten 10 Zeitsterne berechnet.

Das Azimuth aus λ Ursae minoris mit dessen Position aus dem Nautical Almanac stimmte fast vollständig mit dem Mittel des Azimuthes aus den beiden ersten Polsternen sowohl in Leipzig als in München überein und scheint daraus hervorzugehen, dass eine bemerkenswerthe Aenderung des Azimuths während der Beobachtungszeiten nicht vorgekommen ist. Aber das Azimuth, abgeleitet aus der Position des letzten Polsterns, wie selbige aus dem Carrington-Catalog folgte, zeigte sich an allen Tagen zu klein und ist daher, wie oben schon gesagt, die Position dieses Sternes um

$$+0^s\!.50$$

vergrössert, wodurch eine fast vollständige Uebereinstimmung der Azimuthcorrection aus diesem Stern mit dem aus den andern Polsternen herauskömmt.

Mit dem Mittel des gefundenen Azimuthes aus λ Ursae min. und Polstern IV Carrington mit der angebrachten Verbesserung der Position sind dann die Correctionen des Azimuthes für die zweite Reihe der Zeitsterne berechnet. Mit dem Uhrstande aus α Ophiuchi und ζ Cygni sind die Positionen der Zeitsterne in der Tabelle II erhalten, wobei auch die Variation des Uhrstandes, die sich für jeden Abend aus den Uhrständen von α Ophiuchi und ζ Cygni fand, berücksichtigt wurde.

Nachdem mit den definitiven Neigungen aus Tabelle IX, den Collimationsfehlern aus Tabelle XIII und den vorläufigen Azimuthalfehlern alle Beobachtungen auf den Meridian reducirt, wurden dann mit den Positionen der Zeitsterne in Tabelle IV mit Berücksichtigung der täglichen

Aberration, die Uhrstände für jeden einzelnen Stern abgeleitet und aus diesem für die erste und zweite Zeitbestimmung das Mittel genommen. Für die Zeiten der Passagen der Polsterne wurden dann mit dem gefundenen Uhrgange die Uhrstände interpolirt und die definitiven Azimuthe abgeleitet, welche in Tabelle XV enthalten sind.

Tabelle XV. Definitive Ableitung der Azimuthe am Instrument in Leipzig.

Tag.	Polst.	Durchgangszeit T′ corr. weg i u. c.	α'	α'—T′	$\triangle$t	α'-T′-$\triangle$t	k
Juli 13.	I	16h 48m 27s.92	16h 59m 10s.62	10m 42s.70	+10m 43s.21	— 0s.51	+0s.135
	II	18 2 53.54	18 13 34.59	41.05	43.27	— 2.22	+0.227
	III	19 41 29.25	19 52 4.56	35.31	43.35	— 8.04	+0.247
	IV	21 41 11.00	21 51 53.89	42.89	43.45	— 0.56	+0.122
- 17.	I	16 48 19.54	16 59 10.13	10 50.59	+10 55.69	— 5.10	+1.339
	II	18 2 49.03	18 13 33.91	44.88	55.74	—10.86	+1.114
	III	19 41 49.12	19 52 4.24	15.12	55.82	—40.70	+1.252
	IV	21 41 4.29	21 51 54.21	49.92	55.91	— 5.99	+1.287
- 21.	I	16 48 14.42	16 59 9.63	10 55.21	+11 0.15	— 4.94	+1.297
	II	18 2 44.58	18 13 32.94	48.36	0.21	—11.85	+1.214
	III	19 41 43.80	19 52 3.08	19.28	0.30	—41.02	+1.261
	IV	21 40 59.93	21 51 54.49	54.56	0.40	— 5.84	+1.254
- 22.	I	16 48 13.07	16 59 9.50	10 56.43	+11 1.29	— 4.86	+1.277
	II	18 2 43.78	18 13 32.67	48.89	1.32	—12.43	+1.272
	III	19 41 42.81	19 52 2.64	19.83	1.38	—41.55	+1.278
	IV	21 40 59.17	21 51 54.54	55.37	1.44	— 6.07	+1.304
- 23.	I	16 48 12.15	16 59 9.36	10 57.21	+11 2.37	— 5.16	+1.355
	II	18 2 42.27	18 13 32.40	50.13	2.44	—12.31	+1.261
	III	19 41 42.11	19 52 2.18	20.07	2.54	—42.47	+1.307
	IV	21 40 58.40	21 51 54.60	56.20	2.65	— 6.45	+1.385
- 25.	I	16 48 8.88	16 59 9.08	11 0.20	+11 5.40	— 5.20	+1.366
	II	18 2 38.40	18 13 31.88	10 53.48	5.51	—12.03	+1.233
	III	19 41 37.32	19 52 1.29	23.97	5.66	—41.69	+1.283
	IV	21 40 54.74	21 51 54.71	59.97	5.82	— 5.85	+1.256
- 29.	II	18 2 33.41	18 13 30.91	10 57.50	+11 10.07	—12.57	+1.288
	III	19 41 34.56	19 51 59.78	25.22	10.12	—44.90	+1.382
	IV	21 40 50.66	21 51 54.88	11 4.22	10.17	— 5.95	+1.277
- 30.	I	16 48 2.09	16 59 8.36	11 6.27	+11 11.94	— 5.67	+1.489
	II	18 2 31.51	18 13 30.66	10 59.15	12.07	—12.92	+1.324
- 31.	I	16 48 0.32	16 59 8.21	11 7.89	+11 12.97	— 5.08	+1.334
	II	18 2 30.37	18 13 30.39	11 0.02	13.04	—13.02	+1.324
	III	19 41 31.45	19 51 59.06	10 27.61	13.13	—45.52	+1.401
	IV	21 40 47.88	21 51 54.96	11 7.08	13.22	— 6.14	+1.318

Nimmt man aus je 2 Azimuthen die Mittel und aus diesen wieder die Tagesmittel, so hat man:

Tabelle XVI. **Mittel der Azimuthe.**

1873.	Uhrzeit.	Mittel.	Mittel.		1873.	Uhrzeit.	Mittel.	Mittel.	
Juli 13.	$17^{h}.4$	$+0^{s}.181$	$19^{h}.05$	$+0^{s}.183$	Juli 25.	$17^{h}.4$	$+1^{s}.300$	$19^{h}.05$	$+1^{s}.285$
	20.7	+0.185				20.7	+1.270		
- 17.	17.4	+1.227	19.05	+1.248					
	20.7	+1.269			- 29.	19.8	+1.316	19.80	+1.316
- 21.	17.4	+1.255	19.05	+1.256					
	20.7	+1.258			- 30.	17.4	+1.407	17.40	+1.407
- 22.	17.4	+1.274	19.05	+1.282					
	20.7	+1.291							
- 23.	17.4	+1.308	19.05	+1.327	- 31.	17.4	+1.329	19.05	+1.344
	20.7	+1.346				20.7	+1.360		

Leitet man jetzt die Variation des Azimuthes aus den ersten Mitteln ab, so ergiebt sich:

Tabelle XVII. Variation des Azimuthes.

1873.	Zeit-Intervall.	Variation.
Juli 13.	$3^{h}.3$	$+0^{s}.004$
- 17.	3.3	+0.042
- 21.	3.3	+0.003
- 22.	3.3	+0.017
- 23.	3.3	+0.038
- 25.	3.3	−0.030
- 31.	3.3	+0.031

Also in $23^{h}.1$ die Variation von $+0^{s}.105$,
mithin beträgt sie in einer Stunde nur +0.0045, welche geringe Variation für die Zwischenzeit von der ersten zur zweiten Zeitbestimmung angebracht, aber für die kurze Zeit jeder Zeitbestimmung selbst vernachlässigt ist.

An die in der letzten Columne enthaltenen Mittelwerthe die Variation angebracht, gibt die schliesslich für jeden Abend in Leipzig angewandten Azimuthalfehler:

Tabelle XVIII. Angenommene Azimuthfehler.

1873.	Zeitstern 1—10.	Zeitstern 11—21.
Juli 13.	$+0^s.175$	$+0^s.191$
- 17.	1.240	1.256
- 21.	1.248	1.264
- 22.	1.274	1.290
- 23.	1.319	1.335
- 25.	1.277	1.293
- 29.	1.304	1.320
- 30.	1.406	1.418
- 31.	1.336	1.352

Der wahrscheinliche Fehler eines Azimuthwerthes ergibt sich aus dieser Tabelle und Tabelle XIV zu

$$\pm 0^s.040,$$

also der eines der obigen Werthe aus 4 einzelnen Azimuthfehlern zu

$$\pm 0^s.020,$$

welche Grösse nahe mit früher gefundenen übereinstimmt und wovon ein Theil auf die Fehler der Rectascentionen der Polsterne fällt.

2. Das Instrument in München.

a. Die Neigung.

Es war in München das der Leipziger Sternwarte gehörige Instrument aufgestellt. Ein Theil der Libelle betrug nach neueren Bestimmungen $0^s.100$, die Ungleichheit der Zapfen fand sich aus den Beobachtungen selbst $W—O = —0^p.60$.

Die Nivellirungen sind sämmtlich und reducirt auf Kreis West in Tabelle XIX gegeben.

Tabelle XIX. Beobachtete Neigung am Münchener Instrument.

1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf KreisWest.	1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf KreisWest.
Juli 13.	$12^h.7$	W	$+0^p.550$	$+0^p.550$	Juli 17.	$21^h.5$	W	$-3^p.675$	$-3^p.675$
	12.8	W	+0.500	+0.500		21.6	W	−3.650	−3.650
	13.5	O	+2.000	+1.400		22.0	O	−2.600	−3.200
	13.9	O	+2.400	+1.800	- 19.	16.6	W	−1.075	−1.075
	14.2	W	+1.425	+1.425		16.8	W	−1.475	−1.475
	16.8	W	+1.175	+1.175		16.9	W	−1.600	−1.600
	17.1	O	+1.775	+1.175		17.0	O	+0.425	−0.175
	17.8	W	+0.725	+0.725		17.1	O	+1.425	+0.825
	18.0	W	+0.975	+0.975		17.3	O	−1.425	−2.025
	18.4	O	+1.500	+0.900		17.6	W	−1.575	−1.575
	19.4	O	+1.275	+0.675		17.7	W	−1.500	−1.500
	19.6	O	+1.575	+0.975		17.8	W	−1.300	−1.300
	20.0	W	+0.400	+0.400	- 21.	16.6	W	+1.275	+1.275
	20.3	W	+0.600	+0.600		16.8	W	+1.300	+1.300
	20.6	W	+0.725	+0.725		16.9	W	+1.125	+1.125
	21.5	O	+1.600	+1.000		17.1	O	+1.400	+0.800
	21.6	O	+1.500	+0.900		17.3	O	+1.400	+0.800
	22.0	W	+0.450	+0.450		17.6	W	+0.850	+0.850
- 15.	14.7	O	−0.125	−0.725		17.8	W	+0.550	+0.550
	16.9	O	−0.950	−1.550		17.9	W	+0.800	+0.800
	17.1	W	−1.400	−1.400		18.1	W	+1.050	+1.050
	17.4	W	−1.325	−1.325		18.3	O	+1.275	+0.675
	17.8	O	−0.800	−1.400		18.4	O	+1.150	+0.550
- 16.	16.8	O	−0.500	−1.100		19.4	O	+1.175	+0.575
	16.9	O	−0.675	−1.275		19.6	O	+0.975	+0.375
	17.1	W	−1.775	−1.775		19.9	W	+1.800	+1.800
	17.8	O	−1.150	−1.750		20.1	W	+0.975	+0.975
	17.9	O	−1.150	−1.750		20.3	W	+0.825	+0.825
	18.4	W	−1.875	−1.875		20.6	W	+1.175	+1.175
	19.4	W	−1.500	−1.500		20.9	W	+1.225	+1.225
- 17.	15.2	O	−1.200	−1.800		21.3	O	+1.250	+0.650
	15.5	O	−1.200	−1.800		21.5	O	+0.900	+0.300
	15.7	O	−1.325	−1.925		21.6	O	+0.950	+0.350
	16.8	O	−1.350	−1.950		21.8	O	+1.025	+0.425
	17.1	W	−3.225	−3.225	- 22.	16.8	O	−0.350	−0.950
	17.8	O	−2.440	−3.040		16.9	O	−0.950	−1.550
	18.1	O	−2.225	−2.825		17.1	W	−0.675	−0.675
	18.2	O	−2.175	−2.775		17.3	W	−1.375	−1.375
	18.4	W	−3.500	−3.500		17.4	W	−0.775	−0.775
	19.1	W	−3.350	−3.350		17.7	O	−0.925	−1.525
	19.4	W	−3.100	−3.100		17.8	O	−1.000	−1.600
	19.5	W	−3.125	−3.125		17.9	O	−1.275	−1.875
	19.9	O	−2.475	−3.075		18.1	O	−1.025	−1.625
	20.1	O	−2.525	−3.125		18.4	W	−1.675	−1.675
	20.3	O	−2.575	−3.175		18.5	W	−1.975	−1.975
	20.6	O	−2.450	−3.050		19.4	W	−1.675	−1.675

1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.	1873.	Stern-zeit.	Kreis-lage.	Neigung.	Bezogen auf Kreis West.
Juli 22.	$19^h.6$	W	$-1^p.600$	$-1^p.600$	Juli 25.	$19^h.4$	W	$-2^p.175$	$-2^p.175$
	19.7	W	−1.600	−1.600		19.5	W	−1.950	−1.950
	19.9	O	−1.050	−1.650		19.6	W	−2.475	−2.475
	20.1	O	−1.600	−2.200		19.9	O	−1.800	−2.400
	20.3	O	−2.450	−3.050		20.3	O	−2.375	−2.975
	20.5	O	−2.350	−2.950		20.6	O	−3.175	−3.775
	20.6	O	−1.950	−2.550		20.7	O	−3.000	−3.600
	20.9	O	−2.475	−3.075		20.8	O	−2.575	−3.175
	21.0	O	−1.950	−2.550		21.0	O	−2.525	−3.125
	21.7	W	−2.025	−2.025		21.3	W	−2.600	−2.600
	21.8	W	−2.050	−2.050		21.5	W	−2.600	−2.600
	22.0	O	−2.475	−3.075		21.7	W	−2.650	−2.650
- 23.	16.7	W	−0.450	−0.450		21.8	W	−2.675	−2.675
	16.9	W	−0.300	−0.300		22.0	W	−2.775	−2.775
	17.0	O	−0.900	−1.500	- 29.	16.8	W	+1.100	+1.100
	17.1	O	−0.500	−1.000		17.1	O	+1.525	+0.925
	17.6	W	−0.800	−0.800		17.8	W	+0.300	+0.300
	17.8	W	−0.725	−0.725		18.1	W	+0.125	+0.125
	18.0	W	−0.875	−0.875		18.4	O	+0.775	+0.175
	18.1	W	−0.600	−0.600		19.4	O	+0.100	−0.500
	18.3	O	−0.925	−1.525		19.6	O	−0.050	−0.650
	18.4	O	−1.825	−2.425		19.9	W	−1.075	−1.075
	18.5	O	−1.225	−1.825		20.1	W	−0.725	−0.725
	19.4	O	−1.650	−2.250		20.3	W	−1.125	−1.125
	19.5	O	−1.750	−2.350		20.6	W	−0.925	−0.925
	19.7	O	−1.900	−2.500		21.5	O	−0.775	−1.375
	19.9	W	−1.900	−1.900		21.6	O	−0.825	−1.425
	20.3	W	−1.900	−1.900		22.0	W	−1.550	−1.550
	20.4	W	−2.100	−2.100	- 30.	16.8	O	−0.175	−0.775
	20.5	W	−2.250	−2.250		17.1	W	−0.900	−0.900
	20.8	W	−2.025	−2.025		17.8	O	−1.000	−1.600
	21.0	W	−1.375	−1.375		18.0	O	−0.900	−1.500
	21.3	O	−1.825	−2.425		18.4	W	−1.700	−1.700
	21.5	O	−1.975	−2.575	- 31.	16.8	W	−2.525	−2.525
	21.7	O	−2.125	−2.725		17.1	O	−1.750	−2.350
- 25.	16.7	O	−1.600	−2.200		17.8	W	−2.900	−2.900
	16.8	O	−1.375	−1.975		18.1	W	−2.425	−2.425
	16.9	O	−1.528	−2.128		18.4	O	−2.175	−2.775
	17.1	W	−1.575	−1.575		19.4	O	−2.500	−3.100
	17.3	W	−2.150	−2.150		19.6	O	−2.300	−2.900
	17.4	W	−2.100	−2.100		19.9	W	−3.250	−3.250
	18.0	O	−2.350	−2.950		20.2	W	−3.250	−3.250
	18.1	O	−1.900	−2.500		20.3	W	−3.525	−3.525
	18.2	O	−1.950	−2.550		21.5	O	−3.200	−3.800
	18.4	W	−2.200	−2.200		21.7	O	−3.300	−3.900
	18.5	W	−2.150	−2.150		22.0	W	−3.925	−3.925

Die beiden Mittel der Neigungen vor und nach den Signalen sind für die einzelnen Tage, wobei Juli 13 und 17 die vor $16^h.8$ angestellten Neigungen nicht mitgerechnet wurden:

Tabelle XX. Tagesmittel der Neigung.

1873.	Mittel der Zeiten.	Mittel der Neigung bezogen auf Kreis West.		
Juli 13.	$17^h.6$	$+0^p.990$	$19^h.10$	$+0^p.853$
	20.6	+0.716		
- 17.	17.7	—2.886	19.15	—3.070
	20.6	—3.253		
- 21.	17.5	+0.889	19.05	+0.839
	20.6	+0.789		
- 22.	17.6	—1.418	19.10	—1.865
	20.6	—2.312		
- 23.	17.7	—1.093	19.10	—1.646
	20.5	—2.198		
- 25.	17.6	—2.225	19.15	—2.503
	20.7	—2.782		
- 29.	17.6	+0.525	19.10	—0.257
	20.6	—1.039		
- 30.	17.6	—1.295	17.60	—1.295
- 31.	17.6	—2.595	19.10	—3.025
	20.6	—3.456		

Die Variation der Neigung aus der Tabelle XX gibt Tabelle XXI.

Tabelle XXI. Variation der Neigung.

Juli 13.	in $3^h.0$	$—0^p.174$
- 17.	2.9	—0.367
- 21.	3.1	—0.100
- 22.	3.0	—0.894
- 23.	2.8	—1.105
- 25.	3.1	—0.557
- 29.	3.0	—1.564
- 31.	3.0	—0.861

Die Summe der Variation ist in $23^h.9$ Stunden $= -5^p.622$
also in 1 Stunde $= -0^p.235$

welche Variation so bedeutend ist, dass sie nicht vernachlässigt werden konnte, und es wurden daher für die Polsterne sowohl, als die Zeitsterne die Neigungen berechnet nach der Formel:

$$\text{Neigung} = \text{mittlere Neigung} + \text{Variation } (t-T).$$

Für die Ungleichheit der Zapfen wurde bei Kreislage

West $+0^p.15$

Ost $+0.45$

angebracht und mit $1^p = 0^s.100$ wurde gefunden:

Tabelle XXII. Angenommene Neigung.

1873.	17h Kr. W.	17h Kr. O.	18h Kr. W.	18h Kr. O.	19h Kr. W.	19h Kr. O.
Juli 13.	$+0^s.150$	$+0^s.180$	$+0^s.126$	$+0^s.156$	$+0^s.103$	$+0^s.133$
- 17.	−0.244	−0.214	−0.268	−0.238	−0.291	−0.261
- 21.	+0.147	+0.177	+0.123	+0.153	+0.100	+0.130
- 22.	−0.121	−0.091	−0.145	−0.115	−0.168	−0.138
- 23.	−0.100	−0.070	−0.124	−0.094	−0.147	−0.117
- 25.	−0.185	−0.155	−0.209	−0.179	−0.232	−0.202
- 29.	+0.039	+0.069	+0.015	+0.045	−0.008	+0.022
- 30.	−0.100	−0.070	−0.124	−0.094	−0.147	−0.117
- 31.	−0.238	−0.208	−0.262	−0.232	−0.285	−0.255
	20h		21h		22h	
- 13.	$+0^s.080$	$+0^s.110$	$+0^s.056$	$+0^s.086$	$+0^s.033$	$+0^s.063$
- 17.	−0.314	−0.284	−0.338	−0.308	−0.361	−0.331
- 21.	+0.077	+0.107	+0.053	+0.083	+0.030	+0.060
- 22.	−0.191	−0.161	−0.215	−0.185	−0.238	−0.208
- 23.	−0.170	−0.140	−0.194	−0.164	−0.217	−0.187
- 25.	−0.255	−0.225	−0.279	−0.249	−0.303	−0.273
- 29.	−0.031	−0.001	−0.055	−0.025	−0.079	−0.049
- 31.	−0.308	−0.278	−0.332	−0.302	−0.355	−0.325

der wahrscheinliche Fehler einer Nivellirung ergibt sich zu

$\pm 0^p.30$,

der einer angenommenen Neigung in Tabelle XXII, da jeden Abend im Durchschnitt 17 Nivellirungen ausgeführt sind, zu:

$\pm 0^p.07 = \pm 0^s.007$,

b. Der Collimationsfehler.

wurde ganz ebenso wie der am Instrumente in Leipzig abgeleitet; es finden sich die Daten in Tabelle XXIII.

Tabelle XXIII. Ableitung des Collimationsfehlers am Instrument in München.

1873.	Polstern.	Durchgangszeit Kreis West.	Corr. für i.	Durchgangszeit Kreis Ost.	Corr. für i.	Durchgangszeit corr. für i. W	O	W—O	Collimation.
Juli 13.	I	16h 59m 15s.70	+ 1s.05	16h 59m 12s.20	+1s.23	16s.75	13s.43	+ 3s.32	—0s.223
	II	18 13 43.59	1.80	18 13 37.84	2.20	45.39	40.04	5.35	0.158
	III	19 52 39.93	3.51	19 52 15.96	4.72	43.44	20.68	22.76	0.214
	IV	21 52 0.73	0.21	21 51 56 93	0.42	0.94	57.35	3 59	0.204
- 17.	I	16 59 21.43	— 1.30	16 59 17.40	—1.11	20.13	16.29	+ 3.84	—0.260
	II	18 13 54.87	3.25	18 13 46.44	2.86	51.62	43.58	8.04	0.238
	III	19 52 59.01	11.91	19 52 37.12	10.70	47.10	26.42	20.68	0.194
	IV	21 52 6.90	2.52	21 52 2.78	2.31	4.38	0.47	3.91	0.223
- 21.	I	16 59 21.08	+ 1.02	16 59 17.14	+1.20	22.10	18.34	+ 3.76	—0.253
	II	18 13 48.93	1.73	18 13 43.13	2.13	50 66	45.26	5.40	0.159
	III	19 52 42.32	3.31	19 52 20.32	4.52	45.63	24.84	20.79	0.195
	IV	21 52 6.91	0.17	21 52 3.63	0.39	7.08	4.02	3.06	0.175
- 22.	I	16 59 22.97	— 0.64	16 59 20.23	—0.45	22.33	19.78	+ 2.55	—0.173
	II	18 13 55.42	1.84	18 13 48.58	1.44	53.58	47.14	6.44	0.191
	III	19 52 59.50	7.59	19 52 38.79	6.38	51.91	32.41	19.50	0.183
	IV	21 52 11.22	1.76	21 52 7.72	1.54	9.46	6.18	3.28	0.187
- 23.	I	16 59 23.60	— 0.47	16 59 20.53	—0.28	23.13	20.25	+ 2.88	—0.195
	II	18 13 55.38	1.47	18 13 47.97	1.08	53.91	46.89	7.02	0.207
	III	19 52 57.34	6.46	19 52 37.51	5.24	50.88	32.27	18.61	0.175
- 25.	I	16 59 27.78	— 1.03	16 59 24.40	—0.85	26.75	23.55	+ 3.20	—0.215
	II	18 13 58.64	2.69	18 13 51.19	2.29	55.95	48.90	7.05	0.208
	III	19 52 2.67	10.17	19 52 40.02	8.96	52 50	31.06	21.42	0.201
	IV	21 52 14.98	2.22	21 52 10.84	2.00	12.76	8.84	3.92	0.224
- 29.	I	16 59 28.81	+ 0.34	16 59 24.95	+0.53	29.15	25.48	+ 3.67	—0.249
	II	18 13 54.23	+ 0.28	18 13 47.19	+0.67	54.51	47.86	6.65	0.196
	III	19 52 42.47	— 1.13	19 52 18.84	+0.08	41.34	18.92	22.42	0.211
	IV	21 52 18.01	— 0.61	21 52 13.71	—0.40	17.40	13.31	4.09	0.233
- 30.	I	16 59 31.40	— 0.52	16 59 28 88	—0.34	30.88	28.54	+ 2.34	—0.157
	II	18 14 0.96	1.56	18 13 52.99	1.15	59.40	51.84	7.56	0.224
- 31.	I	16 59 34.81	— 1.34	16 59 30.65	—1.16	33.47	29.49	+ 3.98	—0.269
	II	18 14 2.42	3.36	18 13 56.09	2.96	59.06	53.13	5.93	0.176
	III	19 53 3.80	12.23	19 52 42.84	11.02	51.57	31.82	19.75	0.185
	IV	21 52 24.23	2.58	21 52 20.05	2.37	21.65	17.68	3.97	0.225

Nimmt man wieder aus je 2 Collimationsfehlern die Mittel und daraus, wieder die Mittel hat man:

Tabelle XXIV. Mittel der Collimationsfehler.

1873.	Uhrzeit in München.	Mittel aus je 2 Polsternen.	Zeit.	Tagesmittel.
Juli 13.	$17^h.6$	$-0^s.191$	$19^h.25$	$-0^s.200$
	20.9	0.209		
- 17.	17.6	0.249	19.25	0.229
	20.9	0.209		
- 21.	17.6	0.206	19.25	0.196
	20.9	0.185		
- 22.	17.6	0.182	19.25	0.184
	20.9	0.185		
- 23.	17.6	0.201	18.75	0.188
	19.9	0.175		
- 25.	17.6	0.211	19.25	0.212
	20.9	0.213		
- 29.	17.6	0.222	19.25	0.222
	20.9	0.222		
- 30.	17.6	0.190	17.60	0.190
- 31.	17.6	0.222	19.25	0.214
	20.9	0.205		

Hieraus folgt:

Tabelle XXV. Variation der Collimation.

Juli 13.	in $3^h.3$	$-0^s.018$
- 17.	3.3	+0.040
- 21.	3.3	+0.021
- 22.	3.3	−0.003
- 23.	2.3	+0.026
- 25.	3.3	−0.002
- 29.	3.3	0.000
- 31.	3.3	+0.017

Also in 25.4 Stunden $+0^s.081$, folglich in einer Stunde $+0^s.0032$, welcher Werth zwar noch kleiner ist, als am Leipziger Instrument, aber analog der dortigen Behandlung wurde auch hier die Variation für die Zwischenzeit der beiden Zeitbestimmungen berücksichtigt und angenommen:

Tabelle XXVI. Angenommene Collimationsfehler.

1873.	Zeitstern 1—10. Kr. West.	Zeitstern 1—10. Kr. Ost.	Zeitstern 11—21. Kr. West.	Zeitstern 11—21. Kr. Ost.
Juli 13.	$-0\overset{s}{.}194$	$+0\overset{s}{.}194$	$-0\overset{s}{.}205$	$+0\overset{s}{.}205$
- 17.	−0.223	+0.223	−0.234	+0.234
- 21.	−0.190	+0.190	−0.201	+0.201
- 22.	−0.178	+0.178	−0.189	+0.189
- 23.	−0.184	+0.184	−0.195	+0.195
- 25.	−0.206	+0.206	−0.217	+0.217
- 29.	−0.216	+0.216	−0.227	+0.227
- 30.	−0.189	+0.189	—	—
- 31.	−0.208	+0.208	−0.219	+0.219

Der wahrscheinliche Fehler eines Collimationsfehlers ergibt sich aus Tabelle XXIII und XXVI mit Berücksichtigung der Variation zu

$$\pm 0\overset{s}{.}020,$$

der eines Tagesmittels aus 4 Werthen ± 0.010.

Da an einem Abend mit Kreis West, am andern mit Kreis Ost begonnen wurde, finden sich die Mittel aus den Collimationsfehlern aus den Tagen, an welchen alle 4 Polsterne beobachtet sind:

wenn Kreis West beginnt, $c = -0\overset{s}{.}207$

- Ost - - $c = -0.209$

also eine absolute Uebereinstimmung, so dass auch die angenommenen Fadendistanzen richtig waren.

c. Das Azimuth.

Es wurde ganz eben so verfahren, als am Leipziger Instrument. Zuerst wurden aus den Polsternen und α Opchiuchi und ζ Cygni vorläufige Azimuthe abgeleitet und mit diesen die Sterne reducirt.

Alle benutzten und erhaltenen Zahlen sind in folgenden Tabellen enthalten.

Tabelle XXVII. Vorläufige Ableitung des Azimuths.

1873.	Polstern.	Durchgangszeit der Polsterne corr. wg. i u. c.	Reduct. d. Aug. u. Ohr-Scala auf d. Rgstr.-Sc.	T' Durchgangszeit bzg. auf d. Rgstr.-Scala	α'	α'—T'	Zeitstern.	T Durchgangszeit der Zeitsterne corr. wg. i. c. u. dU.	α	α—T	(α'—T') — (α—T)	Azimuth k.
Juli 13.	I	16h 59m 15.s09	+0.s51	59m 15.s60	59m 10.s62	— 4.s98	6	17h 29m 5.s90	29m 4.s39	— 1.s51	— 3.s47	+0.s730
	II	18 13 42.72	+0.51	13 43.23	13 34.61	8.62				— 1.51	— 7.11	0.646
	III	19 52 32.06	+0.51	52 32.57	52 4.61	27.96	17	21 7 35.40	7 33.86	— 1.54	—26.52	0.754
	IV	21 51 59.15	+0.51	51 59.66	51 53.89	5.77				— 1.54	— 4.23	0.779
- 17.	I	16 59 18.21	+0.51	59 18.72	59 10.13	— 8.59	6	17 29 7.95	29 4.38	— 3.57	— 5.02	1.057
	II	18 13 47.71	+0.51	13 48.22	13 33.93	14.29				— 3.57	—10.72	0.966
	III	19 52 36.76	+0.51	52 37.27	52 4.29	32.98	17	21 7 37.90	7 33.93	— 3.97	—29.01	0.825
	IV	21 52 2.43	+0.51	52 2.94	51 54.21	8.73				— 3.97	— 4.76	0.877
- 21.	I	16 59 20.22	+0.44	59 20.66	59 9.63	—11.03	6	29 11.66	29 4.37	— 7.29	— 3.74	0.787
	II	18 13 48.01	+0.44	13 48.45	13 32.96	15.49				— 7.29	— 8.20	0.739
	III	19 52 35.21	+0.44	52 35.65	52 3.13	32.52	17	7 41.34	7 33.99	— 7.35	—25.17	0.716
	IV	21 52 5.55	+0.44	52 5.99	51 54.49	11.50				— 7.35	— 4.15	0.765
- 22.	I	16 59 21.06	+0.44	59 21.50	59 9.50	—12.00	6	29 12.07	29 4.36	— 7.71	— 4.29	0.903
	II	18 13 50.36	+0.44	13 50.80	13 32.69	18.11				— 7.71	—10.40	0.937
	III	19 52 42.16	+0.44	52 42.60	52 2.69	39.91	17	7 42.29	7 34.00	— 8.29	—31.62	0.899
	IV	21 52 7.82	+0.44	52 8.26	51 54.54	13.72				— 8.29	— 5.43	1.001
- 23.	I	16 59 21.69	+0.44	59 22.13	59 9.36	—12.77	6	29 13.19	29 4.36	— 8.83	— 3.94	0.829
	II	18 13 50.40	+0.44	13 50.84	13 32.42	18.42				— 8.83	— 9.59	0.864
	III	19 52 41.58	+0.44	52 42.02	52 2.23	39.79	17	7 43.34	7 34.01	— 8.93	—30.46	0.866
- 25.	I	16 59 25.15	+0.44	59 25.59	59 9.08	—16.51	6	29 15.97	29 4.35	—11.62	— 4.89	1.029
	II	18 13 52.43	+0.44	13 52.87	13 31.90	20.97				—11.62	— 9.35	0.842
	III	19 52 41.78	+0.44	52 42.22	52 1.34	40.88	17	7 46.21	7 34.04	—12.17	—28.71	0.816
	IV	21 52 10.80	+0.44	51 11.24	51 54.71	16.53				—12.17	— 4.36	0.804
- 29.	I	16 59 27.07	+0.47	59 27.54	59 8.51	—19.03	6	29 22.03	29 4.35	—17.68	— 1.35	0.284
	II	18 13 51.19	+0.47	13 51.66	13 30.93	20.73				—17.68	— 3.05	0.275
	III	19 52 30.13	+0.47	52 30.60	51 59.83	30.77	17	7 52.27	7 34.09	—18.18	—12.59	0.359
	IV	21 52 15.36	+0.47	51 15.83	51 54.88	20.95				—18.18	— 2.77	0.517
- 30.	I	16 59 30.71	+0.47	59 30.18	59 8.36	—21.82	6	29 23.81	29 4.31	—19.50	— 2.32	0.488
	II	18 13 55.62	+0.47	13 56.09	13 30.68	25.41				—19.50	— 5.91	0.532
- 31.	I	16 59 31.83	+0.47	59 32.30	59 8.21	—24.09	6	29 25.27	29 4.30	—20.97	— 3.12	0.657
	II	18 13 56.10	+0.47	13 56.57	13 30.41	26.16				—20.97	— 5.19	0.468
	III	19 52 41.70	+0.47	52 42.17	51 59.11	43.06	17	7 55.55	7 34.11	—21.44	—21.62	0.615
	IV	21 52 19.67	+0.47	52 20.14	51 54.96	25.18				—21.44	— 3.74	0.689

Nachdem dann die Positionen der Sterne mit den Uhrständen aus α Ophiuchi und ζ Cygni, wie schon pag. 152 erwähnt, abgeleitet, wurden die Uhrstände aus allen Sternen hergeleitet, für die Zeiten der Passagen der Polsterne interpolirt und die definitiven Azimuthe gefunden. Die erhaltenen Werthe sind in Tabelle XXVIII gegeben.

Tabelle XXVIII. Definitive Ableitung der Azimuthe am Instrument in München.

1873.	Polst.	Durchgangszeit T′ corr. weg. i u. c.	α′	α′—T′	Δt	α′-T′-Δt	Azimuth k.
Juli 13.	I	$16^h 59^m 15^s.60$	$59^m 10^s.62$	— $4^s.98$	— $1^s.78$	— $3^s.20$	+$0^s.770$
	II	18 13 43.23	13 34.61	— 8.62	— 1.81	— 6.81	+0.648
	III	19 52 32.57	52 4.61	—27.96	— 1.87	—26.09	+0.749
	IV	21 51 59.66	51 53.89	— 5.77	— 1.94	— 3.83	+0.755
- 17.	I	16 59 18.72	59 10.13	— 8.59	— 4.18	— 4.41	+1.061
	II	18 13 48.22	13 33.93	—14.29	— 4.18	—10.11	+0.962
	III	19 52 37.27	52 4.29	—32.98	— 4.22	—28.76	+0.826
	IV	21 51 2.94	51 54.21	— 8.73	— 4.22	— 4.51	+0.891
- 21.	I	16 59 20.66	59 9.63	—11.03	— 7.58	— 3.45	+0.831
	II	18 13 48.45	13 32.96	—15.49	— 7.62	— 7.87	+0.749
	III	19 52 35.65	52 3.13	—32.52	— 7.67	—24.85	+0.714
	IV	21 52 5.99	51 54.49	—11.50	— 7.72	— 3.78	+0.745
- 22.	I	16 59 21.50	59 9.50	—12.00	— 8.27	— 3.73	+0.898
	II	18 13 50.80	13 32.69	—18.11	— 8.39	— 9.72	+0.925
	III	19 52 42.60	52 2.69	—39.91	— 8.57	—31.34	+0.900
	IV	21 52 8.26	51 54.54	—13.72	— 8.77	— 4.95	+0.977
- 23.	I	16 59 22.13	59 9.36	—12.77	— 9.23	— 3.54	+0.852
	II	18 13 50.84	13 32.42	—18.42	9.35	— 9.07	+0.863
	III	19 52 42.02	52 2.23	—39.79	— 9.52	—30.27	+0.869
- 25.	I	16 59 25.59	59 9.08	—16.51	—12.22	— 4.29	+1.033
	II	18 13 52.87	13 31.90	—20.97	—12.29	— 8.68	+0.826
	III	19 52 42.22	52 1.34	—40.88	—12.38	—28.50	+0.819
	IV	21 52 11.24	51 54.71	—16.53	—12.50	— 4.03	+0.796
- 29.	I	16 59 27.54	59 8.51	—19.03	—17.81	— 1.22	+0.293
	II	18 13 51.66	13 30.93	—20.73	—17.97	— 2.76	+0.262
	III	19 52 30.60	52 59.83	—30.77	—18.20	—12.57	+0.361
	IV	21 52 15.83	51 54.88	—20.95	—18.36	— 2.59	+0.511
- 30.	I	16 59 30.18	59 59.36	—21.82	—19.88	— 1.94	+0.467
	II	18 13 56.09	13 30.68	—25.41	—19.97	— 5.44	+0.517
- 31.	I	16 59 32.30	59 8.21	—24.09	—21.30	— 2.79	+0.671
	II	18 13 56.57	13 30.41	—26.16	—21.42	— 4.74	+0.452
	III	19 52 42.17	52 59.11	—43.06	—21.61	—21.45	+0.616
	IV	21 52 20.14	51 54.96	—25.18	—21.77	— 3.41	+0.673

Nimmt man aus je 2 Azimuthen der Polsterne die Mittel und die Tagesmittel, so hat man:

Tabelle XXIX. Mittel der Azimuthe.

1873.	Uhrzeit.	Mittel.	Tagesmittel.		1873.	Uhrzeit.	Mittel.	Tagesmittel.	
Juli 13.	$17^h.6$	$+0^s.709$	$19^h.25$	$+0^s.730$	Juli 25.	$17^h.6$	$+0^s.929$	$19^h.25$	$+0^s.868$
	20.9	0.752				20.9	0.807		
- 17.	17.6	1.011	19.25	+0.935	- 29.	17.6	0.278	19.25	+0.357
	20.9	0.859				20.9	0.436		
- 21.	17.6	0.790	19.25	+0.760	- 30.	17.6	0.492	17.60	+0.492
	20.9	0.730			- 31.	17.6	0.562	19.25	+0.603
- 22.	17.6	0.912	19.25	+0.925		20.9	0.644		
	20.9	0.938							
- 23.	17.6	0.857	19.25	+0.863					
	19.9	0.869							

Hieraus die Variation abgeleitet, gibt:

Tabelle XXX. Variation des Azimuths.

1873.	Zeit-Intervall.	Variation.
Juli 13.	$3^h.3$	$+0^s.043$
- 17.	3.3	—0.152
- 21.	3.3	—0.060
- 22.	3.3	+0.026
- 23.	2.3	+0.012
- 25.	3.3	—0.122
- 29.	3.3	+0.158
- 31.	3.3	+0.082

Also in $25^h.4$ die Variation —$0^s.013$,
in 1 Stunde —0.0005,

welche geringe Variation nicht nur für die Zeit der Culminationen jeder Reihe von Zeitsternen, sondern auch für die ganze Beobachtungszeit vernachlässigt werden konnte. Die Zeitsterne sind daher mit den obigen Azimuthen und zwar mit den Mittelwerthen jedes Tages reducirt.

Der wahrscheinliche Fehler eines Azimuthwerthes findet sich aus Tabelle XXVII und XXVIII zu

$\pm 0^s.050$

der eines Mittelwerthes zu ± 0.025,

wovon ein grosser Theil der Unsicherheit der Positionen der Polsterne zufällt.

Es sind für die Azimuthalfehler hier ebenso wie bei dem Instrumente in Leipzig die Tagesmittel und nicht die Mittelwerthe aus je 2 Polsternen angenommen. Es ist dadurch volle Conformität mit der Behandlung des Collimationsfehlers und der Neigung erreicht, und wegen der symmetrischen Vertheilung der Beobachtungen bleibt das Endresultat immer dasselbe, man mag bei den Azimuthalfehlern die einen oder die andern Mittel annehmen. Es lag mir daran, die wahrscheinlichen Fehler der Endresultate in keiner Weise durch Einführung von neuen Unbekannten zu verringern und habe ich die einfachste Methode und möglichst wenige Veränderungen in der Aufstellung der Instrumente annehmen wollen.

Die Veränderung der Azimuthalfehler von einem Abend zum andern hat seinen Grund in öfteren Correctionen der Neigung, wobei auch das Azimuth geändert wurde.

V. Ermittelung der Uhrdifferenzen in Leipzig und München aus den Registrir-Signalen.

Die Signale sind in ungleichen Intervallen gegeben, und zwar deshalb, um die Ablesungen auf den Registrirstreifen auf allen Theilen der Ablesungs-Scala zu haben und dadurch die etwaigen Ablesungsfehler zu eliminiren. Die Ablesungs-Scala ist eine Glasplatte mit 11 geraden Linien, die gegen einander geneigt sind, aber in der Richtung senkrecht auf die Mittellinie überall gleiche Intervallen zwischen sich haben. Je nach der Entfernung der Secundenpunkte von einander, die wegen der mangelhaften Bewegung der Papierstreifen von einander etwas differirte, wurde durch Verschieben der Glasscala das Intervall immer in 10 gleiche Theile getheilt, also die Zehntelsecunde direct abgelesen, die Hundertstelsecunde aber abgeschätzt.

In der folgenden Tabelle sind nicht die Ablesungen der Papierstreifen direct gegeben, sondern gleich die Differenz der Signalablesungen in Leipzig und München und die Ueberschrift „aus Leipzig" „aus München" bezeichnet, dass die Signale mit dem Taster in Leipzig oder in München gegeben wurden. Dass die Zahl der Signale nicht immer 40 beträgt, hat, wie schon oben gesagt, seinen Grund darin, dass nicht alle Signale genügend deutlich abzulesen waren.

Tabelle XXXI. Differenz der Signalablesungen in Leipzig und München.

Juli 13.				Juli 17.				Juli 21.				Juli 22.			
Aus München		Aus Leipzig		Aus München		Aus Leipzig		Aus München		Aus Leipzig		Aus München		Aus Leipzig	
7^m+		7^m+		7^m+		7^m+		7^m+		7^m+		7^m+		7^m+	
$28^s.24$	$28^s.27$	$28^s.29$	$28^s.25$	$42^s.79$	$42^s.75$	$42^s.75$	$42^s.82$	$50^s.60$	$50^s.49$	$50^s.48$	$50^s.50$	$52^s.35$	$52^s.29$	$52^s.34$	$52^s.48$
19	12	21	27	73	76	84	79	62	48	58	66	38	46	46	43
11	24	28	17	74	84	79	88	48	51	54	68	43	43	46	50
18	18	20	—	79	75	81	82	55	55	63	57	41	28	49	46
11	26	21		74	74	76	80	63	63	53	51	43	44	48	50
15	13	26		74	74	88	75	50	48	66	63	44	41	40	45
17	17	28		77	72	88	85	54	47	69	67	40	45	39	45
15	—	17		73	75	76	78	62	64	53	48	47	45	47	50
23		28		74	74	83	83	47	54	56	70	46	45	48	51
13		30		71	81	80	77	48	53	54	58	39	35	39	32
14		30		76	74	77	77	63	50	68	52	32	40	40	—
23		15		77	73	79	85	58	61	50	66	42	30	36	
27		29		70	75	89	82	48	59	50	—	40	—	48	
13		12		77	74	77	85	56	55	60		33		48	
12		30		76	75	79	80	64	—	69		32		45	
17		21		73	74	82	77	60		51		44		28	
16		29		78	73	77	83	57		65		40		44	
13		17		76	74	81	87	52		69		37		49	
14		27		82	69	77	77	58		66		33		39	
15		13		75	74	81	87	48		56		43		49	

Juli 23.				Juli 25.				Juli 29.				Juli 30.			
Aus München		Aus Leipzig		Aus München		Aus Leipzig		Aus München		Aus Leipzig		Aus München		Aus Leipzig	
7^m+		7^m+		8^m+		8^m+		8^m+		8^m+		8^m+		8^m+	
$54^s.47$	$54^s.63$	$54^s.50$	$54^s.55$	$0^s.38$	$0^s.30$	$0^s.33$	$0^s.37$	$11^s.22$	$11^s.07$	$11^s.23$	$11^s.21$	$15^s.12$	$15^s.01$	$15^s.15$	$15^s.14$
46	49	65	48	31	32	43	33	09	08	17	27	07	07	12	12
53	51	60	54	41	51	35	43	20	08	22	26	07	02	12	12
48	53	60	59	53	48	49	38	09	21	25	24	07	09	14	16
62	61	65	65	53	38	30	38	09	06	23	23	02	11	13	13
63	55	47	—	38	43	44	52	07	14	25	25	03	08	14	13
52	48	58		45	52	55	33	08	08	17	15	12	07	11	12
61	51	66		42	45	38	39	08	08	23	—	02	11	16	14
52	64	47		47	40	40	47	06		23		06	15	12	11
53	61	66		43	53	50	32	15		16		00	13	15	12
61	61	51		50	39	43	41	16		14		13	05	11	
52	61	63		46	49	42	37	22		26		06	15	15	
62	60	53		49	46	42	50	18		23		04	04	11	
53	62	52		38	34	47	49	07		23		00	05	12	
47	50	65		50	43	51	33	18		26		09	01	17	
60	63	50		47	33	33	50	21		23		14	09	13	
64	54	67		36	52	43	40	20		27		13	08	15	
55	65	61		33	40	50	48	06		26		07		12	
60	—	65		51	—	52	—	12		27		00		13	
60	—	67		48	—	36	—	19		27		00		12	

Juli 31.					
Aus München			Aus Leipzig		
8^m+		8^m+	8^m+		8^m+
$17^s.58$	$17^s.40$	$17^s.45$	$17^s.42$	$17^s.46$	$17^s.41$
36	37	42	51	35	43
42	42	40	46	40	43
42	42	44	44	49	45
41	41	41	36	44	43
38	38	36	42	41	43
42	44	41	50	42	42
36	54	40	47	48	44
42	39	—	44	46	42
52	41		48	49	45
42	57		45	50	48
43	37		58	37	44

Die in dieser Tabelle enthaltenen Uhrdifferenzen sind zu Mitteln vereinigt und die Uebereinstimmung der Uhrdifferenzen untereinander ist eine recht gute.

Es findet sich der wahrscheinliche Fehler einer Uhrdifferenz zu $\pm 0^s.03$, der eines Tagesmittels im Durchschnitt aus 64 Uhrdifferenzen zu $\pm 0^s.004$.

Die zu den Mitteln gehörigen Epochen der Zeiten sind, weil es vollständig hinreichend war, auf ganze Minuten abgerundet und in Münchener und Leipziger Uhrzeit gegeben.

Tabelle XXXII. Mittel der Uhrdifferenzen aus den registrirten Signalen.

1873.	Uhrzeit in Leipzig.	Uhrzeit in München.	Uhrdifferenzen aus den Signalen gegeben		Mittelwerth der Uhrdifferenzen.	Einfache Stromzeit.
			in München.	in Leipzig.		
Juli 13.	18^h48^m	18^h55^m	$-7^m28^s.173$	$-7^m28^s.235$	$-7^m28^s.204$	$+0^s.031$
- 17.	18 30	18 37	42.750	42.809	42.780	0.030
- 21.	18 37	18 44	50.550	50.592	50.571	0.021
- 22.	18 33	18 40	52.396	52.440	52.418	0.022
- 23.	18 35	18 42	54.564	54.584	54.574	0.010
- 25.	18 34	18 41	-8^m 0.433	-8^m 0.420	-8^m 0.427	0.007
- 29.	18 35	18 42	11.129	11.229	11.179	0.050
- 30.	18 34	18 41	15.069	15.131	15.100	0.031
- 31.	18 35	18 42	17.424	17.446	17.435	0.011

Das Mittel aus der letzten Columne für die Stromzeit ist $= +0^s.024$, und bei früheren Längenbestimmungen war die Stromzeit nahe dieselbe, so z. B. bei

Berlin-Wien $= +0^s.022$
Leipzig-Gotha $= +0.019$
Leipzig-Berlin $= +0.019$

VI. Die Beobachtungen der Zeitsterne.

Die Beobachtungen der auf den beiden Stationen benützten Polsterne sind schon bei den früheren Tabellen X, XIV, XXIII und XXVII bei Ableitung der Collimationsfehler und Azimuthe gegeben. Die Tabellen hier enthalten links die Beobachtungen der Zeitsterne in München, rechts die Beobachtungen der Zeitsterne in Leipzig, und zwar die erste Columne die Nummer des Sterns, die zweite die Kreislage, die dritte die Durch-

gangszeit durch den Mittelfaden, die vierte die Zahl der beobachteten Fäden, die fünfte die Instrumentalcorrection, die sechste die Zeit der Culmination, die siebente den Uhrstand.

Nennen wir die Längendifferenz l, die Rectascension eines Sternes α, welche wegen der geringen Grösse von l für beide Orte zur Zeit der Culmination dieselbe ist, die Ortszeiten der Signale in Leipzig und München U und u, die Uhrstände zu dieser Zeit $\triangle T$ und $\triangle t$, die Uhrzeiten und Uhrstände zur Zeit der Culmination der Sterne T und t und $\triangle T'$ und $\triangle t'$, die stündlichen Uhrgänge dU und du, so ist, wenn S und S' die wirklichen Sternzeiten der Signale bezeichnen:

$$S = S' + l, \quad S = U + \triangle T, \quad S' = u + \triangle t$$

$$\text{mithin } l = (U - u) + \triangle T - \triangle t = U_0 + \triangle T - \triangle t$$

wo U_0 die in Tabelle XXXII gefundene Uhrdifferenz der Signale bedeutet.

Ferner ist $\alpha = T + \triangle T' = t + \triangle t'$ und $\triangle T' = \triangle T + (T - U)\, dU$ und $\triangle t' = \triangle t + (t - u)\, du$, wofür man, da $\triangle T'$ und $\triangle T$, sowie $\triangle t'$ und $\triangle t$ nur um geringe Grössen von einander verschieden sind, auch schreiben darf

$$\triangle T' = \triangle T + (\alpha - S)\, dU, \quad \triangle t' = \triangle t + (\alpha - S')\, du = \triangle t + (\alpha - S)\, du + l du,$$

sodass die Differenz der Uhrstände zur Zeit der Culmination

$$\triangle T' - \triangle t' = \triangle T - \triangle t + (\alpha - S)(dU - du) - l du,$$

$$\text{mithin ist } l = (\triangle T' - \triangle t') + U_0 - (\alpha - S)(dU - du) + l du.$$

Die Differenz der Uhrgänge $\triangle T' - \triangle t'$ ist in der Columne 8 auf der linken Seite. U_0 ist in Tabelle XXXII gegeben, die Grösse ldu ist, da der stündliche Uhrgang (du) für München nie $-0^s.08$ überschreitet, höchstens $-0^s.004$ und im Durchschnitt $-0^s.003$ und zum Schlusse berücksichtigt.

Die Differenz der Uhrgänge dU—du ist aus den Beobachtungen selbst ermittelt, es sind aus den Uhrdifferenzen der Sterne 1—10 und 10—21 die Mittel genommen und aus der Differenz die Uhrgänge abgeleitet und haben sich für dU—du die nachfolgenden Werthe gefunden:

Tabelle XXXIII. Differenz der stündlichen Uhrgänge.

1873.	dU—du.	1873.	dU—du.	1873.	dU—du.
Juli 13.	$+0^s.080$	Juli 22.	+0.112	Juli 29.	+0.151
- 17.	0.082	- 23.	0.161	- 30.	0.140
- 21.	0.084	- 25.	0.156	- 31.	0.136

Endlich ist in der 8. Columne auf der rechten Seite die aus jedem Sterne abgeleitete Längendifferenz, welche aber noch mit der persönlichen Gleichung behaftet ist, angegeben.

Beobachtungen in München und Leipzig.

Tabelle XXXIV. Beobachtungen in München.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Differenz der Uhrstände.
			Juli 13.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	17ʰ 8ᵐ 54ˢ.31	10	+0ˢ.77	55ˢ.08	−0ᵐ 1ˢ.70	10ᵐ 44ˢ.97
2.	- - - 5841		12 41.70	11	0.78	42.48	1.69	44.92
3.	- - - 5860		15 43.48	11	0.70	44.18	1.77	45.03
4.	- - - 5890		19 56.50	11	0.88	57.38	1.74	44.99
5.	- - - 5903		22 23.99	11	0.84	24.83	1.77	45.08
6.	- - - 5941	West	29 5.96	11	0.35	6.31	1.93	45.16
7.	- - - 5967		32 20.82	11	0.25	21.07	1.81	45.05
8.	- - - 5991		36 20.32	11	0.32	20.64	1.90	45.22
9.	- - - 6021		41 33.02	11	0.22	33.24	1.87	45.01
10.	- - - 6035		17 44 12.13	11	0.37	12.50	1.77	45.03
11.	- - - 7200	West	20 40 49.65	11	0.26	49.91	1.87	45.23
12.	- - - 7222		43 38.36	11	0.32	38.68	1.87	45.31
13.	- - - 7246		46 45.28	11	0.13	45.41	1.82	45.20
14.	- - - 7269		51 30.65	11	0.35	31.00	1.90	45.34
15.	- - - 7302		56 0.48	11	0.32	0.80	1.90	45.34
16.	- - - 7350	Ost	21 4 13.12	11	0.74	13.86	1.91	45.32
17.	- - - 7368		7 35.07	10	0.60	35.67	1.84	45.26
18.	- - - 7394		11 35.47	11	0.85	36.32	1.90	45.39
19.	- - - 7410		15 23.17	11	0.63	23.80	1.96	45.46
20.	- - - 7437		18 18.83	11	0.62	19.45	1.95	45.36
21.	- - - 7478		21 24 55.51	11	+0.85	56.36	1.95	10 45.48
			Juli 17.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	17ʰ 8ᵐ 57ˢ.36	11	+0ˢ.10	57ˢ.46	−0ᵐ 4ˢ.11	10ᵐ 59ˢ.79
2.	- - - 5841		12 44.65	11	+0.15	44.80	4.03	59.70
3.	- - - 5860		15 46.57	11	−0.09	46.48	4.11	59.73
4.	- - - 5890		19 59.28	11	+0.38	59.66	4.03	59.71
5.	- - - 5903		22 26.79	11	0.30	27.09	4.04	59.78
6.	- - - 5941	Ost	29 7.86	11	0.60	8.46	4.09	59.89
7.	- - - 5967		32 22.98	11	0.42	23.40	4.17	59.87
8.	- - - 5991		36 22.32	11	0.55	22.87	4.14	59.89
9.	- - - 6021		41 35.14	11	0.38	35.52	4.17	59.92
10.	- - - 6035		17 44 14.33	11	0.64	14.97	4.25	10 59.94
11.	- - - 7200	Ost	20 40 51.85	11	0.50	52.35	4.20	11 0.13
12.	- - - 7222		43 40.59	11	0.63	41.22	4.30	0.25
13.	- - - 7246		46 47.59	11	0.33	47.92	4.25	0.19
14.	- - - 7269		51 32.85	11	0.67	33.52	4.29	0.18
15.	- - - 7302		56 2.72	11	0.63	3.35	4.34	0.21
16.	- - - 7350	West	21 4 16.19	11	+0.08	16.27	4.25	11 0.02
17.	- - - 7368		7 38.50	11	−0.31	38.19	4.24	10 59.88
18.	- - - 7394		11 37.39	11	+0.31	37.70	4.15	11 0.07
19.	- - - 7410		15 26.35	11	−0.18	26.17	4.20	11 0.10
20.	- - - 7437		18 21.97	11	−0.18	21.79	4.16	10 59.98
21.	- - - 7478		21 24 58.38	11	+0.32	58.70	4.15	11 0.17

Beobachtungen in Leipzig.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Längendifferenz.
			Juli 13.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	16h 58m 9s.82	10	+0s.29	10s.11	+10m 43s.27	3m 16s.91
2.	- - - 5841		17 1 57.27	11	0.29	57.56	43.23	16.86
3.	- - - 5860		4 58.86	11	0.29	59.15	43.26	16.96
4.	- - - 5890		9 12.09	11	0.30	12.39	43.25	16.92
5.	- - - 5903		11 39.45	11	0.30	39.75	43.31	17.00
6.	- - - 5941	West	18 21.05	11	0.10	21.15	43.23	17.08
7.	- - - 5967		21 35.93	11	0.09	36.02	43.24	16.96
8.	- - - 5991		25 35.32	11	0.10	35.42	43.32	17.13
9.	- - - 6021		30 48.15	11	0.08	48.23	43.14	16.91
10.	- - - 6035		17 33 27.36	11	0.11	27.47	43.26	16.93
11.	- - - 7200	West	20 30 4.56	11	0.12	4.68	43.36	16.89
12.	- - - 7222		32 53.24	11	0.13	53.37	43.44	16.97
13.	- - - 7246		36 0.10	11	0.11	0.21	43.38	16.85
14.	- - - 7269		40 45.54	11	0.13	45.67	43.44	16.99
15.	- - - 7302		45 15.33	11	0.13	15.46	43.44	16.98
16.	- - - 7350	Ost	53 28.26	11	0.28	28.54	43.41	16.95
17.	- - - 7368		56 50.14	11	0.27	50.41	43.42	16.88
18.	- - - 7394		21 0 49.65	11	0.28	49.93	43.49	17.01
19.	- - - 7410		4 38.09	11	0.27	38.36	43.48	17.06
20.	- - - 7437		8 33.82	9	0.27	34.09	43.41	16.97
21.	- - - 7478		21 14 10.60	11	+0.28	10.88	43.53	17.08
			Juli 17.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	16h 57m 56s.76	11	+0s.91	57s.67	+10m 55s.68	3m 17s.13
2.	- - - 5841		17 1 44.13	11	0.97	45.10	55.67	17.04
3.	- - - 5860		4 45.97	11	0.78	46.75	55.62	17.07
4.	- - - 5890		8 58.77	11	1.18	59.95	55.68	17.04
5.	- - - 5903		11 26.20	11	1.11	27.31	55.74	17.11
6.	- - - 5941	Ost	18 7.90	11	0.67	8.57	55.80	17.21
7.	- - - 5967		21 23.04	11	0.49	23.53	55.70	17.18
8.	- - - 5991		25 22.36	11	0.62	22.98	55.75	17.20
9.	- - - 6021		30 35.18	11	0.42	35.60	55.75	17.22
10.	- - - 6035		17 33 14.32	11	0.71	15.03	55.69	17.24
11.	- - - 7200	Ost	20 29 51.60	10	0.62	52.22	55.93	17.19
12.	- - - 7222		32 40.23	11	0.74	40.97	55.95	17.30
13.	- - - 7246		35 47.30	11	0.43	47.73	55.94	17.24
14.	- - - 7269		40 32.55	11	0.79	33.34	55.89	17.22
15.	- - - 7302		45 2.39	11	0.75	3.14	55.87	17.25
16.	- - - 7350	West	53 15.21	11	1.03	16.24	55.77	17.04
17.	- - - 7368		56 37.57	11	0.74	38.31	55.64	16.90
18.	- - - 7394		21 0 36.41	11	1.22	37.63	55.92	17.08
19.	- - - 7410		4 25.23	11	0.84	26.07	55.90	17.11
20.	- - - 7437		7 20.97	11	0.84	21.81	55.82	16.98
21.	- - - 7478		21 13 57.29	11	1.24	58.53	56.02	17.17

Beobachtungen in München.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Differenz der Uhrstände.
			Juli 21.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	17ʰ 8ᵐ 59ˢ.82	11	+0ˢ.79	0ˢ.61	—0ᵐ 7ˢ.27	11ᵐ 7ˢ.40
2.	- - - 5841		12 47.51	11	0.80	48.31	7.55	7.66
3.	- - - 5860		15 49.17	11	0.71	49.88	7.51	7.61
4.	- - - 5890		20 2.29	11	0.90	3.19	7.56	7.73
5.	- - - 5903		22 29.79	11	0.86	30.65	7.61	7.83
6.	- - - 5941	West	29 11.72	11	0.37	12.09	7.73	7.95
7.	- - - 5967		32 26.52	11	0.26	26.78	7.56	7.71
8.	- - - 5991		36 26.03	11	0.34	26.37	7.65	7.86
9.	- - - 6021		41 38.73	11	0.22	38.95	7.60	7.89
10.	- - - 6035		17 44 17.94	11	0.40	18.34	7.62	7.81
11.	- - - 7200	West	20 40 55.59	11	0.26	55.85	7.69	8.04
12.	- - - 7222		43 44.20	11	0.34	44.54	7.61	7.88
13.	- - - 7246		46 51.27	11	0.14	51.41	7.73	8.04
14.	- - - 7269		51 36.58	11	0.37	36.95	7.71	8.05
15.	- - - 7302		56 4.40	11	0.35	4.75	7.71	7.98
16.	- - - 7350	Ost	21 4 19.02	11	0.74	19.76	7.68	8.06
17.	- - - 7368		7 41.05	11	0.59	41.64	7.67	8.08
18.	- - - 7394		11 40.48	11	0.86	41.34	7.77	8.14
19.	- - - 7410		15 29.11	11	0.64	29.75	7.76	8.05
20.	- - - 7437		18 24.71	10	0.65	25.36	7.71	8.06
21.	- - - 7478		21 25 1.48	11	+0.86	2.34	7.77	8.16
			Juli 22.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	17ʰ 9ᵐ 1ˢ.48	11	+0ˢ.24	1ˢ.72	—0ᵐ 8ˢ.39	11ᵐ 9ˢ.70
2.	- - - 5841		12 48.71	11	0.29	49.00	8.25	9.51
3.	- - - 5860		15 50.63	11	0.07	50.70	8.34	9.72
4.	- - - 5890		20 3.49	11	0.48	3 97	8.34	9.65
5.	- - - 5903		22 30.93	10	0 41	31.34	8.31	9.57
6.	- - - 5941	Ost	29 11.95	11	0.64	1.59	8.23	9.51
7.	- - - 7967		32 26 95	11	0.49	27.44	8.22	9.52
8.	- - - 5991		36 26.43	11	0.61	27.04	8.32	9.58
9.	- - - 6021		41 39.01	11	0.45	39.46	8.12	9.42
10.	- - - 6035		17 44 18.33	11	0.68	19.01	8.29	9.63
11.	- - - 7200	Ost	20 40 56.10	11	0 54	56.64	8.48	9.82
12.	- - - 7222		43 44.77	11	0.64	45.41	8.47	9.79
13.	- - - 7246		46 51.84	11	0.37	52.21	8.52	9.93
14.	- - - 7269		51 37.09	9	0.69	37.78	8.53	9.94
15.	- - - 7302		56 6.94	10	0.65	7.59	8.57	10.03
16.	- - - 7350	West	21 4 20 52	11	0.21	20.73	8.63	10.00
17.	- - - 7368		7 42.75	11	0.12	42.63	8.64	10.15
18.	- - - 7394		11 41.74	11	0.42	42.16	8.57	9.94
19.	- - - 7410		15 30.66	11	0.01	30.65	8.65	10.06
20.	- - - 7437		18 26.30	11	0.01	26.29	8.62	10.24
21.	- - - 7478		21 25 2.66	11	+0.43	3.09	8.52	9.97

Beobachtungen in Leipzig.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Längendifferenz.
			Juli 21.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	16h 57m 52.s51	11	+0.s70	53.s21	+11m 0.s13	3m 16.s97
2.	- - - 5841		17 1 39.88	11	0.77	40.65	0.11	17.22
3.	- - - 5860		4 41.69	11	0.58	42.27	0.10	17.17
4.	- - - 5890		8 54.49	11	0.97	55.46	0.17	17.28
5.	- - - 5903		11 21.91	11	0.91	22.82	0.22	17.38
6.	- - - 5941	West	18 3.15	11	0.99	4.14	0.22	17.49
7.	- - - 5967		21 18.22	11	0.85	19.07	0.15	17.25
8.	- - - 5991		25 17.56	11	0.95	18.51	0.21	17.39
9.	- - - 6021		30 30.27	11	0.79	31.06	0.29	17.41
10.	- - - 6035		17 33 9.50	11	1.03	10.53	0.19	17.33
11.	- - - 7200	West	20 29 46.84	11	0.97	47.81	0.35	17.31
12.	- - - 7222		32 35.59	11	1.07	36.66	0.27	17.15
13.	- - - 7246		35 42.55	11	0.82	43.37	0.31	17.30
14.	- - - 7269		40 27.79	11	1.11	28.90	0.34	17.31
15.	- - - 7302		44 57.69	11	1.08	58.77	0.27	17.23
16.	- - - 7350	Ost	53 10.94	11	0.76	11.70	0.38	17.30
17.	- - - 7368		56 33.11	11	0.45	33.56	0.41	17.32
18.	- - - 7394		21 0 32.24	11	0.96	33.20	0.37	17.37
19.	- - - 7410		4 21.14	11	0.56	21.70	0.29	17.28
20.	- - - 7437		7 16.75	11	0.55	17.30	0.35	17.28
21.	- - - 7478		21 13 53.21	11	+0.97	54.18	0.39	17.37
			Juli 22.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	16h 57m 51.s12	11	+0.s90	52.s02	+11m 1.s31	3m 17.s47
2.	- - - 5841		17 1 38.53	11	0.97	39.50	1.26	17.27
3.	- - - 5860		4 40.20	11	0.78	40.98	1.38	17.47
4.	- - - 5890		8 53.14	11	1.18	54.32	1.31	17.40
5.	- - - 5903		11 20.67	11	1.11	21.78	1.26	17.31
6.	- - - 5941	Ost	18 2.33	11	0.75	3.08	1.28	17.24
7.	- - - 5967		21 17.36	11	0.56	17.92	1.30	17.24
8.	- - - 5991		25 16.77	11	0.71	17.48	1.26	17.30
9.	- - - 6021		30 29.54	11	0.50	30.04	1.30	17.13
10.	- - - 6035		17 33 8.59	11	0.79	9.38	1.34	17.33
11.	- - - 7200	Ost	20 29 46.08	9	0.72	46.80	1.36	17.19
12.	- - - 7222		32 34.79	6	0.83	35.62	1.32	17.15
13.	- - - 7246		35 41.73	11	0.55	42.28	1.41	17.29
14.	- - - 7269		40 26.96	11	0.88	27.84	1.41	17.29
15.	- - - 7302		44 56.76	11	0.84	57.60	1.46	17.37
16.	- - - 7350	West	53 9.69	11	1.04	10.73	1.37	17.33
17.	- - - 7368		56 31.71	11	0.76	32.47	1.51	17.47
18.	- - - 7394		21 0 30.98	11	1.24	32.22	1.37	17.26
19.	- - - 7410		4 19.73	11	0.86	20.59	1.41	17.36
20.	- - - 7437		7 15.19	11	0.86	16.05	1.62	17.54
21.	- - - 7478		21 13 51.91	11	1.23	53.14	1.45	17.26

Beobachtungen in München.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Differenz der Uhrstände.
			Juli 23.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	$17^h\ 9^m\ 1^s.99$	11	$+0^s.61$	$2^s.60$	$-0^m 9^s.27$	$11^m 11^s.60$
2.	- - - 5841		12 49.30	11	0.66	49.96	9.21	11.49
3.	- - - 5860		15 51.06	11	0.50	51.56	9.20	11 67
4.	- - - 5890		20 3.97	11	0.82	4.79	9.17	11.56
5.	- - - 5903		22 31.46	11	0.77	32.23	9.20	11.58
6.	- - - 5941	West	29 13.47	11	0.22	13.69	9.34	11.85
7.	- - - 5967		32 28.49	10	0.07	28.56	9.35	11.77
8.	- - - 5991		36 27.78	11	0.19	27.97	9.26	11.70
9.	- - - 6021		41 40.57	11	0.01	40.58	9.24	11.64
10.	- - - 6035		17 44 19.76	10	0.26	20.02	9.31	11.70
11.	- - - 7200	West	20 40 57.70	9	0.14	57.84	9.67	11.21
12.	- - - 7222		43 46.31	11	+0.25	46.56	9.60	11.18
13.	- - - 7246		46 53.38	11	−0.03	53.35	9.65	11.29
14.	- - - 7269		51 38.67	11	+0.30	38.97	9.70	11.35
15.	- - - 7302		56 8.41	11	0.25	8.66	9.59	11.17
16.	- - - 7350	Ost	21 4 21.14	11	0.62	21.76	9.65	11.30
17.	- - - 7368		7 43.32	11	0.34	43.66	9.67	11.36
18.	- - - 7394		11 42.46	11	0.79	43.25	9.65	11.21
19.	- - - 7410		15 31.16	11	0.43	31.59	9.57	11.11
20.	- - - 7437		18 26.80	11	0.43	27.23	9.56	11.15
21.	- - - 7478		21 24 3.42	11	+0.81	4.23	9.63	11.21
			Juli 25.					
1.	*B. C. A.* 5821	West	$17^h\ 9^m\ 5^s.42$	11	$+0^s.13$	$5^s.55$	$-0^m 12^s.24$	$11^m 17^s.70$
2.	- - - 5841		12 52.75	11	+0.17	52.92	12.19	17.69
3.	- - - 5860		15 54.61	11	−0.04	54.57	12.23	17.71
4.	- - - 5890		20 7.41	11	+0.38	7.79	12.18	17.65
5.	- - - 5903		22 34.92	11	0.30	35.22	12.20	17.70
6.	- - - 5941	Ost	29 15.88	11	0.62	16.50	12.16	17.66
7.	- - - 5967		32 30.81	10	0.47	31.28	12.09	17.55
8.	- - - 5991		36 30.39	11	0.57	30.96	12.26	17.73
9.	- - - 6021		41 43.14	11	0.42	43.56	12.24	17.59
10.	- - - 6035		17 44 22.28	11	0.66	22.94	12.24	17.72
11.	- - - 7200	Ost	20 41 0.20	10	0.47	0.67	12.48	17.36
12.	- - - 7222		43 48.82	11	0.58	49.40	12.42	17.14
13.	- - - 7246		46 55.93	11	0.32	56.25	12.52	17.29
14.	- - - 7269		51 41.02	10	0.63	41.65	12.36	17.15
15.	- - - 7302		56 10.95	11	0.58	11.53	12.43	17.15
16.	- - - 7350	West	21 4 24.47	11	+0.10	24.57	12.43	17.17
17.	- - - 7368		7 46.78	11	−0 24	46.54	12.52	17.20
18.	- - - 7394		11 45.85	11	+0.31	46.16	12.53	17.21
19.	- - - 7410		15 34.67	10	−0.12	34.55	12.50	17.34
20.	- - - 7437		18 30.35	11	−0.12	30.23	12.53	17 34
21.	- - - 7478		21 25 6.85	11	+0.32	7.17	12.54	17.23

Beobachtungen in Leipzig.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Längendifferenz.
			Juli 23.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	16h 57m 50s.26	11	+0s.74	51s.00	+11m 2s.33	3m 17s.30
2.	- - - 5841		17 1 37.66	11	0.81	38.47	2.28	17.18
3.	- - - 5860		4 39.31	11	0.58	39.89	2.47	17.35
4.	- - - 5890		8 52.20	11	1.03	53.23	2.39	17.22
5.	- - - 5903		11 19.70	11	0.95	20.65	2.38	17.24
6.	- - - 5941	West	18 0.87	11	0.97	1.84	2.51	17.49
7.	- - - 5967		21 15.99	11	0.80	16.79	2.42	17.40
8.	- - - 5991		25 15.36	11	0.91	16.27	2.44	17.32
9.	- - - 6021		30 28.21	11	0.73	28.94	2.40	17.25
10.	- - - 6035		17 33 7.31	11	1.01	8.32	2.39	17.30
11.	- - - 7200	West	20 29 44.69	11	0.94	45.63	2.54	17.33
12.	- - - 7222		32 33.33	11	1.05	34.38	2.58	17.29
13.	- - - 7246		35 40.29	11	0.77	41.06	2.64	17.40
14.	- - - 7269		40 25.51	11	1.11	26.62	2.65	17.45
15.	- - - 7302		44 55.42	11	1.07	56.49	2.58	17.25
16.	- - - 7350	Ost	53 8.65	11	0.81	9.46	2.65	17.36
17.	- - - 7368		56 30.83	11	0.47	31.30	2.69	17.40
18.	- - - 7394		21 0 30.02	11	1.02	31.04	2.56	17.24
19.	- - - 7410		4 18.90	11	0.58	19.48	2.54	17.14
20.	- - - 7437		7 14.50	11	0.58	15.08	2.59	17.17
21.	- - - 7478		21 13 51.00	11	1.02	52.02	2.58	17.22
			Juli 25.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	16h 57m 46s.98	11	+0s.87	47s.85	+11m 5s.46	3m 17s.53
2.	- - - 5841		17 1 34.30	11	0.93	35.23	5.50	17.51
3.	- - - 5860		4 36.12	11	0.74	36.86	5.48	17.52
4.	- - - 5890		8 48.98	11	1.16	50.14	5.47	17.45
5.	- - - 5903		11 16.44	11	1.08	17.52	5.50	17.49
6.	- - - 5941	Ost	17 58.08	11	0.76	58.84	5.50	17.44
7.	- - - 5967		21 13.16	11	0.57	13.73	5.46	17.32
8.	- - - 5991		25 12.53	11	0.70	13.23	5.47	17.49
9.	- - - 6021		30 25.47	11	0.50	25.97	5.35	17.34
10.	- - - 6035		17 33 4.43	11	0.79	5.22	5.48	17.46
11.	- - - 7200	Ost	20 29 41.62	11	0.69	42.31	5.88	17.64
12.	- - - 7222		32 30.46	11	0.80	31.26	5.72	17.41
13.	- - - 7246		35 37.45	11	0.51	37.96	5.77	17.56
14.	- - - 7269		40 22.63	11	0.87	23.50	5.79	17.41
15.	- - - 7302		44 52.55	11	0.83	53.38	5.72	17.39
16.	- - - 7350	West	53 5.42	11	0.98	6.40	5.74	17.39
17.	- - - 7368		56 27.66	11	0.68	28.34	5.68	17.41
18.	- - - 7394		21 0 26.77	11	1 18	27.95	5.68	17.41
19.	- - - 7410		4 15.44	11	0.77	16.21	5.84	17.53
20.	- - - 7437		7 11.12	11	0.77	11.89	5.81	17.52
21.	- - - 7478		21 13 47.77	11	1.17	48.94	5.69	17.40

Beobachtungen in München.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Differenz der Uhrstände.
			Juli 29.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	17h 9m 10s.65	11	+0s.47	11s.12	−17s.84	11m 27s.90
2.	- - - 5841		12 58.05	11	0.49	58.54	17.83	—
3.	- - - 5860		15 59.74	11	0.46	60.20	17.89	—
4.	- - - 5890		20 13.02	11	0.55	13.57	17.97	—
5.	- - - 5903		22 40.29	11	+0.52	40.81	17.80	—
6.	- - - 5941	West	29 22.23	11	−0.01	22.24	17.92	27.90
7.	- - - 5967		32 37.09	11	−0.05	37.04	17.87	—
8.	- - - 5991		36 36.54	11	0.00	36.54	17.86	—
9.	- - - 6021		41 49.26	11	−0.06	49.20	17.91	27.94
10.	- - - 6035		17 44 28.56	11	+0.02	28.58	17.90	—
11.	- - - 7200	West	20 41 6.53	11	−0.06	6.47	18.25	28.42
12.	- - - 7222		43 55.22	11	−0.01	55.21	18.18	28.28
13.	- - - 7246		47 2.09	10	−0.12	1.97	18.20	28.37
14.	- - - 7269		51 47.64	11	+0.01	47.65	18.31	28.35
15.	- - - 7302		56 17.37	11	0.00	17.37	18.21	28.32
16.	- - - 7350	Ost	21 4 30.06	11	+0.44	30.50	18.30	28.54
17.	- - - 7368		7 52.05	11	0.36	52.41	18.34	28.46
18.	- - - 7394		11 51.43	10	0.50	51.93	18.25	28.46
19.	- - - 7410		15 40.15	11	0.38	40.53	18.43	28.70
20.	- - - 7437		18 35.79	11	0.38	36.17	18.41	28.62
21.	- - - 7478		21 25 12.59	11	0.50	13.09	18.40	28.60
			Juli 30.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	17h 9m 13s.19	10	−0s.01	13s.18	−19s.91	11m 31s.79
2.	- - - 5841		13 0.57	11	+0.02	0.59	19.89	31.78
3.	- - - 5860		16 2.26	11	−0.10	2.16	19.86	31.87
4.	- - - 5890		20 15.24	11	+0.14	15.38	19.79	31.74
5.	- - - 5903		22 42.80	11	0.10	42.90	19.90	31.84
6.	- - - 5941	Ost	29 23.68	11	0.41	24.09	19.78	31.74
7.	- - - 5967		32 38.80	11	0.35	39.15	19.99	31.99
8.	- - - 5991		36 38.22	11	0.40	38.62	19.95	32.07
9.	- - - 6021		41 50.94	11	0.33	51.27	19.99	32.05
10.	- - - 6035		44 30.16	6	0.43	30.59	19.91	31.93

Beobachtungen in Leipzig.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Längendifferenz.
			Juli 29.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	$16^h 57^m 42^s.48$	11	$+0^s.74$	$43^s.22$	$+11^m 10^s.06$	$3^m 16^s.97$
2.	- - - 5841		—	—	—	—	—	—
3.	- - - 5860		—	—	—	—	—	—
4.	- - - 5890		—	—	—	—	—	—
5.	- - - 5903		—	—	—	—	—	—
6.	- - - 5941	West	17 17 53.37	11	0.97	54.34	9.98	16.92
7.	- - - 5967		—	—	—	—	—	—
8.	- - - 5991		—	—	—	—	—	—
9.	- - - 6021		17 30 20.51	11	0.75	21.26	10.02	16.93
10.	- - - 6035		—	—	—	—	—	—
11.	- - - 7200	West	20 29 37.08	11	0.97	38.05	10.17	16.96
12.	- - - 7222		32 25.85	11	1.08	26.93	10.10	16.81
13.	- - - 7246		35 32.79	11	0.81	33.60	10.17	16.90
14.	- - - 7269		40 18.18	11	1.12	19.30	10.04	16.87
15.	- - - 7302		44 47.96	11	1.09	49.05	10.11	16.82
16.	- - - 7350	Ost	53 1.13	11	0.83	1.96	10.24	17.02
17.	- - - 7368		56 23.44	11	0.51	23.95	10.12	16.93
18.	- - - 7394		21 0 22.44	11	1.03	23.47	10.21	16.92
19.	- - - 7410		4 11.20	11	0.63	11.83	10.27	17.15
20.	- - - 7437		7 6.92	11	0.63	7.55	10.21	17.06
21.	- - - 7478		21 13 43.46	11	1.03	44.49	10.20	17.03
			Juli 30.					
1.	*B. A. C.* 5821	West	$16^h 57^m 40^s.37$	11	$+1^s.02$	$41^s.39$	$+11^m 11^s.88$	$3^m 16^s.92$
2.	- - - 5841		17 1 27.71	11	1.10	28.81	11.89	16.90
3.	- - - 5860		4 29.40	11	0.89	30.29	12.01	16.99
4.	- - - 5890		8 42.32	11	1.32	43.64	11.95	16.84
5.	- - - 5903		11 9.80	11	1.26	10.06	11.94	16.94
6.	- - - 5941	Ost	17 51.52	11	0.83	52.35	11.96	16.82
7.	- - - 5967		21 6.53	11	0.63	7.16	11.00	17.07
8.	- - - 5991		25 5.77	11	0.78	6.55	12.12	17.14
9.	- - - 6021		30 18.65	11	0.57	19.22	12.06	17.11
10.	- - - 6035		17 32 57.79	11	0.87	58.66	12.02	16.98

Beobachtungen in München.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Differenz der Uhrstände.
			Juli 31.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	17h 9m 14s.21	11	+0s.38	14s.59	−21s.33	11m 34s.34
2.	- - - 5841		13 1.64	11	0.41	2.05	21.36	34.39
3.	- - - 5860		16 3.31	11	0.27	3.58	21.29	34.40
4.	- - - 5890		20 16.36	11	0.56	16.92	21.34	34.34
5.	- - - 5903		22 43.95	11	0.52	44.47	21.48	34.41
6.	- - - 5941	West	29 25.70	11	−0.06	25.64	21.34	34.27
7.	- - - 5967		32 40.62	11	−0.21	40.41	21.26	34.16
8.	- - - 5991		36 40.04	11	−0.10	39.94	21.28	34.25
9.	- - - 6021		41 52.85	11	−0.27	52.58	21.31	34.32
10.	- - - 6035		17 44 32.08	11	−0.04	32.04	21.37	34.40
11.	- - - 7200	West	20 41 10.08	11	−0.15	9.93	21.69	34.87
12.	- - - 7222		43 58.73	11	−0.04	58.69	21.64	34 79
13.	- - - 7246		47 5.74	11	−0.30	5.44	21.65	34.74
14.	- - - 7269		53 7.66	11	−0.03	7.63	21.27	34.44
15.	- - - 7302		56 20.82	11	−0.04	20.78	21.60	34.78
16.	- - - 7350	Ost	21 4 33.49	11	+0.36	33.85	21.63	34.89
17.	- - - 7368		7 55.65	11	0.13	55.78	21.69	34.93
18.	- - - 7394		11 54.99	11	0.52	55.51	21.79	35.00
19.	- - - 7410		15 43.68	11	0.21	43.89	21.77	34.94
20.	- - - 7437		18 39.29	11	0.21	39.50	21.72	34.94
21.	- - - 7478		21 25 15.89	11	0.52	16.41	21.68	34.91

Beobachtungen in Leipzig.

Nr. des Sternes.	Stern.	Kreislage.	Beobachtete Durchgangszeit.	Zahl der Fäden.	Instrumental-Correction.	Im Meridian.	Uhrstand.	Längendifferenz.
			Juli 31.					
1.	*B. A. C.* 5821	Ost	16ʰ 57ᵐ 39ˢ.52	11	+0ˢ.73	40ˢ.25	+11ᵐ 13ˢ.01	3ᵐ 17ˢ.13
2.	- - - 5841		17 1 26.86	11	0.80	27.66	13.03	17.17
3.	- - - 5860		4 28.61	11	0.57	29.18	13.11	17.17
4.	- - - 5890		8 41.56	11	1.02	42.58	13.00	17.11
5.	- - - 5903		11 9.11	11	0.95	10.06	12.93	17.17
6.	- - - 5941	West	17 50.33	11	1.04	51.37	12.93	17.01
7.	- - - 5967		21 5.37	11	0.88	6.25	12.90	16.90
8.	- - - 5991		25 4.69	11	1.00	5.69	12.97	16.98
9.	- - - 6021		30 17.44	11	0.82	18.26	13.01	17.04
10.	- - - 6035		17 32 56.56	11	1.08	57.64	13.03	17.11
11.	- - - 7200	West	20 29 34.04	11	1.02	35.06	13.18	17.18
12.	- - - 7222		32 22.76	11	1.14	23.90	13.15	17.09
13.	- - - 7246		35 29.85	11	0.85	30.70	13.09	17.03
14.	- - - 7269		40 15.00	11	1.19	16.19	13.17	16.72
15.	- - - 7302		44 44.85	11	1.15	46.00	13.18	17.05
16.	- - - 7350	Ost	52 58.15	11	0.81	58.96	13.26	17.14
17.	- - - 7368		56 20.37	11	0.48	20.85	13.24	17.17
18.	- - - 7394		21 0 19.50	11	1.01	20.51	13.21	17.23
19.	- - - 7410		3 8.35	11	0.60	8.95	13.17	17.16
20.	- - - 7437		6 3.96	11	0.60	4.56	13.22	17.16
21.	- - - 7478		21 13 40.48	11	1.02	41.50	13.23	17.11

VII. Ableitung der Endresultate.

Aus der 8. Columne der Beobachtungen auf der rechten Seite sind, da die Kreislagen auf beiden Stationen gleich waren, für die Kreislagen die Mittel gebildet und wieder aus den beiden Kreislagen Ost und West von Neuem die Mittel. Die dazu gehörigen Gewichte sind nach der Formel $\frac{4ab}{a+b}$, wobei jedem beobachteten Stern das Gewicht 1 gegeben ist, ermittelt. Für jeden Abend sind dann die Längendifferenzen gebildet mit Berücksichtigung der dazu gehörigen Gewichte. Die Längendifferenzen sind aber noch mit der persönlichen Gleichung behaftet.

Tabelle XXXV. Resultate der Längendifferenz aus den auf beiden Stationen beobachteten Sterne.

1873.	Kreislage.	Längendifferenz.	Zahl d. Sterne.	Längendifferenz.	Gewicht.	Längendifferenz.	Gewicht.
Juli 13.	O	$3^m 16^s.930$	5	$3^m 16^s.965$	10.0	$3^m 16^s.964$	20.9
	W	17.000	5				
	W	16.936	5	16.964	10.9		
	O	16.992	6				
- 17.	W	17.078	5	17.144	10.0	17.144	20.9
	O	17.210	5				
	O	17.240	5	17.144	10.9		
	W	17.047	6				
- 21.	O	17.204	5	17.289	10.0	17.290	20.9
	W	17.374	5				
	W	17.260	5	17.290	10.9		
	O	17.320	6				
- 22.	O	17.384	5	17.316	10.0	17.315	20.9
	W	17.248	5				
	W	17.258	5	17.314	10.9		
	O	17.370	6				
- 23.	O	17.258	5	17.305	10.0	17.302	20.9
	W	17.352	5				
	W	17.344	5	17.300	10.9		
	O	17.255	6				
- 25.	W	17.500	5	17.455	10.0	17.458	20.9
	O	17.410	5				
	O	17.482	5	17.462	10.9		
	W	17.443	6				
- 29.	O	16.970	1	16.950	2.7	16.948	13.6
	W	16.930	2				
	W	16.872	5	16.945	10.9		
	O	17.018	6				
- 30.	W	16.918	5	16.971	10.0	16.971	10.0
	O	17.024	5				
- 31.	O	17.150	5	17.078	10.0	17.081	20.9
	W	17.006	5				
	W	17.014	5	17.084	10.9		
	O	17.162	6				

Was zunächst die persönliche Gleichung anbetrifft, so findet sich selbige aus den Differenzen, welche aus den Beobachtungen Juli 21, 22, 23, 25 und Juli 13, 17, 29, 30, 31 sich ergeben.

Das Mittel aus den mittleren 4 Abenden ist $3^m 17^s.341$,
aus beiden ersten und den drei letzten Abenden $3^m 17^s.022$
so dass die doppelte persönliche Gleichung

$$0^s.319$$

also Weinek—Seeliger $= + 0^s.160$ ist.

Es ist dabei jedem Abend zunächst gleiches Gewicht gegeben. Es findet sich, wenn die persönliche Gleichung angebracht wird, die Längendifferenz an den einzelnen Abenden:

Juli	13.	$3^m\ 17^s.124$
-	17.	17.304
-	21.	17.130
-	22.	17.155
-	23.	17.142
-	25.	17.298
-	29.	17.108
-	30.	17.131
-	31.	17.241

Das Mittel daraus (jedem Abend gleiches Gewicht gegeben) ist:

$$3^m\ 17^s.181,$$

der wahrscheinliche Fehler $\pm 0^s.017$.

Würde man jeden Abend nach den in Tabelle XXXV gegebenen Gewichten behandeln, würde sich ergeben

$$3^m\ 17^s.188$$

also fast dasselbe Resultat.

Am 29. und 30. Juli wurde nur etwa die Hälfte der Sterne beobachtet; geben wir diesen Abenden daher das Gewicht $1/2$, allen andern das Gewicht 1, so erhält man

$$3^m\ 17^s.189 \pm 0^s.018$$

und die persönliche Gleichung

$$0^s.152.$$

Zwischen den Beobachtungen in Kreislage Ost und Kreislage West sollte sich, da die Collimationsfehler eliminirt sind, eigentlich keine Differenz zeigen.

Die vorkommenden Differenzen sind

Juli	13.	O—W = $-0^s.070$
		+0.056
-	17.	+0.132
		+0.193
-	21.	−0.170
		+0.060

Juli	22. O−W. =	+0.136
		+0.112
-	23.	−0.094
		−0.089
-	25.	−0.090
		+0.039
-	29.	+0.040
		+0.146
-	30.	+0.106
-	31.	+0.144
		+0.148

Die Differenzen sind also theils positiv, theils negativ und im Mittel

$$+0^s.047 \pm 0^s.019$$

also ziemlich klein und nur $2\frac{1}{2}$ Mal so gross, als der wahrscheinliche Fehler. Eine Verbesserung vorzunehmen, schien uns nicht nöthig, indem wir diese Veränderung mehr der Aenderung der persönlichen Gleichung als der Unsicherheit der Instrumentalfehler zuschreiben.

Ordnet man die Längendifferenz nach den benützten Zeitsternen, so ergibt sich als Resultat aus den einzelnen Sternen:

Tabelle XXXVI. Längendifferenz aus den einzelnen Sternen.

Zeit-stern.	Längen-differenz.	Zeit-stern.	Längen-differenz
1.	$3^m17^s.149$	12.	$3^m17^s.146$
2.	144	13.	196
3.	213	14.	158
4.	158	15.	168
5.	205	16.	191
6.	213	17.	185
7.	165	18.	190
8.	244	19.	224
9.	168	20.	210
10.	210	21.	205
11.	211		

woraus hervorgeht, dass keine der Beobachtungszeit proportionale Aenderung der Resultate vorhanden ist; denn nimmt man aus je 5 Sternen die Mittel, so erhält man:

Tabelle XXXVII. Längendifferenz aus je 5 Zeitsternen.

Zeitstern 1— 5	$3^m 17^s.174$
- 6—10	200
- 11—15	176
- 16—21	201

und daraus wieder das Mittel $3^m 17^s.188$,
also wieder eine sehr gute Uebereinstimmung, welche innerhalb des wahrscheinlichen Fehlers liegt.

Untersucht man noch die Längendifferenz nach der Declination der Sterne geordnet, erhält man:

Tabelle XXXVIII. Längendifferenz aus den Sternen nach der Declination geordnet.

Declination.	Stern.	Längen-differenz.	Declination.	Stern.	Längen-differenz.
— 6° 8′	St. 21	$3^m 17^s.205$	+14°32′	St. 1	$3^m 17^s.149$
— 5 3	18	190	15 40	11	211
— 4 58	4	158	16 1	8	244
+ 0 26	5	205	23 20	19	224
3 42	14	158	23 44	20	210
6 41	15	168	24 23	7	165
7 24	12	146	24 37	3	213
9 37	16	191	26 37	13	196
9 53	10	210	27 47	9	168
11 0	2	144	29 42	17	185
12 39	6	213			

Zieht man auch hier wieder die Sterne in Gruppen von je 5 zusammen, so ergibt sich:

Tabelle XXXIX. Längendifferenz aus je 5 Sternen nach den Declinationen geordnet.

Declination.	Längen-differenz.
— 6° 8′ bis + 3°42′	$3^m 17^s.183$
+ 6 41 - +11 0	172
12 39 - +23 20	208
23 44 - +29 42	189

also auch wieder eine vollständig genügende Uebereinstimmung.

Als das wahrscheinlichste Beobachtungsresultat nehmen wir nach Seite 181 an:

$$3^m\,17^s.189 \pm 0^s.018$$

wozu nach Seite 169 (41) noch kommt

$$ldu = -\,0^s.003$$

so dass zwischen den Eingangs genannten Beobachtungsorten in Leipzig und München der Längenunterschied beträgt:

$$3^m\,17^s.186 \pm 0^s.018$$

Reducirt man jedoch den Längenunterschied auf die Mitte der Sternwarte in Leipzig, welche 9.40 Meter vom dortigen Beobachtungspfeiler entfernt ist und daher eine Reduction von $-0^s.032$ erfordert, so beträgt derselbe

$$3^m\,17^s.154 \pm 0^s.018.$$

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung des Längenunterschieds zwischen dem Polytechnikum in München und der Sternwarte in Bogenhausen auf geodätischem Wege.

Da der Beobachtungspfeiler Nr 4 auf der Westseite des nördlichen Flügels am Polytechnikum zu München nach drei Seiten von Gebäuden umgeben ist, so war die Bestimmung seiner rechtwinkeligen Coordinaten in Bezug auf das der bayerischen Landesvermessung zu Grunde liegende Axensystem eine ziemlich schwierige Aufgabe. Es musste desshalb zunächst ein Punkt auf dem Dache des Polytechnikums durch Rückwärts-Einschneiden aus 4 Punkten des die Residenzstadt bedeckenden Dreiecksnetzes bestimmt werden. Dieser Punkt, in der beigedruckten Figur mit A bezeichnet, war der südliche Halbpfeiler der Attika des Mittelbaues, und die durch ihre Coordinaten gegebenen Dreieckspunkte hiessen der Reihe nach: „Grosser Theatinerthurm“ (T), „Nördlicher Frauenthurm“ (F), „Thurm der Kreuzkirche“ (K) und „Thurm der protestantischen Kirche“ (P).

Nachdem der Punkt A gefunden war, konnte der nordöstliche Halbpfeiler der Attika (B) als zweiter Endpunkt einer auf dem Dache des Polytechnikums zu messenden Grundlinie AB angesehen und diese Linie auf der wagrechten Mauerfläche zwischen A und B genau gemessen werden. Weiter liessen sich in diesen Punkten die Winkel A und B des Dreiecks ABC bestimmen, dessen Spitze auf der westlichen Planie der alten Pinakothek gelegen und mit einem starken Grundpfahle bezeichnet war. Der Hilfspunkt C wurde auch aus dem Dreiecke P_1CP_2, das er mit den beiden auf der Ostseite des Polytechnikums gelegenen steinernen Beobachtungspfeilern Nr 1 (P_1) und Nr 2 (P_2) bildete, bestimmt, indem wiederum die Grundlinie P_1P_2 und die Winkel bei P_1,C,P_2 gemessen wurden. Die Seiten CP_1 und CP_2 ergaben sich auch aus den Dreiecken CP_1B und CP_2A: sie sind folglich doppelt bestimmt und nach ihren Mittelwerthen der Berechnung der Dreiecke CEP_1 und CDP_2 zu Grunde gelegt.

Aus den Dreiecken CEP_1 und CDP_2 ergaben sich die ebenfalls mit starken Pfählen bezeichneten Hilfspunkte D und E, wovon der erste in der Gabelsbergerstrasse, der zweite in der Theresienstrasse lag. Mit D und E, dann den vier das Polytechnikum umgebenden Pfeilern P_1 bis P_4 liess sich ein geschlossenes Polygon bilden, welches alle Winkel und die vier in der Figur stark ausgezogenen Seiten zu messen gestattete. Aus diesem Polygon aber ergaben sich mit Hilfe der schon bekannten Coordinaten der Pfeiler P_1 und P_2 die Coordinaten der Pfeiler P_2 und P_4 und damit die noch fehlenden Bedingungen für die Berechnung des gesuchten geographischen Längenunterschieds; denn die anderen Voraussetzungen waren durch ältere Bestimmungen der Coordinaten der Sternwarte schon erfüllt.

Nach diesem Plane hat der ehemalige Assistent des geodätischen Instituts der Münchener polytechnischen Hochschule, Herr Dr. J. H. Franke, die erforderlichen Messungen und auch die ersten Rechnungen zur Feststellung der Coordinaten der Pfeiler P_1 bis P_4 ausgeführt; er war also an dem geodätischen Theile in gleicher Weise wie die Herren Dr. H. Seeliger und L. Weinek an dem telegraphischen Theile der Längenbestimmungen betheiligt.

I. Die Messungen.

Diese zerfallen in Längen- und Winkelmessungen. Die Längen wurden mit sehr gut abgeglichenen fünfmeterigen hölzernen Messlatten, die Winkel mit einem einfachen Theodolithen von 25 Cm. Durchmesser bestimmt. Die Mittel der doppelt gemessenen und auf den Horizont des bayerischen Dreiecksnetzes reducirten Längen berechnen sich in Theilen des Breithaupt'schen Normalmeters des geodätischen Instituts des K. Polytechnikums in München wie folgt:

Seite A B = $19^m,551$
- P_1P_2 = 123,867
- DP_3 = 36,202
- P_3P_4 = 226,001
- P_4E = 39,548.

Alle Winkel wurden nach Richtungen gemessen, und es folgte immer einem Gyrus mit dem Fernrohre in der ersten Lage ein solcher mit dem Fernrohre in der zweiten Lage, bei dem dritten Gyrus blieb das Fernrohr in der zweiten Lage, beim vierten und fünften wieder in der ersten, beim sechsten und siebenten in der zweiten, beim achten in der ersten Lage. Mehr als achtmal wurde keine Richtung bestimmt, da eine grössere Genauigkeit der Winkelmessung, gegenüber jener der gegebenen Coordinaten der Kirchthürme F, T, K, P nicht geboten war. Denn es ist zu beachten, dass keiner dieser Thürme, den nördlichen Frauenthurm (F) ausgenommen, welcher Normalpunkt der bayerischen Landesvermessung ist, dem Dreiecksnetze erster Ordnung angehört; so wie es auch nicht absolut feststeht, ob die anvisirten Kirchthurmspitzen mit den früheren völlig identisch sind. Zu der ohne Zweifel herrschenden, jedoch nicht ganz angebbaren Unsicherheit der Coordinatenwerthe von T, K, P kommt noch der erschwerende Umstand, dass, da die Entfernungen sämmtlicher Thürme vom Punkte A nicht sehr gross sind, die vorhandenen Coordinaten-Differenzen grösseren Einfluss auf die Bestimmung von A erhalten, als es bei sehr grossen Abständen der Fall wäre.

Die gemessenen und unter Voraussetzung gleicher Gewichte annähernd ausgeglichenen Winkel haben (nach Abrundung der Zehntelsekunden) folgende Werthe:

TAF = 22° 18′ 29″	CBP_1 = 90° 4′ 0″	P_1EC = 10° 51′ 56″
TAK = 41 10 4	BP_1C = 50 18 57	ECP_1 = 10 11 44
TAP = 50 47 35	P_1CB = 39 37 3	CP_1E = 158 56 20
BAC = 79° 24′ 23″	P_2P_1C = 43° 24′ 24″	EP_1P_2 = 157° 39′ 6″
ABD = 82 55 33	P_1CP_2 = 95 8 3	P_1P_2D = 155 27 18
ACB = 17 40 4	CP_2P_1 = 41 27 33	P_2DP_3 = 83 40 45
CAP_2 = 93° 50′ 6″	P_2CD = 8° 0′ 42″	DP_3P_4 = 120° 52′ 15″
ACP_2 = 37 50 33	CDP_2 = 8 54 38	P_3P_4E = 121 37 56
CP_2A = 48 19 21	DP_2C = 163 4 40	P_4EP_1 = 80 42 40.

II. Die Rechnungen.

A. Die Coordinaten für das Polytechnikum.

Es ist schon bemerkt worden, dass eine strenge Ausgleichung der Messungsfehler nicht stattfand, weil sie bei der unbekannten Genauigkeit der Kirchthurm-Coordinaten und der durch die Localität bedingten ungünstigen Form der Dreiecke nur einen scheinbaren Werth gehabt hätte, und für den vorliegenden Zweck eigentlich nicht nothwendig ist. Denn dieser Zweck erheischt nur, dass der wahrscheinliche Fehler des Winkels, den die Meridiane am Polytechnikum und an der Sternwarte bilden, den gleichnamigen Fehler der telegraphischen Bestimmung einer Längendifferenz von ungefähr gleicher Grösse nicht übersteigt, nämlich nicht mehr als höchstens 0,30 Bogen- oder 0,02 Zeitsekunden beträgt. Nun entspricht aber in der Breite von München die Verschiebung eines Punktes der Erdoberfläche in der Richtung des Meridians von $0{,}^{m}31$ und in der Richtung des Perpendikels von $0{,}^{m}21$ nur einem Centriwinkel von $0{,}''01$ in Bogen: es dürfte also in der Richtung des Meridians eine Verschiebung von $30 . 0{,}31 = 9{,}^{m}3$ und in der des Perpendikels von $30 . 0{,}21 = 6{,}^{m}3$ stattfinden, bis der Winkelfehler 0,30 Bogensekunde betrüge, während nach den über das bayerische Netz und insbesondere über dessen Theil in der Umgebung von München vorliegenden Erfahrungen die Coordinaten der Punkte niederer Ordnungen, bei deren Bestimmung ebenfalls keine strenge Ausgleichung stattfand, höchstens um $\pm 0{,}^{m}5$ oder $\pm 0{,}''0167$ in Bogen unrichtig sind. Unser Ver-

fahren wird demnach auch keinen grösseren wahrscheinlichen Fehler als von $\pm 0,016$ Bogen- oder $\pm 0,001$ Zeitsekunde in sich schliessen.

Unter diesen Erwägungen schlugen wir folgenden Gang der Rechnungen ein. Zuerst wurden aus den Coordinaten der Thürme T, F, P und den oben angegebenen Winkeln TAF und TAP die Coordinaten von A berechnet und diese hierauf durch Heranziehung der Coordinaten des Kreuzthurms K und des Winkels TAK verbessert. Die dieser Rechnung zu Grunde gelegten Coordinaten beziehen sich auf ein Axensystem, das seinen Ursprung in der Spitze (oder Axe) des nördlichen Frauenthurms in München hat und dessen Abscissenaxe der als Grosskreis gedachte Meridian dieser Spitze ist, während ein durch dieselbe gelegter und zum Meridian senkrecht stehender Vertikalkreis die Ordinatenaxe bildet. Im nordwestlichen Viertel sind Abscisse und Ordinate eines Punkts positiv, im südöstlichen beide negativ. Die Längeneinheit ist die bayerische Ruthe zu 10 Fuss, von denen einer 129,38 Pariser Linien oder 0,2918592 Meter misst: wenn somit m Meter n bayerische Ruthen ausmachen, so ist

$$\log m - \log n = 0,4651734.$$

Die gegebenen Coordinatenwerthe waren nun folgende:

Nördlicher Frauenthurm (F):	Abscisse = 0 und Ordinate = 0;		
Grosser Theatinerthurm (T):	Abscisse =	— $103^r,33$ =	— $301^m,59$
	Ordinate =	— 89,01 =	— 259,78
Thurm der prot. Kirche (P):	Abscisse =	+ 46,89 =	+ 136,85
	Ordinate =	+ 203,20 =	+ 593,05
Thurm der Kreuzkirche (K):	Abscisse =	+ 116,00 =	+ 338,56
	Ordinate =	+ 131,64 =	+ 384,21.

(Da die oben erwähnten Verbesserungen mehr betrugen, als der Unsicherheit unserer Winkelmessungen entsprach, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die vorstehenden Coordinatenwerthe nicht so genau sind, als sie wohl sein könnten; und da letztere nur bis auf bayerische Decimalzolle gegeben waren, von denen einer 2,918 Cm. ausmacht, so hat eine genauere Auswerthung der Coordinaten als auf Centimeter keine Bedeutung).

Mit Hilfe der Coordinaten von A und der nöthigen Linien und Winkel wurden nunmehr die Coordinaten des Hilfspunktes C und der

beiden östlichen Pfeiler P_1 und P_2 und damit die Azimuthe aller Seiten bestimmt, welche den weiteren Rechnungen zu Grunde lagen. Die in dem Polygonzuge sich ergebende Azimuth-Differenz haben wir unter der Annahme vertheilt, dass die auf den Punkten D und E gemessenen Winkel wegen ihrer kurzen Schenkel nur das halbe Gewicht der auf den Steinpfeilern bestimmten bekamen. Auf diese Weise ergaben sich für diese Pfeiler folgende Coordinatenwerthe: für

P_1	die Abscisse	$x = +1370^m{,}08$	und	die	Ordinate	$y = +387^m{,}35$
P_2	„ „	$x = +1256{,}33$	„	„	„	$y = +436{,}42$
P_3	„ „	$x = +1234{,}12$	„	„	„	$y = +514{,}64$
P_4	„ „	$x = +1441{,}70$	„	„	„	$y = +425{,}15.$

Diese berechneten Coordinaten beziehen sich ebenso wie die gegebenen auf die der bayerischen Landesvermessung zu Grunde liegenden Axen, wovon die Abscissenaxe der Meridian von F und die Ordinatenaxe der Perpendikel dazu sein soll. Zu der Zeit aber, wo diese Axen festgelegt wurden (Anfang dieses Jahrhunderts) war der Meridian des nördlichen Frauenthurms nicht so scharf bestimmt als später, wo sich herausstellte, dass die Abscissenaxe mit dem wahren Meridian einen Winkel von 14,5 Sekunden in dem Sinne bildet, dass das von Süd nach West oder von Nord nach Ost gezählte Azimuth dieser Axe $14''{,}5$ beträgt. Es muss folglich das Axensystem, wenn es seiner Definition vollständig entsprechen soll, um diesen kleinen Winkel auf der Südseite nach Ost und Nordseite nach West gedreht werden.

Bezeichnen demnach x, y die Coordinaten eines Punktes für das alte und x', y' für das neue Axensystem, welches um den Winkel $\delta = 14''{,}5$ in dem angedeuteten Sinne gedreht ist, so wird

$$x' = x \cos\delta + y \sin\delta$$
$$y' = y \cos\delta - x \sin\delta$$

und wenn man $\cos\delta = 1$ und $\sin\delta = \delta'' \sin 1''$ setzt (was erlaubt ist), so erhält man genau genug:

$$x' = x + y\,\delta \sin 1'' = x + 0{,}00007\,y$$
$$y' = y - x\,\delta \sin 1'' = y - 0{,}00007\,x.$$

Hienach werden die neuen Coordinaten der das Polytechnikum umgebenden vier Pfeiler folgende: für

P_1	die Abscisse	$x' = +1370{,}^{m}11$	und	die	Ordinate	$y' = +387{,}^{m}25$
P_2	„	„	$x' = +1256{,}36$	„	„	„	$y' = +436{,}33$
P_3	„	„	$x' = +1234{,}16$	„	„	„	$y' = +514{,}55$
P_4	„	„	$x' = +1441{,}73$	„	„	„	$y' = +424{,}05.$

Bei unserer Aufgabe kommen vorzugsweise die Coordinaten des Pfeilers Nr 4 in Betracht, nämlich

$$x'_4 = +1441{,}^{m}73 \text{ und } y'_3 = +425{,}^{m}05. \qquad (\alpha)$$

B. Die Coordinaten für die Sternwarte.

Nach Seite 516 des Werkes „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“, München 1873, betragen die Coordinaten der westlichen Kuppel der Sternwarte für das Axensystem der bayerischen Triangulation:

$$x = +266{,}^{r}63 = +\ \ 778{,}^{m}18$$
$$y = -854{,}72 = -2494{,}58$$

und für das verbesserte neue Axensystem:

$$x' = +266{,}^{r}57 = +\ \ 778{,}^{m}01$$
$$y' = -854{,}74 = -2494{,}63.$$

Die vom ehemaligen Director der Sternwarte in Bogenhausen, J. v. Soldner, welcher die bayerische Triangulation leitete*), in den Jahren 1820 bis 1822 durch Beobachtungen von Pulverblitzen vorgenommenen Längenbestimmungen München-Wien bezogen sich (nach einer Mittheilung seines Amtsnachfolgers, des Herrn Prof. v. Lamont) auf das Passagen-Instrument der Sternwarte, welches 2,56 bayr. Ruthen östlich vom Meridiankreis steht und die Ordinate älterer Ordnung hat: **)

$$y = -858{,}^{r}54 = -2505{,}^{m}73$$

der die neuere Ordinate entspricht:

$$y' = -858{,}^{r}56 = -2505{,}^{m}67.$$

Dagegen beziehen sich die von Soldner u. A. in den Jahren 1824 und 1825 in gleicher Weise gemessenen Längenunterschiede München-Tübingen-Mannheim-Strassburg auf den Meridiankreis, dessen Ordinaten älterer und neuerer Ordnung folgende sind:

---

*) Eine kurze Biographie Soldner's enthält „Die Bayerische Landesvermessung etc.“ S. 259—262.

**) Die Soldner'schen Längenbestimmungen sind ebendaselbst S. 635—679 mitgetheilt.

$$y = -855{,}^r98 = -2498{,}^m26$$
$$y' = -856{,}00 = -2498{,}31.$$

Die seit Jahren im Gange befindlichen telegraphischen Längenbestimmungen zwischen München-Wien-Prag-Mailand-Strassburg u. a. O., welche von bayerischer Seite Herr Professor v. Lamont leitet, beziehen sich auf keinen der vorstehend bezeichneten Punkte, sondern auf einen isolirten Pfeiler der Sternwarte, worauf früher der grosse Reichenbach'sche Repetitionskreis stand und dessen Coordinaten älterer Ordnung Herr v. Lamont wie folgt angab:

$$x = +264{,}^r91 = +\ 773{,}^m16$$
$$y = -857{,}60 = -2502{,}99.$$

Hienach berechnen sich die neuen Coordinaten dieses isolirten Pfeilers, den wir von nun an mit P_0 bezeichnen wollen, folgendermassen:

$$x'_0 = +264{,}^r85 = +\ 772{,}^m99 \qquad (\beta)$$
$$y'_0 = -857{,}62 = -2503{,}04;$$

und aus der Verbindung dieser Coordinaten mit denen des Pfeilers Nr 4 am Polytechnikum ergibt sich dessen Entfernung von P_0 oder

$$P_0P_4 = 1029{,}^r09 = 3003{,}^m49$$

und das von Süd über West gezählte Azimuth der als Gerade gedachten Verbindunglinie P_0P_4

$$SP_4P_0 = SP_0P_4 + 180^0 = 282^0\,51'\,54''.$$

C. Die geographischen Positionen der Beobachtungsorte.

Aus den Coordinaten der Pfeiler P_0 und P_4 lassen sich deren geographische Positionen (Breite und Länge) leicht berechnen, wenn diese Positionen für den Anfang der sphärischen Coordinaten und der Krümmungshalbmesser der letzteren bekannt sind. Nun ist aber nach den bisherigen Bestimmungen für die Axe des nördlichen Frauenthurms in München (F)

die geographische Breite $\varphi = 48^0\ \ 8'\,20''$

die geographische Länge $\lambda = 29^0\,14'\,15''$

während das bayerische Dreiecksnetz auf einer Kugelfläche liegt, deren Halbmesser die Normale von München ist. Der Logarithmus dieses Halbmessers ist nach Seite 264 der „Bayerischen Landesvermessung" für Ruthen und Meter:

$$\log r^r = 6{,}340{\cdot}2033 \;;\; \log r^m = 6{,}805{\cdot}3767.$$

Da der Punkt P_4 um $x'_4 = 1441{,}^m73$ in der Richtung des Meridians vom Anfange der Coordinaten in F absteht, so ist der Breitezuwachs dieses Punktes von F aus oder

$$\xi_4 = 206265'' \frac{x'_4}{r} = 46{,}''55$$

und folglich die geographische Breite des Pfeilers P_4 selbst:

$$\varphi_4 = \varphi + \xi_4 = 48^0\, 9'\, 6{,}''55. \qquad (\gamma)$$

In dieser Breite beträgt der Halbmesser des Parallelkreises $r \cos \varphi_4$ und folglich für die Ordinate $y'_4 = + 425{,}^m05$ die Längendifferenz $F - P_4$ oder

$$\eta_4 = 206265'' \frac{y'_4}{r \cos \varphi_4} = 20{,}''572 = 1{,}^s371. \qquad (\delta)$$

Demnach ist die geographische Länge des Pfeilers P_4 gleich

$$\lambda_4 = \lambda - \eta_4 = 29^0\, 13'\, 54{,}''43. \qquad (\delta')$$

Da ferner die Abscisse des Pfeilers P_0 auf der Sternwarte oder $x_0 = + 722{,}^m99$ beträgt, so ist der von F ausgezählte Breitezuwachs

$$\xi_0 = 206265'' \cdot \frac{x'_0}{r} = 23{,}''34$$

und folglich die geographische Breite des isolirten Pfeilers P_0 oder

$$\varphi^0 = \varphi + \xi_0 = 48^0\, 8'\, 43{,}''34. \qquad (\varepsilon)$$

In dieser Breite ist der Halbmesser des Parallels $r \cos \varphi_0$ und somit für die Ordinate $y'_0 = - 2503{,}^m04$ die Längendifferenz $P_0 - F$ oder

$$\eta_0 = 206265 \cdot \frac{y'_0}{r \cos \varphi_0} = 121{,}''124 = 8{,}^s075 \qquad (\zeta)$$

und folglich die geographische Länge von P_0 oder

$$\lambda_0 = \lambda + \eta_0 = 29^0\, 16'\, 16{,}''12. \qquad (\zeta')$$

Aus den beiden Werthen (γ) und (ε) ergibt sich für die beiden Pfeiler P_0 und P_4

$$\left.\begin{aligned} &\text{der Breitenunterschied } \varphi_4 - \varphi_0 = 23{,}''21 \\ &\text{der Längenunterschied } \lambda_4 - \lambda_0 = 141{,}''69. \end{aligned}\right\} \qquad (\eta)$$

In Zeit beträgt der geographische Längenunterschied zwischen dem nordwestlichen Beobachtungspfeiler am Polytechnikum in München (P_4) und dem isolirten Pfeiler auf der Sternwarte in Bogenhausen (P_0) nach (δ) und (ζ)

$$\mathbf{1{,}^s371 + 8{,}^s075 = 9{,}^s446 \pm 0{,}^s001} \qquad (\vartheta)$$

und es ist somit die Längendifferenz zwischen den obenbezeichneten Beobachtungspfeilern der Sternwarten in Leipzig und Bogenhausen bei München:

$$\mathbf{3^m\,17^s\!.186 - 9^s\!.446 = 3^m\,7^s\!.740 \pm 0^s\!.018.} \qquad (\iota)$$

Will man für die bayerische Sternwarte die geographische Länge auf die Mitte der westlichen Kuppel beziehen, welche um $8^m\!.41$ westlicher liegt, als der isolirte Pfeiler P_0, so beträgt der Längenunterschied zwischen dieser Kuppel und dem Pfeiler P_4 am Polytechnikum $9^s\!.446 - 0^s\!.027 = 9^s\!.419$ und es ist folglich die Längendifferenz zwischen dem Mittel der Sternwarte in Leipzig und der westlichen Kuppel der Sternwarte in Bogenhausen

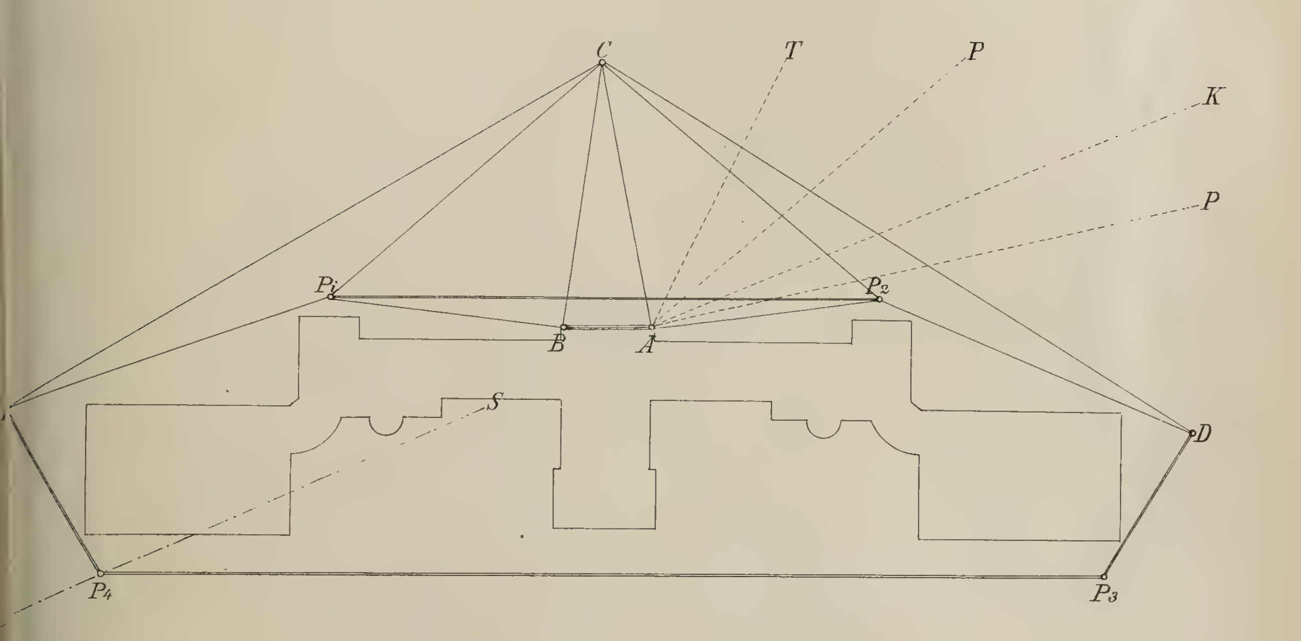
$$\mathbf{3^m\,17^s\!.154 - 9^s\!.419 = 3^m\,7^s\!.735 \pm 0^s\!.018.} \qquad (\varkappa)$$

Die beiden Werthe (ι) und ($\varkappa$), welche als gleiche betrachtet werden können, weichen somit von dem bisher angenommenen Längenunterschiede der beiden Sternwarten von $3^m\,8^s\!.1$ nur um 0,36 Zeitsekunde ab.

Inhaltsverzeichniss.



(Figur zum zweiten Abschnitt)




NATURAL HISTORY

Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSICALISCHEN CLASSE

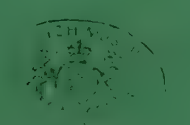
DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.



MÜNCHEN,

1876.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSICALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWÖLFTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XLIV. BAND.

MÜNCHEN,

1876.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Inhalt.

Ueber

Coeloptychium.

Ein Beitrag

zur

Kenntniss der Organisation fossiler Spongien.

Von

Karl Alfred Zittel,
ord. Mitglied der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Ueber Coeloptychium.

Ein Beitrag zur Kenntniss der Organisation fossiler Spongien.

Von

Karl Alfred Zittel,

ord. Mitglied der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften.

I. Allgemeiner Theil.

Einleitung.

Als ich bei Ausarbeitung eines Handbuchs der Paläontologie vor etwa einem Jahre bei den fossilen Spongien anlangte, wusste ich aus früheren gelegentlichen Untersuchungen hierher gehöriger Reste, dass sich bei dieser Classe besondere Schwierigkeiten erheben würden. Eine eingehendere Beschäftigung mit den bisher veröffentlichten Schriften zeigte auch bald, dass es hier nicht nur Hindernisse zu überwinden gäbe, sondern dass eigentlich noch Alles, was über die roheste Formbeschreibung hinausgehe, zu schaffen übrig sei. Keine Abtheilung der paläontologischen Literatur bietet ein so unbefriedigendes, man kann fast sagen abstossendes Bild dar, als die über fossile Spongien. Die neueren, bahnbrechenden Arbeiten von Grant, Bowerbank, Oscar Schmidt, Haeckel, Carter u. A. über die Organisation der lebenden Seeschwämme existirten für die Paläontologen kaum. Man hatte sich seit d'Orbigny und Fromentel daran gewöhnt, die fossilen Spongien als eine ganz eigenthümliche, völlig erloschene, von den lebenden weit entfernte Abtheilung sui generis zu betrachten und hatte mit sorglosem Unabhängigkeitssinn auf einer Grundlage weiter gebaut, deren Beschaffenheit kaum einer Prüfung unterzogen wurde.

Während bei den lebenden Spongien schon längst der feinere, mikroskopische Skeletbau fast ausschliesslich in der Systematik Verwerthung fand, hielt man sich bei den fossilen lediglich an die oberflächlichsten Merkmale der äusseren Formerscheinung. Ueber den vereinzelten Versuchen das Mikroskop auch zur Untersuchung der fossilen Formen zu verwenden, waltete ein eigenthümlicher Unstern. Es blieb z. B. die bereits im Jahr 1847 veröffentlichte, vortreffliche Arbeit Toulmin Smith's [1]) über die Ventriculiten der Kreideformation wahrscheinlich aus dem Grunde fast gänzlich unbeachtet, weil dieser Autor, irre geleitet durch gewisse Eigenthümlichkeiten der Oberfläche die genannten Spongienkörper für Bryozoenstöcke erklärte, auf deren Aussenseite sich zahlreiche Einzelthierchen in kleinen Vertiefungen befänden. Mit Beseitigung dieses leicht zu erkennenden Irrthums wurden auch alle übrigen, z. Th. sehr feinen Beobachtungen der Vergessenheit überliefert und damit ging die einzige Arbeit, welche die fossile Spongiologie in bessere Bahnen hätte lenken können, nahezu verloren. Auch die Abhandlungen von Capellini und Pagenstecher [2]) über einige Juraspogien, sowie die von Rosen [3]) über Stromatopora gingen von falschen Anschauungen über die chemische Beschaffenheit der fossilen Spongiengerüste aus und bewegten sich überdies auf so engen Gebieten, dass sie keinen Einfluss auf die herrschende Richtung auszuüben vermochten.

Fruchtbare Anregung gewährten erst einige gelegentliche Bemerkungen Wyville Thomson's [4]) und Oscar Schmidt's [5]) über gewisse Kreide und Jura-Spongien, worin sie auf deren Beziehungen zu den lebenden Hexactinelliden und Lithistiden hinwiesen. Damit war die Richtung bezeichnet, in welcher die bisher getrennten Wege der Zoologen und Paläontologen sich vereinigen müssen. Die Anbahnung einer Verständigung zwischen beiden, bisher fast feindlich sich gegenüberstehenden Lagern durch Anwendung einer gemeinschaftlichen wissen-

1) Annals and Magazine of natural history vol. XX. S. 73, 176 und 2 Ser. vol. I. S. 36, 203, 279, 352.
2) Siebold und Kölliker. Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie 1860. X. S. 363.
3) Inaugural Dissertation. Dorpat. 1867.
4) The deapth of the Sea 1873. S. 483.
5) Grundzüge einer Spongienfauna des atlantischen Oceans 1870.

schaftlichen Methode der Untersuchung ist der Hauptzweck dieser Abhandlung. An einem fast beliebig herausgegriffenen Beispiel wollte ich zeigen, dass wenigstens in gewissen Fällen die Untersuchung fossiler Spongien zu nicht minder sicheren Ergebnissen führt, als jene, welche sich mit frischen, dem Meer entnommenen Skeleten noch lebender Formen beschäftigt.

Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntniss der fossilen Spongien ist es unmöglich, einen Einblick in die phylogenetischen Beziehungen dieser Classe zu gewinnen. Erst durch eine umfassende mikroskopische Untersuchung der verschiedenartigen, in fossilem Zustande vorliegenden Skelete und durch ein genaueres Studium des physiologisch so wichtigen Canalsystems wird es gelingen, den sicheren Nachweis zu führen, dass allerdings ein ansehnlicher Theil der fossilen Spongien sich unmittelbar an die erst in neuerer Zeit genauer bekannt gewordenen Hexactinelliden und Lithistiden anschliesst, dass ausser diesen aber noch zahlreiche andere Typen von nicht minder charakteristischem Bau vorliegen, für welche die gegenwärtige Erdperiode keine Vertreter mehr besitzt.

Ich hoffe demnächst in einer grösseren Abhandlung die Ergebnisse meiner Untersuchungen über fossile Spongien veröffentlichen zu können; es schien mir aber wünschenswerth, dieser umfassenderen Arbeit die Monographie einer Gattung vorauszuschicken, welche in mehrfacher Hinsicht einer eingehenderen Betrachtung werth ist, als es dort geschehen könnte.

Durch ihre scharf ausgeprägte aber im Einzelnen sehr variable äussere Form, durch den regelmässigen, in den Grundzügen sich stets gleich bleibenden Bau des zusammenhängenden Gerüstes, durch die wunderbare Mannichfaltigkeit der isolirten Kieselgebilde, durch ihr fast plötzliches Auftauchen und durch ihr ebenso rasches Verschwinden nach einer kurzen Blütheperiode und endlich durch ihren beschränkten geographischen Verbreitungsbezirk bildet die Gattung Coeloptychium Goldf. einen so wohl umgrenzten natürlichen Typus, wie man ihn nicht leicht unter den Spongien wiederfinden wird.

Sie trägt ihren Namen passend nach den hohlen Falten der Körper-

wand und wurde zuerst von Goldfuss [1]) nach einem Exemplar von C. agaricoides aus dem oberen Kreidemergel von Lemförde in Westphalen aufgestellt; zwei weitere Arten C. lobatum und acaule sind p. 220 beschrieben und auf Taf. LXV. 11 und 12 abgebildet. Für C. acaule hat bereits L. Agassiz nachgewiesen, dass es sich hierbei nicht um einen Spongienkörper, sondern um den Wirbel eines Haies handle.

Goldfuss charakterisirt seine Gattung folgendermassen: Stirps agariciformis, stipitata, cava, lapidescens, e fibris reticulatis. Pileus profunde umbilicatus, poris reticulatis radiatim pertusus, inferne plicatus, plicis mammillato-tuberculatis.

In der Beschreibung des C. agaricoides sind die äusseren Merkmale sorgfältiger und richtiger dargestellt, als von den meisten späteren Autoren. Ueber die feinere Struktur dagegen sagt Goldfuss weiter Nichts, als dass das Skelet aus „feinen, gitterförmig gekreuzten Fasern besteht."

H. G. Bronn copirte in der ersten Auflage der Lethaea geognostica (1838 II. 594) die Goldfuss'sche Abbildung von C. lobatum, ohne über das Genus etwas Neues beizufügen.

Eine beträchtliche Bereicherung an Arten erhielt die Gattung Coeloptychium durch F. A. Roemer. In den Versteinerungen des norddeutschen Kreidegebirges werden den beiden bereits bekannten Arten aus Coesfeld noch 6 weitere beigefügt. (C. deciminum, C. sulciferum, C. incisum, C. alternans, C. plicatellum und muricatum.) Die zwei letzt genannten sind auf unansehnliche Fragmente begründet und nur mit Fragezeichen angeführt. Sie werden in Roemer's späterer, unten erwähnten Monographie der norddeutschen Kreide-Spongitarien auch nicht mehr bei Coeloptychium aufgezählt. Nach der äusseren Gestalt schliesst sich C. deciminum Roem. ziemlich enge an C. agaricoides Goldf. an, C. sulciferum und incisum Roem. halten die Mitte zwischen C. agaricoides und lobatum Goldf., C. alternans Roem. endlich gehört zur Gattung Becksia. Schlüt.

Sämmtliche von Goldfuss und Roemer beschriebene Arten stammen aus der oberen Kreide von Westfalen, Hannover und Braunschweig.

---

1) Petrefacta Germaniae I. p. 31.

Kurz nach dem Erscheinen des Roemer'schen Werkes veröffentlichte Fischer von Waldheim [1]) zwei Abhandlungen über die Gattung Coeloptychium. In der ersten sind drei in der Nähe von Moskau auf secundärer Lagerstätte gefundene Stücke als C. verrucosum, confluens und variolosum beschrieben, in der zweiten werden noch 4 weitere Arten (C. truncatum, Münsteri, Goldfussi und Jassikovii) beigefügt. Von diesen letzteren war die Herkunft genau bekannt. Sie fanden sich in der oberen Kreide des Gouvernements Simbirsk. Soweit sich nach den rohen Abbildungen schliessen lässt, ist C. truncatum ein ächtes Coeloptychium, die übrigen Arten jedoch gehören, wie ich mich durch Untersuchung einer Anzahl Exemplare aus dem Moskauer Museum, welche ich durch gütige Vermittelung des Herrn Const. Milaschewitsch erhielt, überzeugen konnte, nicht zu Coeloptychium. Sie bilden eine besondere Becksia Schlüt. zunächst stehende neue Gattung (Placuntarion), welche sich sowohl in ihrer Architektonik als auch in ihrer mikroscopischen Struktur sehr leicht von Coeloptychium unterscheiden lässt.

Eichwald [2]) kommt ebenfalls auf die Fischer'schen Coeloptychien zurück. Er reducirt die Zahl der Arten auf zwei (C. Goldfussi und variolosum), aber abgesehen von dieser nicht sehr förderlichen Aenderung enthält die Lethaea Rossica Nichts, was über die Organisation dieser merkwürdigen Versteinerungen Aufschluss gewähren könnte.

Nach Eichwald finden sich die russischen „Coeloptychien“ in einem kreidigen Mergel von Schilkowka (Gouv. Simbirsk) und im Neocomsandstein des Distriktes Kirssanow (Gouv. Tambow).

In neuester Zeit hat sich Sinzow [3]) abermals mit den Coeloptychien aus der Kreide des Gouvernements Saratow beschäftigt. Von den 3 erwähnten und vortrefflich abgebildeten Arten gehört nur C. subagaricoides Sinz. zu unserer Gattung und bildet darin einen eigenthümlichen, dem westlichen Europa fremdartigen Typus; die beiden

---

1) Bulletin de la soc. imp. des Natural. de Moscou 1843. vol. XVI. S. 667—69 und 1844. vol XVII. S. 276—282.

2) Lethaea Rossica II. 1. S. 79. 1865—1868.

3) Materialy dlä Geologii Rossii, IV. 1872. p. 49.

anderen fallen der Gattung Placuntarion zu. Sinzow gibt auch eine vergrösserte Abbildung des gitterförmigen Skeletes, welches er jedoch der Rosen'schen Auffassung folgend, für ein durch chemische Einflüsse verändertes, ursprünglich aus Hornfasern bestehendes Gewebe, betrachtet.

d'Orbigny [1]) und Pictet [2]) reproduciren lediglich die Goldfuss'sche Diagnose, ohne etwas Weiteres beizufügen und stellen die Gattung Coeloptychium in die Familie der Ocellariens zwischen Cribrospongia und Retispongia.

Bei Fromentel [3]) findet man Coeloptychium unter den Spongitaria porosa neben Cupulochonia, Thalamosmila, Amorphospongia, Stromatopora u. s. w.

F. A. Roemer's Monographie der Spongitarien des norddeutschen Kreidegebirges [4]) wird für die Unterscheidung der fossilen, cretacischen Spongienarten noch auf Jahre hinaus die Grundlage bleiben; für das Verständniss der Organisationsverhältnisse hat das Werk aber kaum etwas nennenswerthes beigetragen, da sich der Verfasser mit der rein äusserlichen Beschreibung seines schönen Materiales begnügte.

Die Monographie beginnt mit der Familie der Coeloptychidae, zu welcher nach Roemer jene Schwämme gerechnet werden, „die Innen aus gitterförmigem Gewebe bestehen, welches aber Aussen ganz oder grossentheils von einer dichten, nur undeutlich porösen, oft glatten und aus einem feinen bastartigen Gewebe bestehenden, leicht zerbrechlichen Epidermis umgeben ist, in welcher eine oder mehrere dünn umrandete, concave Vertiefungen liegen, deren Zweck zweifelhaft ist; das gitterförmige innere Gewebe bildet dichtome Zweige oder wurmförmige Leisten, welche bei den vollkommeneren Formen an der unteren Hälfte des Schwammes frei hervortreten und wohl auch mit rundlichen Mündungen versehen sind, bei den anderen im Innern versteckt liegen."

Diese ziemlich vag umschriebene Familie enthält die Gattungen Coeloptychium, Camerospongia, Cephalites, Cystispongia, Porospongia und Lepidospongia.

---

1) Cours élémentaire de paléontologie stratigr. II. S. 211.
2) Traité de Paléontologie. 2. Ed. vol. IV. S. 537.
3) Introduction à l'étude des éponges fossiles. (Mém. soc. Lin. de la Normandie vol. XI. 1859) S. 44.
4) Palaeontographica. XIII. 1864.

Coeloptychium selbst hält Roemer für die höchststehende Form unter den fossilen Spongien. „Die Schwämme haben die Gestalt eines einfüssigen runden Tisches, eines Schirms oder eines Trichters; sie sind gestielt und mit Wurzeln versehen; die obere Fläche ist eben, flach, concav oder trichterförmig vertieft und meist concentrisch gefurcht; auf der unteren Fläche liegen starke, meist dichotome Falten, welche ein gitterförmiges Gewebe und eine Reihe glatter rundlicher Mündungen zeigen; die steile Seitenfläche ist von glatter Epidermis überzogen und zeigt ein sehr feines bastartiges Gewebe.“ Es folgen nun die kurzen Diagnosen der schon früher beschriebenen Arten (mit Ausnahme von C. plicatellum und muricatum), nebst einer neuen Species (C. princeps) aus Lemförde, worin lediglich die äussere Form Berücksichtigung findet.

Ueber den feineren Skeletbau vermisst man bei Roemer jede über Goldfuss hinausgehende Auskunft.

Gegen die Abgrenzung der Roemer'schen Arten wurde von Grotrian [1]) auf Grund eines sehr reichen und schön präparirten in der oberen Kreide von Vordorf bei Braunschweig gefundenen Materials bei Gelegenheit der Naturforscher-Versammlung zu Hannover Einsprache erhoben. Nach Vorlage und eingehender Beschreibung von 35 Exemplaren sprach Grotrian die Ansicht aus, dass C. agaricoides und deciminum zu einer Species zu vereinigen, auch C. sulciferum von C. lobatum kaum zu trennen sein möchte, während C. incisisum Roemer, wiewohl entschieden ein Uebergang von C. agaricoides in lobatum, als Mittelform bestehen bleiben könne.

Zu einem sehr entgegengesetzten Resultat gelangte A. Pomel durch Vergleich der von Goldfuss und Roemer veröffentlichten Abbildungen. Für diesen modernsten „Reformator“ der Spongiologie zerfällt die Gattung Coeloptychium Goldf. in 4 Genera. Davon enthält Coeloptychium im engeren Sinn die Arten mit abwechselnden dichten und grobmaschigen Radial-Streifen auf der Oberseite und mit einfachem oder wellig gebogenem Rande. (C. agaricoides und princeps.)

---

1) Amtl. Bericht der 39. Versammlung deutscher Naturforscher in Hannover S. 148.

Homoptychium Pomel. besitzt eine gleichmässig maschig gegitterte Oberfläche von scheinbar concentrischer Struktur (C. deciminum Roem.) Davon unterscheidet sich Schizoptychium Pom. durch faltigen Rand (C. incisum und sulciferum Roem.) Lophoptychium Pom. endlich enthält die Formen mit porig gegitterter, concentrischer Oberfläche und tief lappigem Rand (C. lobatum. Roem.)

Diese Classification ist absolut werthlos und lässt sich nur dadurch erklären, dass Herr Pomel nur wenige Exemplare von Coeloptychium in Händen gehabt haben kann. Wie aus dem speciellen Theil hervorgeht, werden die verschiedenen nächst verwandten Arten in unnatürlicher Weise auseinander gerissen und verschiedenen Gattungen zugewiesen. Im Pomel'schen System stehen Coeloptychium, Homoptychium etc. neben Camerospongia d'Orb und Cephalites Smith.

Ueber das geologische Vorkommen der Coeloptychien im westfälischen Münsterland veröffentlichte Clemens Schlüter [2]) im Jahre 1872 sehr genaue Angaben. In der gleichen Abhandlung gibt Schlüter auch über die Beschaffenheit der Deckschicht der Oberseite, sowie über die Beziehung der feinporösen Radialbänder derselben zu den Falten der Wand richtigeren Aufschluss, als dies von früheren Autoren geschehen war.

Wenn ich schliesslich noch auf eine Mittheilung J. Ewald's [3]) über eine mit gefaltetem Stiel versehene Art aus Haldem in Westphalen hinweise, so dürfte die Literatur, welche sich speciell mit der Gattung Coeloptychium beschäftigt, ziemlich vollständig aufgezählt sein.

Unter den fossilen Spongien gibt es wenige, welche sich vermöge ihres günstigen Erhaltungszustandes besser zur mikroskopischen Untersuchung eignen als die Coeloptychien. Das Skelet besteht vollständig aus Kieselsubstanz und zwar sind die feineren, zerbrechlicheren Gitterfasern im Innern durch ziemlich derbe Deckschichten gegen zerstörende Einflüsse geschützt. Ich erhielt von dieser Beschaffenheit zuerst Kennt-

---

1) Paléontologie de la Province d'Oran. Spongiaires. 1872. S. 69.

2) Ueber die Spongitarien-Bänke der oberen Quadraten und unteren Mukronaten-Schichten des Münsterlandes. Bonn. 1872.

3) Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde in Berlin 1873. S. 38.

niss, als ich ein Fragment aus dem Kreidemergel von Haldem mit Salzsäure behandelte. Nach kurzer Zeit war die kalkige Ausfüllungsmasse aufgelöst und das Kieselskelet in untadeliger Reinheit präparirt. Vielfach wiederholte Versuche mit Exemplaren von Haldem, Vordorf, Darup, Ahlten und Coesfeld ergaben stets dasselbe Resultat, namentlich, wenn die Säure nicht zu stark angewendet und dadurch das Zerreissen der leicht zerbrechlichen grobmaschigen Radien auf der Oberfläche verhindert wurde. Sehr überraschend war mir das massenhafte Vorkommen freier Kieselgebilde von theilweise ungemein zierlicher Form in dem durch Aetzen gewonnenen schlammigen Rückstand, da von derartigen Körpern bei Coeloptychium bisher niemals Erwähnung geschehen war. Ich konnte mich indess durch Besichtigung meiner Exemplare mittelst einer scharfen Loupe sofort überzeugen, dass die Nadeln sowohl in den äusseren, zwischen den Falten der Unterseite befindlichen Furchen, als auch innerhalb der Falten in den Radialkammern der Leibeshöhle in ausserordentlicher Menge zerstreut liegen und demnach nicht als zufällig eingeschwemmte Gebilde betrachtet werden dürfen.

Diese Entdeckung machte sehr zeitraubende, bei den verschiedenen Arten stets von Neuem zu wiederholende Untersuchungen nöthig, denn es konnte sich jetzt nicht mehr allein um die Feststellung der feineren Struktur des zusammenhängenden Gerüstes handeln, wie ich anfänglich vorausgesetzt hatte, sondern es verlangten auch die ungewöhnlich zahlreichen und mannichfaltigen freien Kieselgebilde ein eingehendes Studium.

Für die schliessliche Fixirung meiner Beobachtungen durch naturgetreue bildliche Darstellungen kam mir der günstige Umstand zu Statten, dass sich Herr Conrad Schwager, Assistent am paläontologischen Museum, in liebenswürdiger Bereitwilligkeit der Mühe unterzog, alle bemerkenswerthen Objecte mittelst Camera lucida abzuzeichnen und aus der grossen Anzahl so gewonnener Bilder eine von mir getroffene Auswahl mit künstlerischem Verständniss auszuführen. Ich bin Herrn Schwager für diese Beihülfe zu nicht geringem Danke verpflichtet.

Ueber die äussere Form und den allgemeinen Bau der Coeloptychien.

Die verkieselten Schwammkörper der Coeloptychien tragen bei aller Verschiedenheit der einzelnen Arten ein so bestimmtes Gepräge, dass sie leicht von allen anderen fossilen Spongien unterschieden werden können. Sie besitzen alle eine gewisse Aehnlichkeit mit einem gestielten Hutpilz. Der obere ausgebreitete Theil hat entweder die Gestalt einer breiten ebenen oder in der Mitte vertieften Scheibe oder die eines pilzähnlichen, seitlich gewölbten Hutes. Durch den mehr oder weniger verlängerten, im Boden steckenden, aber niemals auf fremden Körpern festgewachsenen Stiel wird die Orientirung in sehr bestimmter Weise gegeben. Man unterscheidet an dem hut- oder scheibenförmigen Theil die eigentliche Oberfläche, die Seitenflächen und die Unterfläche. Bei C. deciminum und agaricoides erscheint der obere Theil des Schwammkörpers wie ein runder Tisch mit ebener Decke; bei anderen Arten (C. princeps) senkt sich die Mitte mehr oder weniger ein und kann sich sogar (C. lobatum) zu einem engen Trichter vertiefen. Ihr Umfang hängt von der Grösse des Hutes selbst, dann aber auch von dem steilen oder schräg geneigten Abfall der Seitenflächen ab. Bei C. deciminum Roem. und C. agaricoides Goldf. aus Vordorf zeigt die Oberflächenscheibe in der Regel einen grössten Durchmesser von 70 mm., während Exemplare von C. rude Seeb. und princeps Roem. aus Ahlten und Haldem bis 200 mm. und mehr im Umfang messen.

Häufig wird die Oberfläche gleichmässig durch eine aus viereckigen, meist etwas verzerrten, zuweilen gerundeten, ziemlich groben Maschen bestehende netzartige Deckschicht gebildet, worin sich eine concentrische Anordnung in Folge durchlaufender Parallelstreifen geltend macht. Bei anderen Arten (C. princeps, rude, agaricoides) besteht die Deckschicht aus abwechselnden in einiger Entfernung von der Mitte beginnenden Radialstreifen, von denen die einen aus dem eben beschriebenen grobmaschigen Gewebe bestehen, während die anderen eine sehr viel dichtere fein poröse Struktur besitzen. Der Centraltheil besteht aber auch hier immer aus dem grobmaschigen Netzwerk. Zuweilen erheben sich die feinporösen Streifen zu schwachen Radialfalten.

Die Seitenflächen variiren bei den verschiedenen Arten sehr beträchtlich nach Breite, Neigung und Form, und sind stets durch eine Kante scharf von der Oberfläche getrennt. Bei einzelnen Arten fallen sie fast senkrecht ab, bei andern sind sie schräg geneigt (C. Seebachi), wieder bei anderen sehr breit und stark gewölbt (C. sulciferum und lobatum). Der hierdurch gebildete Rand des Schirms ist entweder eben und ungetheilt oder auch mit tiefen Einschnitten versehen und lappig. Die Oberfläche der Seiten wird von einer soliden, dem unbewaffneten Auge beinahe glatt oder fein porös erscheinenden Schicht bekleidet.

Nach unten werden die Seitenflächen ebenfalls ziemlich scharfkantig von der horizontalen Unterseite des Schirms geschieden, welche unmittelbar in den Stiel verläuft. Das obere Ende des hohlen Stieles breitet sich nämlich mehr oder weniger plötzlich aus, so dass im letzteren Falle ein sehr weit geöffneter Trichter entsteht, im anderen Falle, wenn die Ausbreitung im rechten Winkel erfolgt, eine horizontale Fläche gebildet wird. Die Unterseite ist immer tief gefaltet und zwar beginnen die Falten bereits an der Basis oder wenigstens am oberen Ende des Stieles und verästeln sich bei ihrem Verlauf nach dem Rande durch ein- oder mehrfache Bifurcation in 18—50 Falten. Bei C. lobatum sind 5 Primärfalten vorhanden, welche sich meist nur einmal und zwar ganz nahe am Stiel gabeln, bei den Arten mit mehrfach verästelten Falten zählt man 5—9 Primärfalten, die sich aber keineswegs in ganz gleicher Weise gabeln. Dadurch wird das Zählen der Falten auch etwas unsicher, denn manchmal schiebt sich zwischen eine mehrfach vergabelte Falte eine ganz einfache ein. Die Oberfläche der Falten ist mit grösseren Poren versehen, als der Rand; in der Mitte ihres Rückens befindet sich in regelmässigen Abständen eine Reihe von grösseren, runden oder länglich schlitzartigen Ostien.

Schneidet man den Schirm eines Coeloptychiums in tangentialer Richtung an (Taf. I. Fig. 7.), so zeigt sich, dass die Falten der Unterseite und des Stieles zu der eigentlichen Wand des Spongienkörpers gehören, während die Seiten und die Oberfläche nur mit einer dünnen Deckschicht belegt sind. Diese in der oben beschriebenen Weise gefaltete Wandung ist etwa 1—2 mm. dick und besteht aus einem zusammenhängenden Gerüste von rechtwinklich sich kreuzenden Kiesel-

fäden. Die im Anschnitt mäandrisch gebogene Wand faltet sich immer in der Art, dass die abwechselnd senkrecht auf- und absteigenden Wände sich nicht berühren, sondern Zwischenräume zwischen sich frei lassen. Dadurch entstehen einerseits auf der Unterseite die tiefen, vergabelten Radialfurchen, anderseits im Innern der Falten radiale canalartige Kammern, welche gegen oben durch die Deckschicht geschlossen sind.

Diese eigenthümliche, bei Ventriculites und Cephalites in ganz ähnlicher Weise vorkommende Faltung der Wand wird noch verständlicher, wenn man die Betrachtung von dem Stiele aus beginnt. Der Stiel ist nichts anderes als der untere mehr oder weniger rasch verengte Theil des Spongienkörpers. Seine Wand besitzt die gleiche Stärke und übereinstimmende Struktur mit der gefalteten Wand des Schirms. Bei einzelnen Arten (C. princeps Taf. II. Fig. 23) tritt diese Beziehung sehr klar zu Tage, da sich hier der trichterförmige Spongienkörper ganz allmälig gegen die Basis verengt, so dass Schirm und Stiel überhaupt nicht scharf von einander geschieden sind. Hier schliesst der Stiel nach unten mit einem abgestutzten, nicht verästelten Rande ab. Die Wand dieses kurzen Stieles, welche einen nach oben sich rasch erweiternden Hohlraum einschliesst, wirft gleich von Anfang 5—6 Falten, die sich weiter oben durch Dichotomie verdoppeln und weiter vermehren. Die grossen Ostien auf dem Rücken der Falten gehen bei C. princeps bis an das unterste Ende des Stieles herab, nur sind sie hier kleiner, manchmal auch durch überwuchernde Kieselsubstanz geschlossen.

Bei den meisten Arten gehen Schirm und Stiel nicht so allmälig in einander über, sondern der Spongienkörper beginnt mit einem gefalteten oder glatten, gegen oben wenig erweiterten Cylinder oder umgekehrten Hohlkegel. Der untere Rand desselben ist entweder abgestuzt oder mit wurzelartigen Ausläufern versehen, die sich übrigens nicht an fremde Körper festheften. Bei C. agaricoides erreicht der Stiel zuweilen eine Länge von 50 mm., an anderen Exemplaren derselben Art kann er aber auch zu einem ganz kurzen Stumpf verkümmern. Er ist jedenfalls in Form und Grösse der unbeständigste Theil des Coeloptychiumkörpers. Bei den deutlich gestielten Formen tritt am oberen Ende des

Stieles mit einem Mal eine rechtwinkliche Ausbreitung ein und es entsteht alsdann der schirm- oder pilzförmige auf der Unterseite mit starken Falten versehene Kopf oder Schirm des Schwammkörpers.

Jedes Coeloptychium beginnt demnach als ein cylindrischer oder trichterförmiger Körper und erhält erst in einem späteren Entwicklungsstadium seine typische Form.

Beachtenswerth ist noch, dass sich im Inneren des hohlen Stieles in grösseren Abständen grobmaschig durchlöcherte Kieselscheiben befinden, welche sich horizontal über die Höhle ausspannen, indem sie sich mit feinen Kieselfäden an die Innenwand befestigen. Diese Scheiben erinnern an die Böden bei gewissen Korallen und Kalkschwämmen.

Das Canalsystem.

Wenn man durch den Schirm eines Coeloptychiums einen horizontalen Schnitt macht (Taf. 1. Fig. 6.), so erhält man einen Einblick in die Anordnung und die Beschaffenheit der centralen Leibeshöhle. Wie bereits oben bemerkt, ist die eigentliche Wand des Körpers stark gefaltet. Sämmtliche Falten haben gleiche Höhe, so dass ihre Rücken auf der Unterseite und ihre oberen unter der Deckschicht so ziemlich in gleichen Ebenen liegen. Da sich ihre senkrechten Seitenwände nicht berühren, sondern einen Raum zwischen sich frei lassen, welcher meist doppelt so breit, als die Wand selbst ist, so entstehen aussen tiefe Furchen, im Innern der Falten aber verästete Radial-Räume von gleicher Höhe, die in der Mitte zusammen laufen, wo sich ein centraler vertiefter in den Stiel hinabführender Hohlraum befindet. Diese radialen Räume werdennach unten von der umgebogenen Wand, nach aussen von der feinporösen dünnen Randschicht, auf den Seiten von der senkrecht gefalteten Wand und nach oben von der oben beschriebenen, grobmaschigen Deckschicht der Oberfläche abgeschlossen. Letztere legt sich unmittelbar auf die oberen Faltenrücken und spannt sich wie eine Haut über die ganze Oberfläche, oder wenn dieselbe trichterförmig vertieft ist, über die Innenseite des Trichters aus. Bei den Arten mit radialen Bändern

von dichterer und gröberer Porosität ist die Deckschicht stets da, wo sie auf den Falten selbst aufliegt, glatt, ganz fein porös, zuweilen auch etwas erhöht, während sie über den Radialkammern immer eine grobmaschige Beschaffenheit besitzt. Obwohl nun diese radialen Räume unzweifelhaft zur Wassercirculation dienen, so sind sie doch nur als Theile der Leibeshöhle zu betrachten und am ehesten mit den Mesentherialkammern der Korallen zu vergleichen. Sie hängen unmittelbar mit dem vertieften Central-Raum zusammen und erhalten nur durch die dicht aufliegende Deckschicht ein canalartiges Aussehen. Durch die Maschen der Oberflächenschicht konnte Wasser ziemlich ungehindert aus diesen Radial-Räumen ausströmen oder in dieselben eintreten. Auf allen anderen Seiten war die Circulation weniger leicht, da dort entweder die ziemlich dicke gefaltete Wand oder die fein poröse Deckschicht des Seitenrandes die Begrenzung der Radial-Kammern bilden. Ganz vereinzelt befinden sich allerdings runde etwas grössere Oeffnungen am oberen Theil der Seitenwände, aber eine reichliche Zufuhr oder Ausfuhr von Wasser konnte hierdurch nicht bewerkstelligt werden. Nur in der Mittellinie des unteren Faltenrücken ist die Wand, wie bereits früher erwähnt, von einer Reihe entferntstehender einfacher Canäle durchbohrt, deren ziemlich grosse Oeffnungen gewöhnlich runde, zuweilen aber auch spaltförmige Gestalt besitzen. Betrachtet man diese Ostien als Einführungsöffnungen, so gelangte der Wasserstrom von unten in die Falten, vertheilte sich in die zur Centralhöhle führenden Radial-Kammern und trat oben durch die löcherige Deckschicht wieder aus. Umgekehrt müsste die Circulation gewesen sein, wenn das Wasser von der Oberseite eintrat; dann waren die an der Basis der Canäle befindlichen Löcher wirkliche Ausströmungsöffnungen. Die Entscheidung dieser für die Deutung des ganzen Schwammgerüstes wichtiger Verhältnisse lässt sich nur durch einen Vergleich mit verwandten Formen ermöglichen. Festzuhalten aber ist, dass das eigentliche Canalsystem aus ganz einfachen in radialen Reihen geordneten, die Wand senkrecht durchbohrenden und in die Faltenräume einmündenden Röhren besteht.

Deutung der verschiedenen Theile des Coeloptychium-Körpers.

Betrachtet man den Stiel der Coeloptychien als den ältesten Theil des Gerüstes, und dies wird, wie später gezeigt werden soll, durch seine Struktur zur Gewissheit gemacht, so beginnen sämmtliche Arten als trichterförmige oder cylindrische Körper mit vollständig oder nur am oberen Theil gefalteter Wand. Wahrscheinlich war derselbe noch oben durch eine siebartige Kieselplatte geschlossen; diese Siebplatten scheinen später nicht mehr vollständig resorbirt zu werden, denn man findet zuweilen, wie bereits bemerkt, mehrere derselben in ansehnlichen Abständen noch im Stiele erhalten. Coeloptychium princeps behält die ursprünglich trichterförmige Jugendform auch bei der weiteren Entwicklung bei, die übrigen Arten jedoch breiten sich oben in nahezu horizontaler Richtung mächtig aus. Denkt man sich nun an einem Coeloptychium die Deckschicht der Oberfläche und die feinporöse Randschicht beseitigt, so bleibt ein mit stark gefalteter Wand versehener, oben trompetenartig ausgedehnter Trichter übrig, bei welchem auf der äusseren (unteren) und inneren (oberen) Seite verästelte Längsfurchen vom oberen Rand nach der Basis verlaufen. In der Gestalt würde ein seiner beiden Deckschichten beraubtes Coeloptychium princeps ziemlich gut einem Ventriculites radiatus Mantell (Fossil of the South Downs Pl. IX) entsprechen. Die Beziehungen zu Ventriculites beruhen aber nicht etwa nur in einer gewissen äusseren Formähnlichkeit, es ist vielmehr auch eine unzweifelhafte Homologie in den übrigen Theilen des Körpers nachzuweisen.

Abgesehen von der sehr bemerkenswerthen Uebereinstimmung im feineren Bau des zusammenhängenden Skeletes, von welcher im folgenden Abschnitt ausführlicher die Rede sein wird, zeigen viele Ventriculiten und Cephaliten, wie dies Toulmin Smith so vortrefflich beschrieben hat [1]) (l. c. S. 87), fast genau dieselbe mäandrische Faltung der Körperwand, wie sie bei Coeloptychium regelmässig vorkommt. Es gibt Arten von Ventriculites (Gruppe der Simplices Smith), bei welchen wie bei

1) Annals and Magaz. nat. history. vol. XX. 1847. S. 73 etc.

Coeloptychium mit jeder Furche auf der Aussenseite eine erhabene Falte auf der Innenseite correspondirt. Häufig freilich zeigt sich die Wand der Ventriculiten und Cephaliten weniger regelmässig beschaffen. Im Allgemeinen entspricht aber die Aussenseite bei Ventriculites der Unterseite von Coeloptychium, die Innenseite der Oberfläche und der obere Rand den steilen Seitenflächen. Bei Ventriculites fehlt eine besondere Deckschicht des oberen Randes, während eine solche bei Cephalites, wo sich der Rand immer verdickt, wohl entwickelt ist und in ihrer Beschaffenheit mit der Deckschicht der Seitenflächen bei Coeloptychium übereinstimmt. Ein der grobmaschigen oder radialstrahligen oberen Deckschicht von Coeloptychium entsprechendes Gebilde fehlt den meisten der T. Smith'schen Gattungen, denn die sog. „Polyp skin" Smith's befindet sich sowohl aussen als innen und folgt genau dem Verlauf der gefalteten Wand. Es findet sich jedoch ein der Oberflächenschicht von Coeloptychium homologes Gebilde bei Scyphia (Cylindrospongia) alveolites Roem. [1]) aus dem oberen Pläner von Peine. Hier wird der weite Centralraum des cylindrischen Schwammkörpers, dessen Wand eine Ventriculiten ähnliche Struktur besitzt, durch eine sehr weitmaschige concave Gitterplatte vollständig überdacht. Niemand wird verkennen, dass diese Platte bei Scyphia alveolites Roem. der bekannten Siebplatte bei den lebenden Euplectellen entspricht. Dadurch erhalten wir aber einen erwünschten Vergleich mit einer lebenden Hexactinellide. Wenn man die früher beschriebenen diaphragmaähnlichen Böden im Stiele der Coeloptychien nach ihrer Lage und selbst nach ihrer groblöcherigen Beschaffenheit betrachtet, so kann man sich des Gedankens nicht erwehren, dass uns hier die Reste ehemaliger Siebplatten des jungen Schwammkörpers vorliegen; sie entsprechen in der That in ihrer Struktur ganz genau dem centralen Theil der oberflächlichen Deckschicht an ausgewachsenen Exemplaren. Man kann sich nun leicht den Process vorstellen, wie mit der Ausbreitung der Seitenwände gleichzeitig auch die Siebplatte an Umfang wachsen musste. Bei gewissen Arten (C. lobatum, incisum) behielt sie ihre ursprüngliche Struktur bei, bei andern dagegen erhielten die unmittelbar den Faltenrücken aufgelagerten Theile eine dichtere Struktur und es

---

1) Versteinerungen des norddeutschen Kreidegebirges t. 3. fig. 6.

entstand auf solche Weise die eigenthümliche sternförmige Zeichnung der Deckschicht bei manchen Coeloptychium-Arten (C. agaricoides, deciminum, princeps).

Euplectella differirt bezüglich der feineren Struktur des Skelets beträchtlich von Coeloptychium, indem seine Skeletnadeln nicht nur eine andere Form besitzen, sondern auch zum grossen Theil unverbunden sind und sich hauptsächlich nur durch ihre Lagerung zu einem zusammenhängenden Gerüste verfilzen. Auch die äussere Form ist bekanntlich sehr verschieden. Dennoch fehlt es beiden Gattungen nicht an fundamentalen Homologien. Vor Allem fällt eine gewisse Regelmässigkeit, eine radiale Antimerenbildung in der Anordnung der Skelettheile in die Augen; sie ist bei Coeloptychium noch ausgesprochener, als bei Euplectella. Wie bei letzterer zeigt sie sich bei zahlreichen fossilen Hexactinelliden (Ventriculites, Cribroscyphia, Ocellaria, Guettardia, Coscinopora), die alle auch mit Coeloptychium verwandt sind.

Gehen wir nun von Euplectella aus, deren Weichtheile freilich auch erst unvollkommen bekannt sind, so entsprechen die verschiedenen Theile ihres Skeletes denen von Coeloptychium in folgender Weise:

Euplectella:	Coeloptychium:
Siebplatte.	Deckschicht der Oberseite.
Oberer Rand des Cylinders.	Seitenfläche des Schirms.
Maschige aus Nadelzügen gebildete Wand des Cylinders.	Faltige aus gitterförmigem Gewebe bestehende Wand.
Centralraum des Cylinders.	Höhlung des Stieles, vertiefter Centraltheil und verästelte von der Deckschicht überdachte Radialkammern der gefalteten Körperwand.
Grosse Ostien in den Maschen der Seitenwand.	Ostien auf den Falten der Unterseite.
Isolirte Kieselnadeln.	Isolirte zwischen den Falten gelegene Kieselnadeln.
Glasschopf der Basis.	Unterstes Ende des Stieles.

Was nun die Deutung der einzelnen Theile des Euplectellengerüstes betrifft, so hält Max Schultze dasselbe für einen zusammengesetzten Stock, indem er die runden Löcher in den Maschen der Seitenwand für Ausströmungsöffnungen erklärt. Bowerbank, Claus und neuestens auch Marschall dagegen betrachten die Euplectellen als solitäre Organismen. Bowerbank vergleicht sie mit Grantia, Claus mit den Syconen und Marshall mit den Leuconen. Es rühren diese verschiedenen Auffassungen von der Deutung des Canalsystemes bei Euplectella her, welche für uns kein specielles Interesse besitzt, da es sehr beträchtlich von jenem der Coeloptychien abweicht. In der Hauptsache indess sind die drei letztgenannten Autoren einig. Sie halten nämlich den weiten Hohlraum des Cylinders, welcher gewöhnlich einem kleinen Krebs als Wohnung dient, für die Magenhöhle, deren Schornstein durch eine durchlöcherte Siebplatte geschlossen wird; die Oeffnungen in den Seitenwänden sind die Einströmungs-Ostien der radial geordneten zahlreichen Wassercanäle.

Folgt man dieser Deutung bei der Gattung Coeloptychium, so hätte man den Schwammkörper als Skelet einer einzelnen Person zu betrachten. Die Magenhöhle wird nach oben von einer verhältnissmässig fein durchbrochenen Siebplatte abgeschlossen, welche durch ihre meist radiale Beschaffenheit eine eigenthümliche Zertheilung der Auswurfsströmung andeutet. Es erklärt sich diese Erscheinung sogleich durch die in Radialkammern zerlegte Magenhöhle, deren Antimeren offenbar gerade so ihre eigenen Auswurfsströmungen besassen, wie sie mit besonderen Einfuhrcanälen versehen sind. Für die Verwandtschaft der Spongien und Korallen dürfte die Art und Weise, wie sich die Leibeshöhle der Coeloptychien in radiale, den Mesentherialräumen der Korallen entsprechende Kammern zerlegt, alle Beachtung verdienen, zumal da diese Bildung keine ganz vereinzelte ist. Eine starke Faltung der Innenwand findet sich nämlich auch bei anderen hexactinelliden Gattungen und zwar am ausgezeichneten bei gewissen Ventriculiten und Cephaliten.

Das feste, zusammenhängende Kieselgerüste.

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich ausschliesslich auf jenen pilz- oder tischförmigen Körper, dessen äussere Form bedingt wird durch die Beschaffenheit und Anordnung der kleinen Kieseltheilchen, aus welchen das zusammenhängende Gerüste besteht. Der feinere Bau dieses Skeletes erfordert eine speciellere Betrachtung, da er bis jetzt noch völlig unbekannt geblieben ist, und zwar müssen bei der Beschreibung auseinander gehalten werden 1) das eigentliche Baumaterial der Körperwand und des Stieles und 2) die diese umkleidenden Deckschichten.

1) Wie bereits früher bemerkt, besteht die gefaltete Wand, deren Dicke bei den kleineren Arten 1 mm., bei den grössten 2,5 mm. beträgt, aus dreierlei Parallelzügen verschmolzener Kieselnadeln, welche sich rechtwinklich in gleichen Abständen kreuzen und so ein aus cubischen Maschen bestehendes Gitterwerk bilden. Diejenigen Züge, welche in radialer Richtung den Falten parallel laufen, können als Längszüge oder Längsaxen bezeichnet werden; die vertical darauf stehenden, der Faltenhöhe entsprechenden sind die Verticalaxen und die rechtwinklich gegen die Seitenwände der Falte verlaufenden, die Dicke der Wand durchkreuzenden, mögen Queraxen heissen. Nicht immer haben die cubischen Maschen eine streng regelmässige Gestalt; es treten zuweilen zwei Axen etwas enger zusammen oder sie verlaufen nicht ganz geradlinig, so dass das Gitterwerk kein absolut gleichartiges Bild gewährt. Immerhin gibt es aber unter den fossilen und lebenden Spongien wenig Gattungen mit gleich regelmässigem Gerüste.

An Exemplaren, welche man mit Säure behandelt hat, lässt sich der wundervolle Bau des Gitterwerkes im Innern der Falten schon mit unbewaffnetem Auge erkennen. Man zählt je nach der Dicke der Wand und nach den Arten auf einer Queraxe 5—10 Kreuzungspunkte, die eben so vielen Längszügen entsprechen. Häufig stehen die Längsaxen etwas weiter auseinander als die Quer- und Vertical-Axen, so dass die Maschen einer Ebene Rechtecke bilden, deren Höhe etwa 0,4 mm., die Breite 0,35 mm. beträgt.

Betrachtet man das Gitterwerk unter dem Mikroskop, so sieht man, wie sich die Kieselfasern an den Knotenpunkten nicht einfach durchkreuzen und dann weiter verlaufen, sondern in der Nähe der Kreuzungsstellen sendet jeder der sechs rechtwinklich zusammenkommenden Strahlen vier in zwei Ebenen gelegene schräge Aeste aus, welche sich mit den entsprechenden der Nachbaraxen vereinigen und auf diese Weise um den Kreuzungspunkt die zwölf Kanten eines regelmässigen Octaëders herum legen. In dem Hohlraum dieses an den Seiten offenen Octaëders sieht man bei günstiger Lage ein durch die in gerader Richtung fortlaufenden Axen gebildetes Kreuz, welches dem Axenkreuz eines regelmässigen Octaëders entspricht.

In den Kieselfäden der drei rechtwinklichen Axenzüge bemerkt man Canäle von ziemlich ansehnlicher Stärke. Sie sind häufig durch Eisenoxyd gefärbt, oder sie enthalten auch zahlreiche Stückchen dieser braunrothen Substanz. Ein besonderer Axencylinder scheint, wie bei der lebenden Gattung Eurete, nicht vorhanden zu sein. Die Abbildungen Wyville Thomson's von Ventriculites [1]), sowie die stark vergrösserte Zeichnung O. Schmidt's [2]) eines Gerüstfragments der fossilen Scyphia striata lassen die Centralcanäle der sechs Strahlen unmittelbar vor dem octaëdrischen Hohlraum aufhören. Dies ist jedoch bei Coeloptychium nicht der Fall. Die Hauptstrahlen verdünnen sich zwar etwas, nachdem sie die octaëdrischen Seitenkanten abgesendet haben, allein sie verlängern sich bis in die Mitte des octaëdrischen Hohlraums und bilden auf diese Weise in dem Octaëder ein zierliches Axenkreuz. In diesen Centralstrahlen verlaufen die Canäle, die schrägen Octaëderkanten sind wie alle sekundären Kieselfortsatze von dichter Beschaffenheit.

Die ausserordentliche Regelmässigkeit des Gerüstes liesse sich am einfachsten durch die Annahme erklären, dass dem Kieselskelet entsprechende Sarkodezüge vorhergingen, welche sich in dreifacher Weise rechtwinklich kreuzten. Um diese hätte sich alsdann nach und nach Kieselsubstanz ablagern und so eine continuirliche Röhre bilden können,

---

1) The deapth of the Sea. S. 185. Fig. 82.
2) Atlant. Sp. t. I. fig. 16.

wie dies Marshall bei Sclerothamnus auch nachgewiesen hat.[1] So verhält es sich aber bei Coeloptychium nicht. Bei schwacher Vergrösserung scheint zwar der Canal in den einzelnen Hohlstäbchen eine einfache Röhre zu bilden, welche durch die ganze Axe verläuft; wendet man aber stärkere Vergrösserung an, so sieht man, dass die scheinbaren Centralröhren der drei Axen in ebenso viele sechsstrahlige Kreuze zerfällt, als Knotenpunkte vorhanden sind. Im Gerüste ordnen sich diese Axenkreuze so an, dass immer je zwei Strahlen in die gleiche Axe fallen, indem sich in jedem Kieselstäbchen die von zwei benachbarten Kreuzungsstellen kommenden Schenkel begegnen. Nicht selten treffen sie so genau zusammen, dass scheinbar eine einfache Röhre entsteht, meistens aber laufen die beiden Schenkel getrennt entweder dicht oder in einiger Entfernung neben einander her, oder sie können sich sogar durchkreuzen. (Taf. III. Fig. 11 und Taf. V Fig. A). Man beobachtet also bei Coeloptychium dieselbe Erscheinung, welche Carter[2] zuerst bei Farrea und Aphrocallistes, W. Marshall[3] bei Eurete, Farrea und Periphragella dargestellt haben und welche überhaupt für die fossilen Hexactinelliden charakteristisch ist.

Auch für das Zerfallen in isolirte Sechsstrahler, das man an den peripherischen Theilen der genannten lebenden Gattungen beobachtet, fehlt es bei Coeloptychium nicht an Anhaltspunkten. Bei den becherförmigen Kieselspongien erfolgt das Wachsthum vorzugsweise am oberen Rande. Diesem entspricht aber bei Coeloptychium die von der feinporösen Deckschicht bekleidete seitliche Randfläche des Schirms. Ich habe ein Stückchen des Schirmrandes von C. princeps aus Haldem in Canadabalsam eingeschlossen und die ursprünglich nach innen gerichtete Seite desselben so weit angeschliffen, dass das Präparat durchsichtig genug wurde, um bei durchfallendem Lichte untersucht zu werden. Hier zeigten sich nun (Taf. III. Fig. 3) zahlreiche isolirte sechsstrahlige Axenkreuze, welche nur aus Canal- und einer äusserst dünnen Kieselhülle bestehen. Die drei Axen kreuzen sich einfach im Centrum; von einem octaëdrischen Hohlraum ist noch nichts zu sehen. Diese That-

1) Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. 1875. XXV. S. 166.
2) Annals and mag. nat. hist. 4. ser. vol. 12. p. 460 etc.
3) l. c. S. 167, 183, 184.

sache ist wichtig, denn sie beweist, dass auch bei Coeloptychium dem, zusammenhängenden Netzwerk ein aus selbstständigen sechsstrahligen Nadeln bestehendes Balkengerüst, um mich dieses Vergleichs zu bedienen, vorausging und dass dieses erst nach und nach durch reichliche Ablagerung von Kieselsäure aus dem Syncytium des Schwammes zu einem unbeweglichen, zusammenhängenden Gitter verschmolzen wurde. Die Kreuzungsstellen der primären Sarkodezüge scheinen immer mit dem Verkieselungsprozess begonnen zu haben.

Die auffälligste Eigenthümlichkeit des Coeloptychium-Gerüstes besteht in der Entwickelung von kürzeren oder längeren faden- und wurzelartigen Fortsätze, welche mehr oder weniger reichlich nach allen Seiten von den die Nadeln umhüllenden Kieselfasern ausgehen. Diese aus dichter Kieselsubstanz (ohne Canäle) bestehenden Fortsätze sind in den innersten Reihen des Gerüstes, also im Centraltheil der Wände am spärlichsten und am kürzesten; sie nehmen gegen aussen an Zahl und Stärke zu. In den der Oberfläche zunächst gelegenen Schichten anastomosiren sie mit einander und gestalten sich zu einem maschigen Gittergewebe um, welches das Lumen der Gittermaschen mehr oder weniger ausfüllt. (Taf. III. Fig. 12 und Taf. IV. Fig. A.)

Eine ähnliche Beschaffenheit besitzt auch das Gitterwerk des Stieles. Im Ganzen zeigt dasselbe den gleichen Aufbau, wie jenes der Wand, allein da der Stiel nach unserer Auffassung der älteste Theil des ganzen Schwammkörpers ist, so musste man dort auch eine besonders reichliche Kieselablagerung erwarten. Bei lebenden Hexactinelliden wenigstens (z. B. Periphragella Elisae Marshall) [1]) zeigt sich eine derartige Erscheinung. Es lässt nun in der That schon die steinartige, dem unbewaffneten Auge wenig regelmässig erscheinende Beschaffenheit des Stieles eine Vermehrung der Kieselsubstanz erkennen. Unter dem Mikroskop betrachtet, findet man nicht allein die einzelnen Hohlstäbe und Kanten der Octaëder verdickt, sondern auch die Seitenverzweigungen ungewöhnlich stark entwickelt und ansehnlich ausgebreitet. Es wird dadurch das Lumen der cubischen Maschen und der Octaëderräume beträchtlich verengt oder auch fast ganz ausgefüllt. (Taf. III. Fig. 6.)

---

1) Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. 1875. t. 14. fig. 27.

Wenn im Ganzen genommen das Gittergerüst von Coeloptychium den Eindruck grosser Regelmässigkeit macht, so ist es doch weit von mathematischer Regelmässigkeit entfernt. Abgesehen von den schon oben erwähnten durch die Stellung der drei Hauptaxen bedingten Veränderungen, legen sich nicht selten vereinzelte Sechsstrahler diagonal durch eine Masche und bilden dann bei ihrer Vereinigung mit den Hauptaxen unvollständig entwickelte Zwischenoctaëder; zuweilen reihen sich auch die Maschen in verschiedener Grösse und Richtung aneinander an und bilden dadurch ein etwas unregelmässiges Gewebe, wie es die Abbildungen (Taf. III. Fig. 8, 9) zeigen. Bei manchen Arten trägt auch die starke Entwicklung der wurzelartigen Fortsätze etwas zur Verwischung des regelmässigen Baues bei.

2) Die verschiedenen äusseren Deckschichten bei Coeloptychium besitzen trotz ihrer scheinbar grossen Verschiedenheit doch der Hauptsache nach ziemlich gleiche Beschaffenheit. Sie entstehen durch eine starke Wucherung der Seitenäste, welche aus den Hohlfasern der äussersten Lage des Gittergerüstes entspringen. Am deutlichsten lässt sich dieser Prozess an der inneren Oberfläche der gefalteten Körperwand, also an den Seiten der radialen Kammern der Leibeshöhle beobachten. Bei einzelnen Arten (z. B. C. agaricoides Taf. IV Fig. A) besteht dieselbe noch aus einer ganz normalen Gitterschicht, deren Maschen jedoch von anastomosirenden Seitenästen vielfach durchzogen werden. Bei anderen Arten oder an grossen Exemplaren von C. agaricoides aus Haldem vereinigen sich die nach Innen gerichteten Seitenäste der Gitterfasern zu einer plattigen durchlöcherten Deckschicht, welche aus einem lockeren Gewebe verfilzter Kieselfäden besteht. (Taf. III Fig. 1). Dieses löcherige Gewebe legt sich unmittelbar über die letzte Gitterschicht und zwar so, dass in Präparaten häufig noch die hohlen Axen derselben durchschimmern. Man kann übrigens auch in der Deckschicht selbst eine quadratische Anordnung erkennen, indem sich grössere runde Oeffnungen meist über der Mitte der darunter liegenden Maschen des Gittergerüstes befinden. Der Rand dieser Ostien ist gewöhnlich mit kurzen wimperartigen Kieselborsten umsäumt.

Die Beschaffenheit der inneren Oberfläche der Falten an grossen Exemplaren von C. agaricoides aus Haldem entspricht so ziemlich jener

der äusseren bei kleinen Stücken derselben Art aus Vordorf. Bei den Arten mit derberer Oberflächenschicht (C. Seebachi, lobatum, princeps etc.) verdichtet sich das verfilzte Gewebe noch mehr, indem seine rundlichen Maschen kleiner und weniger zahlreich werden, so dass hier die quadratisch angeordneten grösseren Poren fast allein die Einfuhr des Wassers besorgen. Ein noch etwas dichteres Gewebe besitzt auch regelmässig die Unterseite der Falten. (Taf. III Fig. 4). Dafür befindet sich aber hier die bereits früher erwähnte Reihe grosser runder oder spaltförmiger Einströmungsöffnungen, in deren Umgebung die Fasern der Deckschicht sich dermaassen zusammendrängen, dass sie nur winzige, zerstreute Interstitien zwischen sich frei lassen.

Die dichteste Beschaffenheit gewinnt die Deckschicht der schräg abfallenden Seiten, namentlich wenn sich dieselben zu einem zusammenhängenden Rand entwickeln. Dem unbewaffneten Auge erscheint die Oberfläche dieses Randes als eine fast dichte, glänzende, ziemlich dicke Oberhaut. Unter Vergrösserung zeigt sie sich als eine meist aus dichter glasiger Kieselsubstanz bestehende Decke, welche von zahlreichen, je nach den Arten grösseren oder kleineren rundlichen Oeffnungen durchbohrt ist (Taf. III Fig. 3 und 10). Häufig bemerkt man an der Innenseite dieser „Epidermis", wie bereits erwähnt, isolirte Sechsstrahler.

Wie über den Seitenrand, so spannt sich auch über die centrale Leibeshöhle der Coeloptychien eine vom Gittergerüst unabhängige, die ganze Oberseite des Schwammkörpers einnehmende Deckschicht aus. Bei mehreren Arten (C. sulciferum, incisum, lobatum) besteht dieselbe aus einem durchbrochenen, grobmaschigen Netz, das aus concentrischen und radialen Kieselzügen gebildet wird. Nur durch die zusammenhängenden concentrischen Ringe erhält das Maschenwerk eine bestimmte Ordnung, denn die radialen Fäden sind in ihrer Richtung, in ihrer gegenseitigen Entfernung, in ihrer Zahl und ihrer Stärke der grössten Mannichfaltigkeit unterworfen. Im Allgemeinen herrscht übrigens die Neigung zur viereckigen Maschenbildung vor, wenn sie sich auch zuweilen weit von der quadratischen Form entfernen und eine quer rechtseitige oder rundliche verzerrte Gestalt annehmen können. (Taf. III Fig. 2). In der ganzen maschigen Oberflächenschicht gibt es keine ringsum geschlossenen Axencanäle; sowohl die concentrischen als die radialen

Kieselelemente entbehren der Canäle; die radialen Kieselstäbe aus dichter hemogener Kieselsubstanz haben kantige oder rundliche Form und stellen die Verbindung von zwei benachbarten concentrischen Ringen her. Bei diesen umschliesst eine von rundlichen Löchern durchbrochene ungleiche Kieselröhre einen unregelmässigen inneren Hohlraum, der übrigens nicht mit den scharf begrenzten Axencanälen der übrigen Kieselgebilde zu vergleichen ist. Da, wo sich die Radialstäbe mit den concentrischen Ringen vereinigen, entstehen Anschwellungen, die einigermassen an die octaëdrischen Kreuzungsstellen des Gittergerüstes der Wand erinnern.

Sehr selten überzieht das grobmaschige Netz in ganz gleichmässiger Entwicklung die Oberfläche; selbst bei solchen Arten, wo dieselbe bei flüchtiger Betrachtung ganz gleichartig beschaffen erscheint, findet man hin und wieder dünne Radialstreifen von dichterer Struktur. Es gibt nun aber auch Arten (C. agaricoides, C. princeps), bei denen fein poröse Bänder mit grobmaschigen in der Art abwechseln, dass sich die erstern immer auf die Faltenrücken der Wand auflegen, während die durchbrochenen die radialen Kammern der Leibeshöhle überdachen. In der Struktur gleichen die feinporösen Bänder am meisten der glatten Deckschicht des Randes, nur sind die Oeffnungen grösser, auch findet man ihre Oberfläche öfters mit feinen kurzen Spitzen bewaffnet. (Taf. III Fig. 5).

Die Aussenfläche des Stieles zeigt dieselbe Beschaffenheit, wie die der Falten auf der Unterseite des Schirms.

Vergleicht man das Gittergerüst der Coeloptychien zunächst mit entsprechenden Skeleten von lebenden und dann von fossilen Spongien, so wird man unter den ersteren mit grösster Bestimmtheit auf die Gattungen Farrea, Eurete und Myliusia hingewiesen. Ob sich die generische Unterscheidung von Farrea Bow. und Eurete Marshall wird aufrecht erhalten lassen, ist mir sehr zweifelhaft; sie beruht auf einem negativen Merkmal, nämlich auf der Abwesenheit von isolirten Kieselgebilden bei Eurete. Nun ist aber das Original von Eurete simplicissima ein macerirtes Skelet, dessen Nadeln möglicherweise herausgefallen oder fortgeschwemmt waren, ehe es zur Untersuchung gelangte. Bowerbank hat neuestens [1]) wieder mehrere Arten von Farrea beschrieben, unter denen F. fistulata sowohl in der feineren Architek-

1) Proceedings zoological Society 1875. S. 272 und 507.

tonik als auch in der äusseren Gesammterscheinung fast genau mit Eurete simplicissima übereinstimmt. Diese Frage ist übrigens für unseren augenblicklichen Zweck gleichgültig, da es sich lediglich um das zusammenhängende Gittergerüst handelt, das bei Farrea und Eurete keine nennenswerthen Unterschiede erkennen lässt. Beide Gattungen besitzen ein aus quadratischen Maschen gebildetes Skelet, das aus verschmolzenen Sechsstrahlern entstanden ist; die mit Axen versehenen Kieselfasern derselben sind an ihrer Oberfläche glatt oder mit regelmässigen sechsstrahligen Rosetten besetzt, während bei Coeloptychium deren Stelle von wurzelartigen Fortsätzen eingenommen wird. Bei Farrea und Eurete kreuzen sich die Kieselaxen in verdickten Knoten, bei Coeloptychium bilden sie zierliche hohle Octaëder. Eine ähnliche Octaëderbildung an den Kreuzungsstellen zeigt die lebende Gattung Myliusia Gray [1]), deren Gittergerüste überhaupt eine frappante Aehnlichkeit mit Coeloptychium besitzt und sich eigentlich nur durch den Mangel der wurzelartigen Fortsätze davon unterscheidet. Von fossilen Spongien stellt sich hinsichtlich der feineren Gerüststruktur die in ihrem sonstigen Aufbau sehr differente Gattung Becksia Schlüt. unmittelbar neben Coeloptychium. Isolirte Theile aus dem Inneren der Wand der beiden Gattungen lassen sich nicht unterscheiden, da sowohl die das Gittergewebe zusammensetzenden Fasern mit den charakteristischen Anhängen, als auch die octaëdrischen Kreuzungsstellen genau das gleiche Aussehen gewähren. Bei anderen fossilen Spongien habe ich diese Beschaffenheit des Gittergerüstes bis jetzt nicht beobachtet; es zeigen indess auch Ventriculites, Cephalites, Cribrospongia etc. in ihrer ganzen Architektonik und ihrer feineren Struktur Verwandtschaft mit Coeloptychium, allein bei diesen und anderen nahestehenden Gattungen fehlen die zierlichen Seitenfortsätze, die den Gerüsten von Coeloptychium und Becksia ihr charakteristisches Aussehen verleihen. Die oben genannten lebenden Gattungen werden von O. Schmidt, Carter und Marshall den Hexactinelliden zugetheilt und zwar gehören sie unter diesen zu den regelmässigsten Typen. Damit ist auch die systematische Stellung von Coeloptychium sicher bestimmt.

---

1) Gray Proceed. zool. soc. 1859. S. 439 und Bowerbank ibid. 1869. t. 25. fig. 1.

Die isolirten Kieselgebilde ausserhalb des festen Gerüstes.

Da schon der feinere Bau des zusammenhängenden Kieselgerüstes der Coeloptychien, welches aus verhältnissmässig grossen Elementen besteht, von den früheren Beobachtern unberücksichtigt blieb, so ist es nicht zu verwundern, dass ihnen die Anwesenheit freier Kieselnadeln gänzlich entging. Nichtsdestoweniger finden sich dieselben in grosser Menge; einzelne darunter besitzen die ansehnliche Grösse von 1—2 mm. Länge, so dass man sie schon mit einer gewöhnlichen Loupe kaum übersehen kann; ja bei einiger Aufmerksamkeit lassen sie sich sogar namentlich an angeätzten Stücken mit unbewaffnetem Auge erkennen.

Die mannichfaltig geformten Kieselgebilde liegen zu Tausenden dicht aneinander gedrängt in den Furchen der Unterseite. Fast ebenso reichlich finden sie sich in den Radialkammern der Magenhöhle. Wahrscheinlich hatten sie ursprünglich eine bestimmte Anordnung im Syncytium, allein nach dem Absterben des Thieres ging dieselbe verloren, so dass wenigstens an den vorliegenden Stücken nichts mehr von einer Gesetzmässigkeit der Lage zu erkennen ist. Ich habe an keinem der mir zugänglichen Exemplare vergeblich nach Nadeln gesucht, doch scheinen sie an einzelnen Lokalitäten (z. B. Darup) in geringerer Menge und schlechterer Erhaltung vorzukommen, als an anderen. Das Aufsuchen mit der Loupe und das Herausnehmen mit einer feinen Spitze ist eine sehr mühsame Arbeit. Man kann sich aber durch Behandeln in Salzsäure in kürzester Zeit aus sonst unbrauchbaren Fragmenten eine unbeschränkte Menge von freien Nadeln verschaffen. Der gelbliche oder braune Rückstand braucht nur etwas geschlemmt zu werden, um die Kieselnadeln vermischt mit kleinen Fragmenten des festen Gerüstes, vereinzelten Radiolarien und vielen kleinen Kieselpartikelchen und Sandkörnchen so massenhaft zu concentriren, dass jedes Präparat eine Musterkarte der verschiedensten Formen darstellt.

In der Regel zeigen die freien Kieselgebilde einen vorzüglichen Erhaltungszustand. Sie liegen ursprünglich fast alle unversehrt in dem Ausfüllungsgestein und erleiden ihre Beschädigungen meistens

erst durch die mit ihnen vorgenommenen Manipulationen. Immerhin erhält man aber auch bei ziemlich sorgloser Behandlung in jedem Präparat neben zahlreichen Fragmenten einc ziemliche Anzahl wohl erhaltener Nadeln. Namentlich die kleineren Formen erscheinen fast immer vollständig, die langen Nadeln allerdings sind häufig durch Bruch beschädigt. Wenn somit diese Skelettheilchen ihre ursprüngliche Form durch den Fossilisationsprocess nicht eingebüsst haben (abgeriebene oder stark corrodirte Stücke kommen kaum vor), so haben sie doch in anderer Hinsicht einige Veränderungen erlitten. Vor Allem fehlt ihnen das frische, glashelle Aussehen, welches für die Kieselnadeln der lebenden Spongien so charakteristisch ist; man vermisst ferner jene zierliche, blättrige Struktur, die M. Schultze, Kölliker, Claus und Marshall so vortrefflich beschrieben und dargestellt haben. Es scheint eine Umlagerung der kleinsten Theilchen eingetreten zu sein, durch welche diese Beschaffenheit verloren ging. Auch die Oberfläche ist nur ausnahmsweise glatt; fast immer erscheint sie etwas getrübt, rauh, mit kleinen Grübchen und Erhöhungen versehen, manchmal sogar wie zerfressen. Trotzdem sind die Kieselgebilde in Canadabalsam oder Glycerin meist noch vollkommen durchsichtig und lassen im optischen Querschnitt die Axencanäle deutlich erkennen.

Diese Canäle zeigen in der Regel eine auffallende Beschaffenheit. Bei den eigentlichen Nadeln, Ankern, Scheiben und regelmässig sternförmigen Gebilden bestimmen die Canäle die Wachsthum-Richtung und münden fast immer an den Enden frei aus; an den unregelmässigen, später noch näher zu beschreibenden Formen dagegen findet man meist nur einen kurzen im Centraltheil befindlichen feinen Canal oder bei zusammengesetzten Sternen u. s. w. ein kurzes Axenkreuz. Bei diesen letzteren pflegt der Canal ziemlich fein zu sein.

Ungemein verschieden in der Weite erweist sich der Centralcanal namentlich bei den stabförmigen und ankerförmigen Nadeln. Es kommen hier allerdings Formen mit ganz feinen Canälen vor, aber in der Regel besitzt er eine viel ansehnlichere Weite, als bei den Nadeln der lebenden Spongien, ja manchmal nimmt er derartige Dimensionen an, dass die Nadel zu einer dünnen Hülse um eine weite hohle Axe herabsinkt.

Man darf diese, auch von Carter [1]) an fossilen Kieselnadeln aus dem „Upper Greensand" von Haldon und Blackdown beobachtete Eigenthümlichkeit, kaum als eine Folge des Fossilisationsprocesses ansehen, denn in der Regel sind die Axencanäle im optischen Querschnitt scharf begränzt. Ganz ähnliche Erscheinungen fehlen übrigens auch unter den lebenden Spongien nicht. Ich habe bei Geodia gigas und Thetya Lyncurium öfters Nadeln mit sehr weitem Canal gesehen, welche man unseren fossilen zur Seite stellen könnte. Auch O. Schmidt (Alger. Spongien t. III. fig. 3) bildet ein Fragment einer Dictyonella-Nadel und (ibid. t. III. fig. 2 F.) eine Nadel von Callites Lacazii Sdt. mit ausserordentlich weitem Canal ab. Carter [2]) bespricht diese Erscheinung ausführlich bei Farrea und Aphrocallistes und schreibt sie einem eigenthümlichen Zerstörungsprocesse zu. Einen Axencylinder habe ich niemals beobachtet.

Häufig sind die Canäle der Nadeln durch eine bräunliche oder gelblich grüne Färbung ausgezeichnet, zuweilen auch ganz oder theilweise von einer glaukonitartigen Substanz erfüllt, welche auch Steinkerne von Foraminiferen bildet und an zerbrochenen Nadeln zuweilen stabartig hervorragt.

Hinsichtlich der Maassverhältnisse zeichnen sich die meisten freien Kieselgebilde von Coeloptychium durch bedeutende Grösse aus. Im Vergleich mit den Nadeln der lebenden Esperien, Renieren, Axinellen, Clathrien, Raspailien, Chalinen etc., ja auch mit den feineren Schmucknadeln der Hexactinelliden besitzen sie geradezu riesige Dimensionen. Sie erreichen dagegen niemals die ansehnliche Länge der grösseren freien Sechsstrahler bei Hyalonema, Euplectella, Holtenia, Hyalothauma u. s. w.

Fast übereinstimmend in den Dimensionen, oder sogar noch etwas grösser sind die Nadeln der lebenden Geodien, Thetyen und Stelletten.

Neben den grossen Kieselgebilden fehlt es nun freilich auch nicht gänzlich an sehr kleinen, die in ihrem längsten Durchmesser $^1/_{10}$ mm. nicht überschreiten. Dieselben sind übrigens verhältnissmässig selten vorhanden und zwar dürfte diese Spärlichkeit nicht etwa davon her-

---

1) Annals and Magazine nat. hist. 1871. 4. Ser. vol. VII. S. 113 und 134.
2) ibid. 1873. 4. ser. vol. 12. S. 456.

rühren, dass die kleineren Nadeln durch den Fossilisationsprocess zerstört wurden, denn eine Verunstaltung durch mechanische Ursachen hat abgesehen von Brüchen absolut nicht stattgefunden. Die feinsten Spitzen der Nadeln, die unendlich zarten durchbrochenen Kieselscheibchen, welche auf Taf. IV abgebildet sind und zahlreiche 0,10—0,15 mm. grosse Radiolarien mit dem zerbrechlichsten Gittergerüste haben sich ganz unversehrt erhalten. Wenn man darum selbst mit Anwendung sehr starker Vergrösserungen stets vergeblich nach den zierlichen Rosetten, Besengabeln, Tannenbäumchen, sechsarmigen Doppelankern und ähnlichen Gebilden der lebenden Hexactinelliden fahndet, so ist man zu dem Schlusse berechtigt, dass sie bei Coeloptychium überhaupt nicht vorhanden waren. Es hätten sich sonst nothwendiger Weise Spuren davon finden müssen.

Ich habe von den meisten Coeloptychien-Arten zahlreiche freie Kieselgebilde uutersucht. Im grossen Ganzen stimmen dieselben bei allen Arten ziemlich überein, doch lassen sich bei sorgfältiger Prüfung specifische Unterschiede ermitteln, auf welche später aufmerksam gemacht werden soll. Aus mehreren Tausend derartiger Körper habe ich die auf den Tafeln IV—VII abgebildeten Formen ausgewählt. Sie sind sämmtlich, sofern es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, in hundertfacher Vergrösserung mittelst der Camera lucida gezeichnet, so dass sich die relativen Grössenverhältuisse sofort übersehen lassen. Wenn die aus den besterhaltenen und zum Zeichnen am günstigsten gelegenen Stücken getroffene Auswahl auch nicht den gesammten, erstaunlichen Formenreichthum der freien Kieselgebilde von Coeloptychium zur Anschauung bringt, so habe ich doch unter einer erheblich grösseren Anzahl von Zeichnungen diejenigen ausgesucht, welche als besonders charakteristisch für unsere Gattung gelten können.

Eine sehr wichtige Frage ist nun freilich die, ob alle auf den nachfolgenden Seiten beschriebenen Kieselgebilde wirklich zur Gattung Coeloptychium gehören, oder ob sie nicht möglicherweise von verschiedenen Spongien herrühren, deren freie Nadeln nach der Zersetzung der organischen Bestandtheile im Wasser vertheilt und in die Gerüste der Coeloptychien getrieben wurden. Es hat dieser Zweifel eine gewisse Berechtigung, denn die fraglichen Gebilde finden sich nicht allein in

den Coeloptychiengerüsten und deren unmittelbarster Nähe, sondern sie liegen auch in grosser Menge im Kreide-Mergel der westfälischen Spongitarien-Bänke zerstreut, so dass man in jedem beliebigen Gesteinsfragment sich durch Aetzen Spongiennadeln verschaffen kann. Es nehmen diese Gebilde in der oberen westfälischen Kreide geradezu in hervorragender Weise Antheil an der Zusammensetzung der Gebirgsschichten. Ich habe nun über 20 verschiedene Gesteinsfragmente aus Haldem, die von beliebigen Fossilien (Turriliten, Scaphiten, Ammoniten, Baculiten, Pleurotomarien, Dicotyletonen und verschiedenen Spongien) entnommen waren, mit Säure behandelt und auf ihren Inhalt an Kieseltheilen geprüft. Ebenso wurden Gesteinsproben aus Holtwik, Darup und Coesfeld und anderen Localitäten untersucht. Sämmtliche Proben enthielten mehr oder weniger häufig Fragmente von Stabnadeln und Ankern, zuweilen auch Vierstrahler, Schirmnadeln und Stellettaartige Scheiben. Von eigenthümlichen bei Coeloptychium nicht beobachteten Körpern fanden sich nur in einer Probe einaxige, sehr schlanke Stabnadeln von der Form und Grösse, wie sie bei lebenden Esperien bekannt sind.

Hinsichtlich der Erhaltung unterscheiden sich jedoch die im Gestein eingeschlossenen Spongienreste meist sehr wesentlich von den in den Coeloptychiengerüsten vorkommenden. Während sich die letzteren, wie bereits bemerkt, durch ihren vorzüglichen Erhaltungszustand auszeichnen, sind die im Gestein liegenden fast immer in Fragmente zertrümmert, so dass nur ausnahmsweise eine vollständige Stabnadel, ein Anker mit sämmtlichen Zacken oder ein unverletzter Vierstrahler zu sehen ist. Eine einzige, einem Am. Galicianus entnommene Probe lieferte zahlreiche Stabnadeln, Anker und Strahlenkugeln von ähnlicher Erhaltung, wie sie bei Coeloptychium gewöhnlich ist, allein zwischen den Nadeln lagen auch Fragmente vom zusammenhängenden Gerüste eines aus äusserst zierlichen Elementen aufgebauten Hexactinelliden-Schwammes. Zur Erklärung dieser fast allgemeinen Verbreitung freier Kieselgebilden, in den westfälischen obern Kreidemergeln sind drei Hypothesen berechtigt: 1) entweder sämmtliche im Gestein zerstreute Nadeln und freie Kieselgebilde rühren von Coeloptychium her oder sie stammen 2) von anderen Spongien-Gattungen oder 3) von Coeloptychium und anderen verwandten Formen her.

Die erste Annahme ist wenig wahrscheinlich, da die Coeloptychien in der oberen Kreide nicht so massenhaft vorkommen, dass man für sie die erstaunliche Menge der im Gestein vertheilten freien Kieselgebilde beanspruchen dürfte. Ebenso wenig aber liegt ein triftiger Grund vor, sämmtliche derartige Körper ausschliesslich anderen Spongien zuzuschreiben, da sich dieselben ja in so grosser Zahl in den Gerüsten von Coeloptychien finden. Ich möchte darum den dritten Fall für den wahrscheinlichsten halten, nämlich den, dass auch noch andere cretacische Spongien einaxige Nadeln, Anker, Vierstrahler und Scheibchen von der Form, wie sie bei Coeloptychium vorkommen, besitzen und dass darum die allenthalben im Gestein befindlichen freien Kieselgebilde von Coeloptychien und anderen Spongien herrühren. Welcher Art diese letzteren sind, glaube ich auch zum Theil ermittelt zu haben. Bei Scyphia cervicornis z. B. enthielt das Syncytium unzweifelhaft eine Unzahl von Stabnadeln, Vierstrahlern und Ankern, wie ich an einem Exemplar, welchem die unverletzten freien Kieselgebilde noch massenhaft angelagert waren, nachweisen konnte. Ebenso verhält sich Coscinopora. Da nun fast sämmtliche in den westfälischen Spongitarienschichten der oberen Kreide vorkommenden Schwämme entweder den Hexactinelliden oder den Lithistiden angehören, so ist der Schluss berechtigt, dass nicht nur Coeloptychium und die genannten Formen, sondern auch andere verwandte Gattungen mit freien Nadeln von ähnlicher Form versehen waren und dass also die im Gestein vorkommenden Fragmente verschiedenen Gattungen von Kieselschwämmen entstammen.

Für die Zugehörigkeit der nachstehend beschriebenen freien Kieselgebilde zu Coeloptychium glaube ich folgende Gründe geltend machen zu dürfen:

1) Den günstigen Erhaltungszustand der grösseren aus den Coeloptychiengerüsten stammenden Kieselkörper im Gegensatz zu dem fragmentarischen Zustand derselben in den Gesteinsproben.

2) Das reichliche Vorhandensein auch der zartesten und zerbrechlichsten Gebilde, wie der durchbrochenen Kieselscheibchen, kleinen Ankerchen, Sechsstrahler, Vierstrahler und Radiolarien im Coeloptychiumgerüst und deren Fehlen oder doch grosse Seltenheit in den Gesteinsproben.

3) Die massenhafte Anwesenheit von freien Kieselgebilden im Inneren des Kieselgerüstes von Coeloptychium (d. h. in der Leibeshöhle und in den kammerähnlichen Räumen der Falten), welche sich durch Einschwemmung wegen der ziemlich dichten Beschaffenheit der äusseren Deckschichten schwer erklären liesse.

4) Das Vorkommen sämmtlicher Haupttypen von freien Kieselkörpern bei allen näher untersuchten Arten von Coeloptychium und deren specifische Uebereinstimmung bei Exemplaren von entfernten Localitäten.

Bei der Beschreibung der verschiedenen Kieselgebilde, welche ich nach dieser Auseinandersetzung als der Gattung Coeloptychium zugehörig betrachte, wurde die von O. Schmidt[1]) vorgeschlagene Eintheilung zu Grunde gelegt. Die Originalien zu den Abbildungen stammen vorzüglich von C. agaricoides und deciminum aus Vordorf, von C. agaricoides, Seebachi und princeps aus Haldem und von C. lobatum aus Coesfeld. Es sind darunter alle vier Nadel-Gruppen Schmidt's ziemlich reichlich vertreten. Der Zahl nach am häufigsten finden sich die einaxigen Nadeln, nach ihnen kommen vierarmige Sterne und Anker mit vier gleichen Armen oder einem längeren einfachen und drei kürzeren, öfters gegabelten Armen, darauf in geringerer Menge vielaxige Scheiben, einfache Sechsstrahler, Kugeln mit vielen Axencanälen und endlich dichte Kieselkugeln.

Wirft man einen flüchtigen Blick über die Tafeln IV—VII, so fällt die erstaunliche Aehnlichkeit unserer Kieselgebilde mit den von Carter[2]) aus dem Upper Greensand beschriebenen sofort in die Augen. Man glaubt manchmal die gleichen Stücke vor sich zu haben. Durchschnittlich sind übrigens die Carter'schen Nadeln noch riesiger, als die von Coeloptychium. Der ausgezeichnete englische Spongienkenner schreibt jene im Grünsand von Haldon gefundenen Kieselgebilde verschiedenen Gattungen und verschiedenen Familien von Schwämmen zu. Wenn ich diese Auffassung für unsere Abbildungen auch nicht für zutreffend halte, so finden sich doch in der Carter'schen Abhandlung viele werthvolle Bemerkungen über die morphologischen Beziehungen der fossilen Nadeln zu lebenden Kieselschwämmen.

1) Atlant. Spongien S. 2—5.
2) Annals and Mag. nat. hist. 1871. 4. ser. vol. VII. S. 112.

1. Einaxige Kieselkörper.

a) Unter diesen spielen grosse spiessförmige Stabnadeln (Taf. IV Fig. 1—6 und 25, 26) die Hauptrolle. Bruchstücke derselben liegen meist in grosser Menge im Gesichtsfelde, dagegen hält se schwer ganz vollständige Exemplare dieser zuweilen gewaltig grossen, 1,5 ja sogar 2 und 2,5 mm. langen Nadeln aus dem schlammigen Aetzrückstande zu gewinnen, namentlich wenn derselbe schon einmal getrocknet war und dann wieder aufgelöst wurde. Sie zerbrechen bei diesen Operationen gewöhnlich, man kann dieselben aber schon mit einer Loupe leicht unterscheiden, an geätzten Stücken ragen sie wie scharfe Spiesse aus dem Gesteine hervor. Diese grossen Spiessnadeln verdünnen sich an einem Ende ganz allmählig und verlaufen in eine Spitze; das andere Ende ist entweder gerade abgestutzt oder in gleicher Weise zugeschärft. In der Regel sind die grossen Spiessnadeln gerade, zuweilen aber auch S-förmig oder sogar mehrfach gebogen. Der Axencanal mündet regelmässig frei an beiden Enden und besitzt fast immer eine ungewöhnliche Weite. Oftmals ist sein Lumen gefärbt oder mit grüner Glaukonitsubstanz ganz oder theilweise ausgefüllt. Diese Ausfüllungsmasse kann an Bruchstücken zuweilen auch stabförmig über die Nadel herausragen.

Mit den ganz grossen Spiessnadeln kommen auch kleinere von ähnlicher Form reichlich vor, so dass man von 0,4 mm. an bis zu 3 mm. Länge alle Grössenabstufungen beobachten kann. (Taf. IV Fig. 7—13.) Diese kleineren Nadeln sind entweder beiderseits zugespitzt oder seltener an einem Ende abgestutzt. Zuweilen erweitert sich der Canal vor seiner Ausmündung trompetenartig.

Die eben beschriebenen Spiessnadeln unterscheiden sich durch ihre Grösse von fast allen ähnlichen Gebilden bei lebenden Spongien, nur bei Geodia, Thetya und verwandten Formen aus der Familie der Pachytragiae Carter gibt es Nadeln von einigermaassen übereinstimmender Beschaffenheit. Carter[1]) schreibt darum auch die im oberen Grünsand vorkommenden fossilen Nadeln von entsprechender Form und Grösse den Pachytragiern zu. Unter den fossilen Kieselspongien gibt es frei-

1) l. c. S. 119, 120. Fig. 75, 76.

lich mehrere Gattungen mit noch viel grössern Nadeln, welche auch der flüchtigsten Betrachtung nicht entgehen können, da man zu ihrer Wahrnehmung keiner Loupe bedarf. Ich kenne an jurassischen und cretacischen Spongien Nadeln von 4—5 mm. Länge und auch F. A. Römer[1]) bildet derartige bei Siphonocoelia hirta und texta, sowie bei Jerea spiculigera ab.

b) Eine zweite Gruppe (Taf. V Fig. 1—10) sehr häufig vorkommender Stabnadeln zeichnet sich durch ihre constante Bildung aus. Sie sind immer kleiner als die vorher beschriebenen, erreichen höchstens die Länge eines Millimeters und sind an einem Ende zugespitzt, am andern abgerundet. Ihre stärkste Dicke befindet sich häufig in der Nähe des abgerundeten Endes. Diese Nadeln sind fast immer ein wenig gebogen. Ihr Axencanal durchbohrt das zugespitzte Ende; am stumpfen Ende dagegen endigt er immer blind; seine Weite variirt ausserordentlich; manchmal nimmt er einen grossen Theil des Nadel-Volumens ein und enthält fremde eingedrungene Kieselstückchen, zuweilen zeigt er sich aber auch als eine feine Linie, in seltenen Fällen scheint er sogar zu fehlen. Es verlohnt sich nicht für diese Nadelform Vergleiche bei lebenden Spongien zu suchen; sie wiederholt sich bei den verschiedensten Gattungen und Familien. Auffallender Weise scheint sie jedoch bei den lebenden Hexactinelliden und Lithistiden zu fehlen.

c) Die nächste Gruppe einaxiger Nadeln enthält kurze 0,3—0,5 mm. lange beiderseits zugespitzte Spindeln. (Taf. IV Fig. 30—38.) Diese bei allen Coeloptychien in grosser Zahl vorkommenden Körper zeichnen sich durch ihre Durchsichtigkeit, ihren Glanz und ihre treffliche Erhaltung aus. Die beiderseitige Zuschärfung erfolgt rascher als bei den Nadeln der zwei ersten Gruppen, so dass sie ein etwas plumperes Aussehen gewinnen. Der Axencanal pflegt meist sehr scharf begrenzt zu sein, er tritt ziemlich regelmässig an beiden Enden frei zu Tage, ist gewöhnlich von mittlerer Weite, hin und wieder aber auch namentlich gegen das Ende hin stark verbreitet. Im Allgemeinen zeigt sich der Canal an jungen Nadeln weiter, als an den grösseren. Diese Erscheinung dürfte für die Entstehung

1) Spongitarien t. XI. fig. 6. t. X. fig. 11c. t. XII. fig. 6.

der Stabnadeln überhaupt von Wichtigkeit sein. Wie Kölliker[1]) in überzeugender Weise dargethan hat, beginnen die Spongiennadeln mit der Bildung eines organischen Centralfadens, welcher durch Verdichtung eines Theiles des Inhaltes von Zellen entsteht, aus denen die Spiculae hervorgehen. Nach und nach lagert sich um diesen Centralfaden eine Scheide von Kieselerde ab, welche sich beim weiteren Wachsthum mehr und mehr verdickt. An Nadeln, deren Wachsthum vorzüglich in der Längsrichtung stattfindet, liegt darum auch der Canal an beiden Enden frei zu Tage. Mit seinem Abschluss tritt nothwendiger Weise auch eine Stockung in der Grössenzunahme ein, wenn man nicht eine beständige Resorption der Kieselsubstanz an dem Ende des eingeschlossenen Kieselfadens annehmen will, wozu wenigstens bei den Coeloptychien-Nadeln kein Grund vorliegt. Höchst wahrscheinlich findet hier die zweite von Kölliker angenommene Möglichkeit statt, dass der frei zu Tage tretende Centralfaden durch Aufnahme von Stoffen aus dem Parenchym mit der Ablagerung der Kieselsubstanz gleichen Schritt hält und mit der Nadel fortwächst. An den bisher beschriebenen Stabnadeln lässt sich in der That die Richtigkeit dieser Anschauung vortrefflich nachweisen. Man findet Exemplare, wo der Centralfaden erst mit einer dünnen an einem oder beiden Enden offenen Kieselscheide umgeben ist, während an ausgebildeteren Nadeln die Kieselsubstanz meist verdickt und das Lumen des Canals mehr verengt erscheint.

Unter den Coeloptychien-Nadeln kommen übrigens auch Gebilde vor, welche uns über die frühesten, bis jetzt noch nicht beobachteten Entwickelungsstadien der einaxigen Stabnadeln erwünschten Aufschluss gewähren. Man bemerkt nämlich in grosser Zahl kleine 0,1 bis 0,2 mm. lange, glashelle Kieselkörper von cylindrischer Gestalt. (Taf. IV Fig. 16—19.) Dieselben sind an beiden Enden abgestutzt und mit einem sehr weiten, oben und unten offenen Hohlraum versehen. Dieser Hohlraum, ursprünglich vom organischen Centralfaden der jungen Nadeln eingenommen, wird nicht von einer ringsum geschlossenen Kieselscheide umhüllt, sondern auf einer Seite bleibt die Wand geöffnet und die beiden in der

1) Icones histiologicae I. S. 61.

Mitte klaffenden Hälften der Scheide rollen sich etwas nach Innen ein. In der Mitte des Cylinders sind die Hälften am breitesten, an den Enden wird der klaffende Zwischenraum durch die convexe Form der Ränder erweitert. Ich habe mehrfach Stücke beobachtet, an denen sich 2—3 solcher offener Cylinder wie die Glieder einer Kette an einander reihen. (Fig. 22—24.) Ist meine Deutung dieser merkwürdigen Körper richtig, so hätten wir darin die frühesten Stadien der im Entstehen begriffenen Stabnadeln zu erkennen.

Was nun die eben beschriebenen doppelt zugespitzten Spindeln betrifft, so findet man ganz ähnliche Formen bei gewissen Halichondriden, wie Reniera und in der Form geradezu identische aber an Grösse beträchtlich hinter den Coeloptychien-Spindeln zurückbleibende bei der von Bowerbank[1]) aufgestellten Lithistiden-Gattung Kaliapsis.

Gehen wir von den glatten geraden Stabnadeln zu den gekrümmten über, so begegnen uns ausser den bereits erwähnten S-förmig gebogenen Spiessnadeln (Taf. IV Fig. 25 und 26) ziemlich vereinzelt

d) beiderseits zugespitzte Klammern (Taf. IV Fig. 27 und 27a) mit weitem Centralcanal, von der Form, wie sie für die lebenden Esperien so charakteristisch ist. (vgl. O. Schmidt. Adriat. Spong. t. 5 Fig. 2, 3, 6 und Bowerbank, Brit. Sp. pl. V Fig. 114.) Auch der kleine Hacken mit an beiden Enden grabscheitähnlich ausgebreitetem Kopf und eingekrümmtem Schnabel (Taf. IV Fig. 29), welcher die Esperienklammern und Stabnadeln in der Regel begleitet, ist mir ein einziges Mal vorgekommen.[2]) Die einfach eingekrümmten Klammern dagegen habe ich viermal angetroffen, einmal auch eine etwas anders gestaltete Spange, deren stark gebogene Arme sich berühren. (Taf. IV Fig. 28.)

Diese Bildungen stimmen so auffallend mit der Gattung Esperia überein, dass ich sie wegen ihres vereinzelten Vorkommens geradezu für fremde Eindringlinge halten möchte; auffallend bleibt es freilich, dass dieselben sowohl in C. agaricoides von Haldem als auch von Vordorf gefunden wurden. Carter[3]) hat ganz ähnliche Klammern, nur

1) Proceed. zool. soc. 1869. S. 338. t. XXV. fig. 5.

2) O. Schmidt. l. c. S. 53. t. V. Bowerbank. l. c. pl. VI.

3) l. c. pl. IX fig. 13.

von grösseren Dimensionen aus dem Grünsand von Haldon als Esperites giganteus beschrieben. Sollten fortgesetzte Untersuchungen die Vermuthung, dass man es hier mit fremden Körpern zu thun hat, bestätigen, so würde ich für unsere norddeutschen Nadeln den Namen Esperites Carteri vorschlagen.

e) Einen befremdenden Eindruck machen auch die 0,3—0,5 mm. langen doppelt zugespitzten dornigen Nadeln (Taf. V Fig. 13—16), welche sich in der Form kaum von Spongilla-Nadeln unterscheiden lassen. Da ich dieselben aber achtmal und zwar bei C. agaricoides von Vordorf, bei C. agaricoides und princeps von Haldem und bei C. lobatum von Coesfeld gefunden habe, so bin ich geneigt, sie der Gattung Coeloptychium zuzuschreiben. Einige Taf. V Fig. 11, 12, 17 abgebildete kleinere strahlige Körper schliessen sich diesen Dornennadeln an. Mit den stachligen Nadeln von Hyalonema haben die unsrigen wenig Aehnlichkeit; auch fehlt ihnen immer das charakteristische Axenkreuz.

f) Die letzte Gruppe einaxiger Nadeln wird von eigenthümlichen an beiden Enden abgerundeten Walzen gebildet. (Taf. IV Fig. 39—50.) Diese massenhaft bei sämmtlichen Arten vorkommenden Körper zeichnen sich immer durch ihre rauhe, zerfressene, manchmal mit förmlichen Gruben bedeckte Oberfläche aus. Sie sind schwach gebogen, entweder ziemlich schlank, oder angeschwollen, wurstförmig; ihre Länge schwankt zwischen 0,2 und 0,4 mm. Nur ausnahmsweise ist ein Canal sichtbar, bei der Mehrzahl scheint er zu fehlen. Lässt sich übrigens ein Canal nachweisen, so tritt er niemals frei zu Tage, sondern hört schon in einiger Entfernung von den stumpfen Enden auf; er ist in der Regel sehr enge, nur ausnahmsweise sah ich ihn unter vielleicht 200 beobachteten Walzen von der Taf. IV Fig. 46 abgebildeten Beschaffenheit.

An einem Exemplar von C. agaricoides aus Vordorf befanden sich die dicken wurstähnlichen Walzen massenhaft zwischen den Falten. So oft sich nun eine Gruppe derselben im Gesichtsfelde des Mikroskopes zeigte, lagen regelmässig zahlreiche kleinere Kieselkörper von walziger, ovaler oder sogar kugeliger Gestalt daneben, die hinsichtlich der rauhen Beschaffenheit der Oberfläche und auch hinsichtlich des optischen Verhaltens genau mit den grösseren Körpern übereinstimmten. Diese kugeligen Bildungen wiederholen sich in reichlicher Zahl bei allen von

mir untersuchten Coeloptychien. Sie bestehen aus homogener Kieselsubstanz und scheinen fast immer dicht zu sein. (Taf. IV Fig. 51—59.) Ein einziges Mal konnte ich einen weiten Canal, in mehreren Fällen ein oder zwei rundliche Hohlräume im Innern beobachten. Sehr häufig sind diese Kugeln auf einer Seite mit einer Einschnürung versehen, und erinnern dann in ihrem Aussehen an Zellen, welche sich zu theilen beginnen. (Taf. IV Fig. 52—55.)

Carter [1]) bildet aus Haldon sowohl die walzenförmigen Nadeln als auch die kugeligen Gebilde in einer Weise ab, dass ihre Uebereinstimmung mit denen von Coeloptychium nicht zweifelhaft sein kann; er schreibt die Kugeln einem Geodia ähnlichen Schwamm zu und nennt sie Geodites haldonensis. Diese Deutung ist für unsere Körper durchaus nicht zutreffend, denn es fehlt ihnen die für die Kugeln von Geodia, Stelletta u. s. w. so bezeichnende strahlige Struktur.

Unter den lebenden Spongien könnte man etwa Suberites arciger Schmidt [2]) in Vergleich bringen, bei welchem unsere Walzen und Kugeln vorkommen. Schlanke Walzen lässt Schmidt [3]) auch bei Papyrula candidata aus Algier, einer Corticaten-Gattung, abbilden.

Taf. IV Fig. 60—65 sind einige walzige und kugelige Kieselgebilde von fremdartigem Aussehen dargestellt, die ihrer Struktur nach sich am besten den oben beschriebenen Körpern anschliessen.

2. Kieselkörper, für welche O. Schmidt die Axen einer regulären Pyramide als Grundform annimmt, sind bei den Coeloptychien sehr verbreitet. Sie erscheinen theils als vier-, sieben und achtstrahlige Sterne, theils als ankerähnliche Gebilde.

a) Unter diesen erscheinen am häufigsten einfache, aus vier zugespitzten Strahlen bestehende Sterne von der Gestalt eines sog. spanischen Reiters, deren vier Arme unter gleichem oder doch nahezu gleichem Winkel von 130^0 in der Mitte zusammentreffen (Taf. V Fig. 51—55 und Taf. VI Fig. 1, 2, 5.) Ihre Canäle sind stets an der Spitze offen und ziemlich weit, manchmal mit Eisenoxyd oder

---

1) l. c. t. IX. fig. 53, 55, 56.
2) Atlant. Sp. t. V. fig. 6.
3) Alger. Spong. t. IV. fig. 1.

Glaukonit injicirt. Nur ausnahmsweise kommen geometrisch regelmässige Formen mit ganz gleichlangen Strahlen vor; fast immer zeichnet sich ein Strahl durch etwas grössere Länge vor den übrigen aus, häufig sind auch alle vier ungleich lang. Im Gesichtsfeld erscheinen diese Nadeln fast immer als dreistrahlige Sterne, da der senkrecht noch oben gerichtete Arm entweder perspectivisch verkürzt oder abgebrochen ist. Verlängert sich ein Arm so beträchtlich, dass er einen zugespitzten Stiel bildet, so verwandelt sich der Stern in einen Anker, dessen drei Spitzen unter gleichem Winkel schräg vom Schafte nach aussen strahlen. (Taf. VI Fig. 4, 5, 7.) Bei den Ankern verliert sich übrigens mehr und mehr die geometrische Regelmässigkeit in der gegenseitigen Neigung der Arme. Sie richten sich öfters schief nach unten und nehmen dann die Taf. VI Fig. 3, 4, 6, 9, 10 dargestellten Formen an.

Aehnliche Sterne mit vier gleichen oder nahezu gleichen zugespitzten Strahlen liegen massenhaft in der Rindenschicht der Gattung Stelletta. Sie werden übrigens auch bei Haxactinelliden und zwar bei Farrea occa [1]) und Dorvillia agariciformis Sav. Kent. [2]) beschrieben. Carter [3]) erwähnt sie aus dem Grünsand von Haldon als Dercites haldonensis und zwar stehen diese fossilen Sterne den unserigen hinsichtlich ihrer Grösse näher, als jene der früher genannten lebenden Gattungen. Was die dreispitzigen Anker betrifft, so finden sich absolut identische Formen bei den Gattungen Geodia, Ancorina und Stelletta. Auch diese hat Carter [4]) im Grünsand von Haldon kennen gelernt und Geodites haldonensis benannt, um die Verwandtschaft mit Geodia anzudeuten.

Kehren wir zurück zu den dreizinkigen Ankern, so haben wir noch kleine Formen mit langem, meist dünnem Schaft und drei zu Widerhaken zurückgekrümmten Armen zu nennen, wie sie die Fig. 11—14 auf Taf. VI zur Anschauung bringen. Auch diese Anker finden sich unter den Carter'schen Abbildungen (l. c. 62, 63) von Geodites haldonensis. Man kennt sie in gleicher Weise bei den lebenden Gattungen Geodia, Ancorina, Stelletta und Dorvillia.

---

1) Bowerbank Proceed. zool. soc. 1869. t. 24. fig. 2.
2) Monthly microscop. journ. 1870. vol. IV. S. 293. t. 66. fig. 16, 17.
3) l. c. pl. X. fig. 71. pl. IX. fig. 36.
4) l. c. pl. X. fig. 61, 65, 67.

b) Aus den vierstrahligen Sternen und dreizackigen Ankern entwickeln sich durch Bifurkation sämmtlicher oder nur einzelner Arme, verbunden mit der ziemlich regelmässigen Verlängerung eines (in diesem Falle immer ungetheilten) Strahles verschiedenartige Sterne und Anker, die sich alle auf eine Grundform zurückführen lassen.

Eine dem vierstrahligen, gleicharmigen Normalstern am nächtsen stehende Nadelform entsteht in der Weise, dass alle unter 130° zusammenstossenden, nahezu gleichgrossen Arme sich in zwei Aeste gabeln, wodurch achtstrahlige Sterne von plumper oder auch äusserst schlanker Form entstehen, je nachdem die Gabeln kurz und dick oder lang und dünn sind. (Taf. IV Fig. 18, 19.) In der Regel sieht man nur die drei ungefähr in gleicher optischer Ebene gelegenen Arme, der perpendikulär dazustehende Strahl ist meist abgebrochen. Ich habe übrigens einmal mit Bestimmtheit den aufsteigenden Ast gegabelt gesehen, so dass ich also an dem Vorkommen von achtstrahligen Sternen nicht zweifeln kann. Sie sind indess jedenfalls äusserst selten. Viel häufiger ist der aufsteigende Strahl ungetheilt und dann in der Regel zu einem Schaft verlängert, wie es die Taf. VI Fig. 20 bei auffallendem Licht gezeichnete Abbildung zeigt. Diese Siebenstrahler sind kaum zu unterscheiden von den gegabelten Sternen aus der Rindenschicht von Stelletta und Pachymatisma. Sie finden sich übrigens auch bei mehreren lebenden Lithistiden und bei einer Hexactinelliden-Gattung. Ein Präparat von Corallistes microtuberculatus Schmidt, welches ich der Güte des Herrn W. Marshal verdanke, enthält dieselben in grosser Menge; Schmidt [1]) bildet sie ausserdem auch bei Corallistes typus und nolitangere, Bowerbank [2]) bei Dactylocalyx Masoni und Bowerbanki, Wright bei Wyville-Thomsonia [3]) und endlich Saville Kent [4]) bei Dorvillia agariciformis ab. Nach Carter kommen sie fossil im Grünsand von Haldon vor.

Bei den bis jetzt beschriebenen Formen bilden die gegabelten Aeste den überwiegenden Theil der Nadel, indem der ungetheilte Strahl als kurzer oder verlängerter Stiel sich durch seine Schlankheit aus-

---

1) Atlant. Spong. t. III. fig. 3, 6.
2) Proceed. zool. soc. 1869. pl. VI. fig. 3, 6.
3) Monthly microscop. journal 1870. vol. III. pl. II. fig. 3.
4) l. c. pl. LXVI. fig. 7.

zeichnet. Mit der Zunahme des Schaftes an Dicke und Länge tritt fast immer eine Verkürzung der Gabelarme an und zugleich hört die streng gesetzmässige Form auf. Es entstehen jene vielgestaltigen Anker mit drei gespaltenen Zinken, die man bei Geodia, Ancorina, Pachymatisma und Stelletta längst kennt. Ich habe eine Anzahl dieser auch bei Coeloptychium sehr häufig vorkommenden Formen auf Taf. VI Fig. 16—30 und Taf. VII Fig. 1—5 und 6—8 abbilden lassen. Vergleicht man diese Figuren, welche eine weitere Beschreibung überflüssig machen, mit den von Carter (l. c. Fig. 58, 59, 60 66 und 68) nach fossilen Nadeln aus Haldon entworfenen Bildern, so könnte man glauben, dass theilweise dieselben Orginalien copirt worden seien.

In der Grösse variiren die Anker und Sterne bedeutend; in der Regel erreicht der Hauptstrahl die Länge eines Millimeters, an einem gigantischen Anker von C. deciminum aus Schwiechelt misst er sogar über 2 mm. (Fig. 29.)

Für die Entstehung dieser Gebilde dürfte es wieder nicht ohne Bedeutung sein, dass an jugendlichen Exemplaren der Canal immer viel weiter ist, als an den grösseren ausgewachsenen. Einmal ist mir auch eine äusserst zarte, uudeutlich umgrenzte Kieselscheibe vorgekommen, deren Canal genau die Form eines Sterns mit drei gespaltenen Armen besass. (Taf. VI Fig. 31.)

Mit den Sternen und Ankern, welche bei aller Veränderlichkeit doch immer eine unverkennbare Regelmässigkeit in ihrer Form besitzen, kommen zahlreiche Kieselkörper von weniger beständiger Gestalt vor, deren Grundform sich übrigens ebenfalls auf eine gleichseitige Pyramide zurückführen lässt. Es sind dies stern-, scheiben- und ankerförmige Körper mit lappigen, unregelmässig begrenzten, an den Enden häufig mit wurzelartigen Anhängen versehene Armen. (Taf. VII Fig. 9—38.) Ihre Oberfläche ist stets rauh, grubig, oft mit knorrigen Auswüchsen versehen. Eine sehr charakteristische und ziemlich constante Erscheinung bei diesen unregelmässigen Körpern ist die Entwicklung des Centralcanals. Während derselbe bei den normal gebildeten Sternen und Ankern durch die ganze Länge der Strahlen verläuft und an den Spitzen frei ausmündet, zeigt er sich hier immer auf den centralen Theil beschränkt; es stossen drei kurze an ihren blinden Enden zuweilen etwas angeschwellte Canäle

in der Mitte unter Winkeln von 130° zu einem meist gleicharmigen Stern zusammen. Jeder Canal entspricht einem Strahl des Kieselkörpers, die freilich sehr ungleich und unregelmässig gestaltet sein können. Gewöhnlich steht auf den drei in einer Ebene gelegenen Canälen noch ein vierter vertikaler, allein sehr häufig ist dieser aufsteigende Arme auf eine kurze zugespitzte Warze reducirt, so dass der ganze Kieselkörper eine im Grundplan dreistrahlige Scheibe bildet. Selten fehlt das Axenkreuz im Centraltheil, indess bei einigen, ziemlich regelmässig geformten und sicherlich hierher gehörigen Körpern habe ich vergeblich danach gesucht. (Taf. VII Fig. 31.)

Beinahe jedem der oben beschriebenen normal gebildeten Sterne und Ankern entspricht auch eine unregelmässige Nebenform mit kurzem Axenkreuz. Dies legt die Vermuthung nahe, dass entweder mit dem Abschluss des Canals auch eine Störung in der gesetzmässigen Ablagerung der Kieselsubstanz eintritt, oder dass die kurzen Canäle die Ueberreste von normalen Centralfäden darstellen, welche durch reichlich von Aussen eindringende Kieselsubstanz allmälig ausgefüllt wurden.

Taf. VII Fig. 11—23 sind Nebenformen der vierstrahligen Sterne. Sie unterscheiden sich von der Grundform, abgesehen vom Canal, durch die an den Enden verdickten, grobästigen Arme und durch das knorrige, rauhe Aussehen derselben. Spalten sich die drei Hauptstrahlen in je zwei Aeste, die sich wieder mehrfach vergabeln können und verkümmert gleichzeitig der vierte Arm zu einem kurzen Stumpf, so erhält man mehrlappige Scheiben, welche den sieben- und achtstrahligen Sternen entsprechen. Derartige Formen sind in Taf. VII Fig. 26—33 dargestellt. Dadurch, dass sich zuweilen nur zwei Aeste gabeln, die anderen zwei aber einfach bleiben, erhält man alle Uebergänge von der ersten zur zweiten Gruppe dieser Körper.

Verhältnissmässig selten kommen Anker mit unregelmässig ausgebildeten, verästelten oder an den Enden verdickten Zinken vor. Sie fehlen übrigens nicht ganz, wie es Taf. VII Fig. 9, 10 beweisen.

Schliesslich mögen hier auch noch ganz unregelmässige Kieselkörper mit oder ohne Axenkreuz erwähnt werden, welche namentlich bei C. lobatum, aber auch bei anderen Arten in etwas geringerer Zahl vor-

kommen. Einige Proben derartiger Bildungen sind (Taf. VII Fig. 24, 25, 34—38) gezeichnet.

Carter [1]) hat in seiner schon vielfach genannten Abhandlung mit den oben erwähnten Körpern übereinstimmende Kieselgebilde als Dactylocalyx Vicaryi beschrieben und mit Recht auf deren Aehnlichkeit mit den Kieselkörpern der lebenden Gattungen Dactylocalyx, Corallistes und Discodermia hingewiesen.

3. Eine ganz besondere Sorte von Kieselgebilden mit fünf Axencanälen (Taf. V Fig. 47—50) bin ich nicht im Stande in die Schmidt'schen Gruppen unterzubringen. Hier befestigt sich an einem meist kurzen einfachen Schaft eine concave Scheibe von der Form eines in der Mitte durchgeschnittenen Schirms. Durch diese Scheibe verlaufen vom Schaft ausgehend vier breite Canäle, welche sich über den Rand fortsetzen und Veranlassung zur Bildung von vier dünnen mehr oder weniger verlängerten, divergirenden Armen geben. Diese sonderbaren, bis jetzt noch nicht beschriebenen Kieselkörper sind nicht gerade selten; ich habe sie fast bei allen Coeloptychien-Arten, ausserdem aber auch bei Siphonia cervicornis Goldf., beobachtet. Man kann dieselben vielleicht am besten mit den Besengabeln von Farrea (Schmidt Atl. Sp. t. I. fig. 12, 20) vergleichen, nur haben wir hier vier, dort sechs oder sieben Zinken. Bei Periphragella Elisae Marsh. und Iphiteon beatrix Bow. kommen zwar Besengabeln mit vier Zinken vor, aber es fehlt ihnen der Schirm, auch stehen die Zinken in anderer Anordnung. Immerhin dürften sich unsere Schirmnadeln zu den dreistrahligen Ankern verhalten, wie die Besengabeln von Farrea zu den Sechsstrahlern.

4. Unter den freien Kieselkörpern von Coeloptychium spielen die dreiaxigen eine ganz untergeordnete Rolle, was einigermassen befremdet, da das zusammenhängende Gerüste in so ausgezeichneter Weise den Hexactinelliden-Typus trägt. Ich habe nur eine geringe Anzahl einfacher sechsstrahliger Sterne gesehen, deren Axen sich unter rechtem Winkel kreuzen. (Taf. V Fig. 36—46.) Gewöhnlich sind alle Strahlen gleichmässig entwickelt, zuweilen verlängert sich eine Axe viel stärker, als die andern, oder ein, in sehr seltenen Fällen auch zwei Strahlen verkümmern vollständig. Die offen mündenden Canäle sind immer wohl entwickelt, die

1) l. c. fig. 1, 2, 6.

Strahlen glatt. Ein einziges Mal habe ich auch einen dornigen Stern gesehen. (Fig. 42.) Einige Proben dieser bei fast allen jetzt lebenden Hexactinelliden vorkommenden Gebilde habe ich Taf. V Fig. 36—43 abbilden lassen, wodurch eine weitere Beschreibung überflüssig wird.

Zu den dreiaxigen Körpern rechne ich auch Sterne mit vier gekrümmten starken Armen, bei welchem die dritte Axe fast ganz verkümmert zu sein scheint. (Taf. V Fig. 44—46.) Carter, welcher typische Sechsstrahler aus dem Grünsand nicht beschrieben hat, bildet einen ganz entsprechenden Stern (l. c. fig. 38) als Gomphites Parfittii ab und vergleicht ihn mit Hyalonema.

Zwei Ankerchen (Taf. V Fig. 44—36) mit sechs zurückgekrümmten Zinken liefern den Beweis, dass diese charakteristische Form der Hexactinelliden bei Coeloptychium wenigstens nicht gänzlich fehlt.

5. Von vielaxigen Kieselkörpern finden sich bei Coeloptychium ziemlich häufig dünne Scheiben von ovalem oder elliptischem Umriss und einem grössten Durchmesser von 0,35—0,4 mm. (Taf. V Fig. 32—35.) An ausgewachsenen Exemplaren ist die Mitte der zierlichen Scheiben etwas verdickt, gegen den ganzrandigen Umfang schärfen sie sich zu. Die Oberfläche zeigt immer das rauhe, grubige Aussehen, welches den meisten freien Kieselgebilden von Coeloptychium eigen ist. In der Nähe des Randes befinden sich zahlreiche längliche, bisquitförmige Löcher, von denen immer ein grösseres mit einem kleineren abwechselt. Vom Centrum strahlen 12—16 Canäle nach dem Rande aus, wo sie frei zu Tage treten. Man kann die Entstehung dieser zierlichen Scheiben verfolgen; an noch nicht vollständig ausgebildeten Exemplaren (Fig. 35) sieht man den Rand mit Einschnitten von verschiedener Grösse versehen und die ganze Scheibe erscheint aus einer grossen Anzahl dichotom gegabelter Lappen zusammengesetzt. Dadurch, dass sich die Enden dieser Lappen ausbreiten, bis sie sich berühren und endlich ganz miteinander verschmelzen, entsteht der continuirliche Rand der Scheibe und die früheren Einschnitte verwandeln sich in ringsum geschlossene längliche Löcher.

Vollkommen übereinstimmende Gebilde sind bei lebenden Spongien bis jetzt noch nicht beschrieben worden, wohl aber zeigen sich bei Dactylocalyx und Aphrocallistes ähnliche Scheiben. Carter bildet unter dem Namen Dactylocalyx callodiscus einen nahezu identischen

Körper aus dem Grünsand von Haldon ab (l. c. fig. 40), welcher sich von den unsrigen nur durch ein Loch im Centrum unterscheidet.

Einen sehr selten vorkommenden vielaxigen Kieselkörper habe ich Taf. V Fig. 31 abbilden lassen. Diese mit zahlreichen kurzen Radialstacheln versehene Kugel von 0,08 mm. Durchmesser gleicht zum Verwechseln den „subsphero-stellate und sphero-stellate“ Körpern aus der Rindenschicht von Tethya Ingalli und robusta Bow. [1]) Bei den „Sphero-stellate“ Kugeln von T. robusta erwähnt Bowerbank auch die Axencanäle, welche an unserem Körper so schön zu sehen sind. Ziemlich übereinstimmende vielstrahlige Sterne kommen nicht selten bei lebenden Stelletten vor. (St. lactea Carter [2]), St. conchilega Sdt.). O. Schmidt zeichnet sie übrigens auch bei den Gattungen Callites [3]) (C. Lacazii Sdt.) und Pachastrella (P. exostotica Sdt.) [4]) Da sich ähnliche Gebilde auch bei Suberites und bei Sclerochalina asterigerina Sdt. zeigen, so legt ihnen O. Schmidt nur geringes Gewicht für die systematische Verwerthung bei. Nur in einer Hinsicht glaubte dieser ausgezeichnete Spongienkenner aus dem Vorkommen und Fehlen der vielaxigen Sterne einen Anhaltspunkt für die Beurtheilung der Descendenz und Systematik gewinnen zu können: darin nämlich, dass sie „absolut bei den Spongien mit dem dreiaxigen Nadeltypus mangeln“. [5]) Durch ihren Nachweis bei der Gattung Coeloptychium fällt auch diese Verwerthung dahin.

6. Eine letzte Gruppe von freien Kieselgebilden umfasst die dichten Kugeln mit ausgezeichnet strahliger Struktur, welche O. Schmidt als Nadeldrusen bezeichnet, obwohl sich in den einzelnen, äusserst feinen Strahlen niemals ein Canal mit Centralfaden erkennen lässt. Derartige Kugeln, Scheiben oder Sterne mit ganz kurzen Strahlen sind eminent charakteristisch für die Rindenschichte der lebenden Corticaten, namentlich für Geodia und Stelletta.

Da Nadeln, Sterne und Anker von der für Geodia und Stelletta bezeichnenden Form bei Coeloptychium so massenhaft vorkommen, so

---

1) Monograph Brit. Sp. fig. 164, 165.
2) Ann. and Mag. 1871. 4. ser. vol. V. S. 9. pl. IV. fig. 21.
3) Alger. Sp. t. III. fig. 2.
4) ibid. t. III. fig. 13.
5) Atlant. Sp. S. 6.

müsste man auch die kugeligen Körper erwarten. Und in der That sie sind reichlich vorhanden.

Abgesehen von jenen schon früher (p. 41) beschriebenen Kugeln, welche ich zu den einaxigen Walzen rechne, gibt es kleine 0,1 mm. messende Kugeln, auf deren Oberfläche kurze Spitzen stachelig hervorragen. (Taf. V Fig. 27—30.) Es erinnern diese Körper an die Rindenkugeln von Geodia, sowie an die entsprechenden Bildungen bei Pachastrella exostotica Sdt.

Häufiger als diese Kugeln sind ellipsoidische und eiförmig gewölbte Scheibchen von ausgezeichnet strahliger Struktur. (Taf. V Fig. 18—26.) Ihr langer Durchmesser beträgt 0,08—0,15 mm., ihr kurzer 0,06—0,1 mm. Im Centrum befindet sich häufig ein schwarzer papillöser Kern, von welchem zahlreiche äusserst feine Fasern nach der Peripherie ausstrahlen und der Oberfläche durch ihre stumpfen, schwach hervorragenden Enden ein feinwarziges Aussehen verleihen. Es stimmen diese Körperchen fast absolut mit den von O. Schmidt[1]) beschriebenen Kieselscheiben von Stelletta euastrum Sdt. überein.

Wenn ein mit lebenden Spongien vertrauter Specialist die auf den vorhergehenden Seiten beschriebenen freien Kieselgebilde zu classificiren hätte, so würde er dieselben keinenfalls einer einzigen Gattung, ja sicherlich nicht einmal einer einzigen Familie zuschreiben. Ein Beleg für diese Behauptung liegt auch bereits gedruckt vor. In der vielfach citirten Abhandlung hat Carter[2]) zahlreiche fossile Kieselkörper aus dem Grünsand von Haldon und Blackdown beschrieben und durch 79 Abbildungen illustrirt; fast sämmtliche dort vorkommenden Formen wiederholen sich ganz genau auch bei Coeloptychium. Diese merkwürdige Uebereinstimmung von zwei örtlich und zeitlich ziemlich entlegenen Funden könnte kaum grösser gedacht werden. Schliessen wir die wenigen; bei Coeloptychium fehlenden vierstrahligen Sterne und die geringelten Nadeln aus, so finden wir alle übrigen aus dem Grünsand stammenden freien Kieselgebilde von Carter in folgende sechs Gattungen vertheilt: Dactylocalycites, Gomphites, Geodites, Stelletites, Dercites

1) Alger. Sp. t. IV. fig. 4.

2) Annals and Magazine of natur. hist. 1871. 4. ser. VII. S. 112.

und Esperites. Von diesen gehört Dactylocalycites, wenn wir das Schmidt'sche System zu Grunde legen, in die Gruppe der Lithistiden (da wir es mit Formen zu thun haben, welche nicht Dactylocalyx im engeren Sinn, sondern Corallistes Sdt. entsprechen), Gomphites zu den Hexactinelliden, Esperites zu den Desmacidinen, die übrigen zu den ehemaligen Corticaten (Pachytragiae Carter), welche Schmidt neuerdings unter Ausschluss von Tethya in zwei besondere Gruppen der Ancoriniden und Geodiniden zerlegt hat.

Sowohl in Haldon als bei den Coeloptychien kommen die Esperien artigen Nadeln am seltensten vor, das entschiedene Uebergewicht haben Bildungen vom Typus der Ancoriniden und Geodiniden, und erst nach diesen folgen hinsichtlich ihrer Häufigkeit die Corallistes ähnlichen Gabeln, Anker und vielaxigen Scheiben.

In geringer Zahl, aber sehr typisch entwickelt, finden sich einfache Sechsstrahler, kleine Ankerchen, sowie Gomphites ähnliche Sterne, gewissermaassen als erste unvollkommene Versuche zu einem Nadeltypus welcher bei den lebenden Hexactinelliden so wunderbar schöne Modificationen hervorruft.

Wenn wir absehen von den schirmförmigen, gestielten Fünfstrahlern, die bis jetzt nur bei Coeloptychium und anderen fossilen Schwämmen beobachtet wurden, sowie von den einaxigen Nadeln, welche wegen ihrer indifferenten Gestalt wenig Licht auf die verwandtschaftlichen Beziehungen werfen, wenn wir ferner die seltenen Esperien ähnlichen Nadeln ausser Acht lassen, da für diese der Fall einer Einschwemmung angenommen werden könnte, so hätten wir also für Coeloptychium eine höchst bemerkenswerthe Vereinigung von isolirten Kieselgebilden, welche man sonst auf die Gruppen der Pachytragien Carter (Ancoriniden und Geodiniden Sdt.), Lithistiden und Hexactinelliden vertheilt findet, und zwar spielen entschieden die Hauptrolle in morphologischer Hinsicht die Nadeln, Anker und Scheiben der Pachytragien.

Es ist diese Erscheinung jedenfalls für die genetische Verwandtschaft der Pachytragien, Hexactinelliden und Lithistiden von hoher Bedeutung. Sie ist übrigens auch unter den lebenden Spongien nicht ohne Beispiel, denn die Gattung Dorvillia Sav. Kent enthält gleichfalls Nadeln vom Typus der Ancoriniden vereinigt mit typischen Sechsstrahlern.

Ueber die systematische Stellung der Gattung Coeloptychium und der Hexactinelliden überhaupt.

Durch die Untersuchung der feineren Skeletstruktur von Coeloptychium sind wir zu unerwarteten Ergebnissen gelangt. Während uns nämlich die Beschaffenheit des zusammenhängenden Gerüstes mit vollster Sicherheit zu den typischen Hexactinelliden führt, finden wir unter den isolirten, ursprünglich in den äusseren Sarkodeschichten befindlichen Kieselgebilden, zwar vereinzelte zu den Sechsstrahlern gehörige Formen, aber neben ihnen in überwiegender Mehrzahl theils einaxige Nadeln, theils Sterne und Anker mit vorherrschender Vierzahl. Wie im vorigen Abschnitt ausführlich erörtert wurde, treten unter den manichfaltigen freien Kieselgebilden die nach dem Typus der Pachytragien gestalteten entschieden in Vordergrung; erst nach ihnen finden wir in zweiter Stelle Lithistiden ähnliche Gebilde und zuletzt einfache Sechsstrahler vom Hexactinellidentypus.

Es ist aus den schon früher erörterten Gründen höchst uuwahrscheinlich, dass diese merwürdige Vereinigung von freien Kieselgebilden sich durch Zusammenschwemmung oder durch Eindringen fremder Elemente erklären lasse. Ich habe vielmehr durch vielfach wiederholte Untersuchung der verschiedensten Arten aus mehrfachen Fundorten die Ueberzeugung gewonnen, dass die aus Sechsstrahlern bestehenden Gittergerüste und die erwähnten freien Kieselgebilde von ein und demselben Organismus herrühren.

Auch für die vielfach genannten Kieselnadeln aus dem Grünsand von Haldon und Blackdown möchte ich die von Carter beliebte Deutung in Zweifel ziehen. Dieselben gehören zwar trotz ihrer Uebereinstimmung mit den Kieselgebilden von Coeloptychien sicherlich nicht zu dieser Gattung, welche in so tiefen Kreideschichten bis jetzt niemals gefunden wurde, wohl aber möchte ich sie einer anderen Hexactinelliden-Gattung zuschreiben, von welcher die Carter'schen Tafeln (VII und VIII) auch zahleiche Gerüstfragmente zur Anschauung bringen.

Wenn demnach freie Kieselgebilde bei fossilen Spongien nur mit grosser Vorsicht gedeutet werden und jedenfalls nicht in erster Linie

systematisch verwerthet werden dürfen, so haben wir dafür bei Coeloptychium im zusammenhängenden Gittergerüst die Hexactinellidenstruktur in so ausgezeichneter Weise entwickelt, dass über ihre Verwandschaft mit den Gattungen Farrea, Eurete, Myliusia u. A. auch nicht der leiseste Zweifel obwalten kann.

O. Schmidt[1]) begreift unter seiner Familie der Hexactinelliden „alle diejenigen Spongien, deren Kieselnadeln dem dreiaxigen Typus folgen". Er trennt dieselben von den übrigen Spongien mit zusammenhängendem Kieselgerüst, bei denen die Fasern nicht nach dem dreiaxigen Typus wachsen, sondern ein scheinbar ganz regelloses Gewirr bilden. Den freien Kieselgebilden dieser zweiten als Lithistiden bezeichneten Familie liegt entweder die dreiseitige Pyramide zu Grunde, oder sie sind ein- oder vielaxig. Beide Familien waren früher von Gray unter der Bezeichnung Coralliospongia, und von Wyville Thomson als Vitrea vereinigt.

Carter[2]) schliesst sich in einer an feinen Beobachtungen reichen Abhandlung über die lebenden Hexactinelliden und Lithistiden in der Hauptsache den Anschauungen O. Schmidt's an, definirt jedoch die beiden Familien noch etwas schärfer.

Die allgemeinen Merkmale der Hexactinelliden werden von Carter folgendermassen zusammengefasst: „Spicules developed upon a sexradiate division of the central canal, held together by silicified fibre or amorphous sarcode, forming a reticulated structure whose interspaces are more or less polyhedral."

Jene der Lithistiden, wie folgt (l. c. S. 437): „Spicules developed upon a quadriradiate division of the central canal, held together by amorphous sarcode and an interlocking of their filigreed arms, forming a reticulated glassy structure, whose interspaces are more or less irregular and curvilinear. Composed of two kinds of „skeleton spicules" viz. those which form a layer on the surface and are accompagnied by minute or „flesh-spicules" characterizing the species, and those forming the body, which are mor or less alike in all the species

1) Atlant. Sp. S. 13.
2) Annals and Mag. nat. hist. 1873. 4. ser. vol. 12. S. 349.

and accompagnied by flesh spicules. The skeleton spicules of the surface are for the most part, provided with a smooth, pointed vertical shaft, directed inwards, and a horizontal head of different shapes according to the species."

Da unter den Haxactinelliden mehrere Gattungen vorkommen (Aphrocallistes, Dactylocalyx), bei denen im zusammenhängenden Gerüst kaum noch eine Regelmässigkeit zu erkennen ist, so legen Schmidt und Carter auf die freien Kieselgebilde das Hauptgewicht.

Carter ist von der fundamentalen Verschiedenheit der beiden Familien so sehr durchdrungen, dass er die von Bowerbank[1]) bei Dactylocalyx pumiceus und Farrea occa[2]), ferner die von Saville Kent[3]) bei Askonema Setubalense beschriebenen Kieselgebilde von vierstrahligem Typus ohne Weiteres für fremde parasitische Eindringlinge erklärt. Noch bestimmteren Ausdruck findet diese Auffassung in Carter's letzter systematischer Arbeit über die Spongien[4]) wo die Lithistiden und Hexactinelliden zwei verschiedenen Ordnungen angehören. Gegen eine derartige scharfe Trennung der Hexactinelliden von der nächsten Ordnung der Holorhaphidoten Carter, wohin ausser den Lithistiden noch die Familien der Renierida, Suberitida, Pachytragia und Potamospongia gehören, spricht übrigens schon die von Sav. Kent beschriebene Gattung Dorvillia[5]), bei welcher ächte Sechsstrahler vereinigt mit drei- oder sechszinkigen Ankern und vierstrahligen Sternen vorkommen. Sav. Kent hebt diese Eigenthümlichkeit besonders hervor, und nennt Dorvillia geradezu „a connecting link between Hexactinellidae and Tethyidae."

Für ein nicht unwichtiges Resultat der vorliegenden Untersuchung über Coeloptychium in systematischer Hinsicht halte ich den Nachweis, dass in der oberen Kreide eine scharfe Scheidung der Hexactinelliden von den Lithistiden, Geodiniden und Ancoriniden noch nicht eingetreten war. Es müssen die Ventriculiden,wenn wir diese Bezeichnung für die fossilen

---

1) Proceed. zool. soc. 1869. t. III. fig. 7, 9, 10.
2) l. c. t. XXIV. fig. 2, 3, 4.
3) Monthly microscop. journal 1870. pl. 64. fig. 10, 11.
4) Annals and magaz. nat. hist. 1875. 4. ser. vol. XVI. S. 1, 126 und 177.
5) Monthly microscop. journ. 1870. S. 293.

Kieselschwämme provisorisch noch anwenden wollen, als Sammelformen betrachtet werden, bei denen das zusammenhängende Gerüst nach dem Typus der Hexactinelliden gebaut ist, während die isolirten Kieselgebilde jenen der Pachytragien, Lithistiden und Hexactinelliden entsprechen.

Damit wird aber auch jener Gruppe der ehemaligen Corticaten, welche Carter als Pachytragien, Osc. Schmidt als Geodiniden und Ancoriniden ausgeschieden haben, ihre Stellung unmittelbar neben den Lithistiden und Hexactinelliden angewiesen. Sie bilden offenbar einen Ausläufer desselben Stammes, dem die jetzigen Hexactinelliden und Lithistiden entsprosst sind.

II. Specieller Theil.

Uebersicht der bis jetzt bekannten Arten.

Bei Beginn meiner Untersuchungen hatte ich ursprünglich keinen anderen Zweck im Auge, als die Ermittelung der feineren Strukturverhältnisse des Coeloptichiumskeletes und deren Verwerthung für die naturgemässe Gruppirung der fossilen Spongien. Das beschränkte, aus einem halben Dutzend Exemplaren bestehende und nur drei verschiedenen Arten angehörige Material des Münchener paläontologischen Museums liess mich an eine weitere Ausdehnung auch dann nicht denken, als dasselbe durch die Güte der Herrn Prof. Beyrich und Gümbel um einige Stücke von C. agaricoides und Seebachi aus Haldem vermehrt worden war.

Indess während der Arbeit zeigte sich mehr und mehr das Bedürfniss nach einer Prüfung des morphologischen Werthes der verschiedenen Formerscheinungen; es erschien mir unabweislich nothwendig zu untersuchen, welche Merkmale zur Charakterisirung der Gattung, welche zur Unterscheidung der Arten besonders geeignet seien. So erwachte in mir der Wunsch, sämmtliche bis jetzt bekannte Formen der Gattung Coeloptychium in den Bereich meiner Untersuchung zu ziehen, um an ihnen die Verwerthbarkeit der ermittelten Thatsachen für die Systematik zu erproben. Durch die dankenswerthe Bereitwilligkeit, womit mir Herr Professor Dr. von Seebach das prachtvolle im Göttinger Universitäts-Museum befindliche Material, die Herrn Professor Dr. Schlüter in Bonn und Salinen-Inspektor Dr. A. Schlönbach in Salzgitter eine namhafte Anzahl von Exemplaren ihrer reichen Privat-Sammlungen zur Verfügung stellten, wurde ich in die Lage versetzt, eine kritische Revision der Arten in Angriff zu nehmen. Dieselbe hätte übrigens kaum

zu einem befriedigenden Resultat geführt, wenn mir nicht Herr Senator H. Römer in Hildesheim und Herr Director von Groddeck in Clausthal die Original-Exemplare zu mehreren durch F. A. Römer beschriebenen Arten zur Untersuchung anvertraut hätten, und wenn nicht der Besitzer der vollständigsten Coeloptychien-Sammlung Herr Geh. Kammerrath Grotrian in Braunschweig dem Münchener Museum eine wundervolle Serie, worin sämmtliche bei Vordorf vorkommende Arten vertreten sind, zum Geschenk gemacht hätte.

Wenn ich sämmtlichen genannten Herren hiermit meinen wärmsten Dank ausspreche, so wünschte ich, dass sie in diesen Worten mehr als den herkömmlichen Ausdruck der Erkenntlichkeit für geleistete Unterstützung erkennen möchten, denn es handelte sich im vorliegenden Falle um die Ueberlassung von zerbrechlichen und kostbaren Exemplaren, welche jedes Museum als Prachtstücke betrachtet und deren sich Niemand gerne, wenn auch nur in vorübergehender Weise entäussert.

Was die systematische Verwerthung der verschiedenen Merkmale betrifft, so zeigt sich, dass für die Bestimmung der Gattung die Beschaffenheit des zusammenhängenden Gittergerüstes den zuverlässigsten Anhalt gewährt. Bei sämmtlichen Coeloptychien besteht das Gerüst aus cubischen Maschen, derer Kieselstäbe mit wurzelartigen Anhängen versehen sind, und welche an den Kreuzungsstellen hohle, von einem Axenkreuz durchzogene regelmässige Octaëder bilden. Das solide Gerüste wird von sehr charakteristischen Deckschichten umschlossen und von zahllosen isolirten Kieselgebilden begleitet, welche theils dem einaxigen, theils dem dreiseitig pyramidalen, theils dem sechsstrahligen, theils dem vielaxigen Typus angehören. Dies und die ganze äussere Form, namentlich die eigenthümliche Faltung der Körperwand, wodurch im Inneren radiale, kammerähnliche Räume entstehen, bieten bei Coeloptychium Gattungsmerkmale von einer bei Spongien ganz ungewöhnlichen Beständigkeit.

Für die Speciesunterscheidung liefert die feinere Structur des Gittergerüstes wegen ihrer geringen Veränderlichkeit kaum verwerthbare Merkmale, auch die isolirten Kieseltheile sind wenig verschieden, obwohl sich allerdings für jede Art gewisse Eigenthümlichkeiten hervorheben lassen. Die verlässigsten Charaktere der Arten sucht

man in der Struktur der Deckschicht der ebenen oder vertieften Oberseite, in der Beschaffenheit des Seitenrandes, in der Zahl und Spaltung der Falten auf der unteren Fläche des Schirms und in der Gestalt und Vertheilung der Ostien auf dem Faltenrücken der Unterseite. Von untergeordneterem Werthe sind die Merkmale, welche sich auf die Form, Faltung und Länge des Stieles beziehen.

An eine Monographie der Gattung Coeloptychium im Sinne der Descendenztheorie, mit den Zielen, welche sich z. B. Neumayr in seiner Abhandlung über die Fauna der Congerien- und Paludinenschichten Slavoniens [1]) gesteckt hatte, konnte ich nicht denken.

Das Material hiefür dürfte auch durch Vereinigung Alles dessen, was in sämmtlichen Sammlungen Deutschlands und Russlands vertheilt ist, nicht ausreichen, überdies stammt dasselbe nicht aus einer Reihenfolge genau untersuchter, unmittelbar auf einander folgender Schichten eines einzigen Gebietes, sondern zur überwiegenden Mehrheit aus einem ziemlich eng begrenzten Horizont der oberen Kreide (untere Mucronaten und obere Quadratenschichten) eines immerhin nicht kleinen Verbreitungsbezirkes her.

Es mag wohl an dem beschränkten Material liegen, dass sich die circa 50 Stücke, welche mir zur Verfügung standen, ohne besondere Schwierigkeiten in eine Anzahl allerdings ziemlich variabler, aber doch wohl unterscheidbarer Arten vertheilen liessen. Einzelne Typen wie C. agaricoides und subagaricoides bilden ziemlich wohl umgrenzte Formenkreise ohne sehr innigen Anschluss an Nachbararten; bei anderen liegt zwar die Wahrscheinlichkeit einer Entwicklung aus einer gemeinsamen Stammform vor, allein für jetzt wenigstens lässt sich der Beweis dafür nicht erbringen. Man kann sich in der That leicht vorstellen, wie aus C. incisum Roem., je nachdem die weiter unten näher auseinander gesetzten Veränderungen in der einen oder anderen Richtung erfolgten, C. deciminum, C. sulciferum oder C. lobatum entstehen konnten, allein mit derselben Wahrscheinlichkeit, mit welcher man alle vier Formen als

1) Abhandlungen der k. k. geologischen Reichs-Anstalt 1875. Bd. VII. 3. S. 92.

Mutationen einer älteren dem C. incisum ähnlichen Stammform betrachten könnte, liessen sie sich auch als sehr weit differenzirte Variationen einer einzigen Art auffassen.

Ebenso kann man bei C. princeps, C. Seebachi und rude eine nahe verwandtschaftliche Beziehung nicht verkennen, dennoch habe ich dieselben als besondere Arten beschrieben, weil sich keineswegs allseitige Uebergänge ihrer Merkmale nachweisen lassen. Bei C. lobatum habe ich der Versuchung zur weiteren Speciesabtrennung widerstanden, da schon die geringe Zahl der mir vorliegenden Stücke erkennen liess, dass hier die äussere Erscheinung des Schwammkörpers in weit höherem Maasse Veränderungen unterworfen ist, als bei den übrigen Coeloptychium-Arten.

Gattung: **Coeloptychium**. Goldf.

(κοίλη Höhlung, πρυχή Falte)

1826—1833. Petrefacta Germaniae. Bd. I. S. 31.

(Synonyme: 1872. Coeloptychium, Homoptychium, Schizoptychium und Lophoptychium Pomel. Paléontologie de la province d'Oran. S. 69.)

Schwammkörper monozoisch, tisch-, schirm- oder pilzförmig, seltener weit trichterförmig, gestielt. Wand dünn, durch kräftige, gegen aussen und oben meist mehrfach gespaltene radiale Falten mäandrisch gewunden; Falten nur auf der Unterseite sichtbar, oben und an den Seiten durch poröse Deckschichten bekleidet. Seitenflächen einen einfachen Rand bildend oder lappig getheilt, scharfkantig von der Oberseite getrennt. Centrale Leibeshöhle durch die Faltung der Wand in radiär geordnete canalähnliche Seitenkammern zerlegt. Stiel hohl.

Das kieselige Skelet besteht aus einem zusammenhängenden Gittergerüste verschmolzener Sechsstrahler und aus isolirten sogenannten „Fleisch-Nadeln". Die verschmolzenen Sechsstrahler des festen Gerüstes kreuzen sich rechtwinklich unter Bildung eines hohlen Octaëders, mit durchlaufendem Axenkreuz, und setzen ein regelmässiges, aus cubischen Maschen bestehendes mehrreihiges Gitterwerk zusammen. Die mit Axencanälen versehenen Kieselfasern zeichnen sich durch wurzelartige Fortsätze aus. Durch reichliche Entwicklung dieser Fortsätze in der äussersten Gitterschicht entstehen die löcherigen Aussenwände der Falten,

sowie die porösen Deckschichten der Oberfläche und den Seiten. Die grösseren Einströmungsostien der einfachen Canäle befinden sich in Reihen auf den Falten der Unterseite. Die Deckschicht der Leibeshöhle ist entweder gleichmässig grobmaschig oder abwechselnd aus grobmaschigen und feinporösen Radialstreifen zusammengesetzt.

Freie Kieselgebilde ungewöhnlich zahlreich und mannichfaltig. Einaxige, doppelt zugespitzte, oder an einem Ende abgerundete, glatte (sehr selten dornige) Nadeln und cylindrische Walzen vorherrschend, ausserdem vier-, sieben- oder achtstrahlige Sterne, Anker mit drei oder sechs Armen und langem Schaft, vielaxige, dünne, durchbrochene Scheiben, strahlige Kieselkugeln und Scheiben und endlich sechsstrahlige Sterne, sowie Kieselgebilde von unregelmässigerer Gestalt, welche sich auf die vierstrahligen Sterne und Anker zurückführen lassen.

1. **Coeloptychium agaricoides.** Goldf.

Taf. III Fig. 1, 4, 5, 6, 10, 11, 13. Taf. IV. A.

1826—1833 Goldf. Petr. Germ. I. S. 31. taf. 9. fig. 20. — 1841. Roemer Nordd. Kr. S. 10. t. IV. fig. 5. — 1864. Roemer-Spongit. S. 3. — 1872. Schlüter. Die Spongitarienschichten im Münsterland. S. 16.

Tischförmig, Oberseite eben, in der Mitte meist vertieft, Deckschicht der Oberseite aus abwechselnd grobmaschigen und feinporösen Streifen bestehend. Rand einfach. Falten der Unterseite zahlreich (18—30) durch einfache oder doppelte Gabelung gewöhnlich aus 8 (genauer 7—9) Primärfalten entstehend. Ostien länglich spaltförmig. Stiel rund, glatt, am oberen Ende gefaltet.

Die Goldfuss'sche Abbildung nach einem Exemplar aus Coesfeld gibt vom äusseren Habitus dieser Art ein besseres Bild, als die Zeichnung von F. A. Roemer, welche zudem mit der Beschreibung nicht ganz in Einklang steht. Das zuverlässigste Kennzeichen für C. agaricoides liefert die spaltförmige Gestalt der Ostien auf dem Rücken der Falten der Unterseite. Nach diesem Merkmal kann man auch schlechte Fragmente noch mit Sicherheit bestimmen. Das Zählen der Falten auf der Unterseite macht einige Schwierigkeiten, da sich nicht alle gleichmässig in vier Aeste spalten, sondern häufig findet man eine Primärfalte in drei, vier, fünf oder sogar sechs Aeste vergabelt, oder

es bleiben auch zwei Aeste mit einander verschmolzen, was übrigens durch das Vorhandensein von zwei Ostienreihen meistens sofort klar wird. Man geht am sichersten, wenn man das Zählen am oberen Ende des Stieles vornimmt, wo noch keine Dichotomie der Falten eingetreten ist. Wenn ich darnach verfahre, so finde ich bei den Vordorfer und Ahltener Exemplaren in der Regel acht, seltener sieben Primärfalten, an Haldemer kommen auch neun vor, aber dort zeigt die Vergabelung ungemein starke Variabilität, so dass es Exemplare mit nur achtzehn, andere mit dreissig Falten in der Nähe des Aussenrandes gibt. Die Beschaffenheit der grobmaschigen Radialbänder auf der Oberfläche wechselt je nach den Exemplaren und Fundorten. Bei Vordorf, Haldem, Coesfeld u. s. w. sind die Maschen vierseitig und verhältnissmässig klein; an zwei kleinen Exemplaren von Linden dagegen zeichnen sie sich durch ungewöhnliche Grösse aus. Es scheint diese Beschaffenheit auf ein jugendliches Alter hinzuweisen, da mit fortschreitender Entwicklung der Deckschicht das Lumen der Maschen durch sekundäre Querstäbchen verkleinert wird.

Die Zahl der feinporösen Radialbänder auf der Deckschicht hängt genau ab von der Zahl der Furchen auf der Unterseite, da sich dieselben ja unmittelbar auf den oberen Rücken der Falten auflagern; da nun die Furchen der Unterseite in Folge der Dichotomie der Falten von verschiedener Länge sind, so wechseln auch auf der Deckschicht längere und kürzere Bänder ziemlich regelmässig mit einander ab. Roemer gibt „sieben ausstrahlende, feiner punktirte Bänder“ auf der Oberseite an. Diese Ausdrucksweise führt leicht zu Missverständnissen. Roemer zählt nämlich nur die längeren Primärbänder, da aber die damit alternirenden kürzeren ebenso breit und nur wenig kürzer zu sein pflegen, auch niemals direkt aus den längeren entspringen, so kann man nicht von sieben „ausstrahlenden“ Bändern sprechen, zudem da niemals nur sieben, sondern immer mehr vorhanden sind. Die Abbildung auf t. 4 fig. 5 der norddeutschen Kreide gibt dreizehn feinporöse Bänder an. Eine weitere nicht ganz zutreffende Angabe Roemer's bezieht sich auf die Beschaffenheit der Oberseite. Die Goldfuss'sche Originalzeichnung ist nach einem in der Mitte stark vertieften Exemplar hergestellt. Eine ähnliche oder etwas schwächere Vertiefung findet sich an den meisten

von mir untersuchten Stücken aus verschiedenen Fundorten, nur in Vordorf und Ahlten kommen zuweilen Individuen mit ganz horizontaler Decke vor. Der Roemer'schen Bemerkung „obere Fläche horizontal" wäre somit jedenfalls noch beizufügen „in der Mitte meist mit runder Vertiefung".

Der hohle Stiel besitzt bei C. agaricoides häufig ansehnliche Länge. Er verjüngt sich nach unten, ist zuweilen mit wurzelartigen Ausläufern versehen, rund, glatt, am oberen Ende aber meist, namentlich an Vordorfer Exemplaren, gefaltet. Nicht selten verkümmert er auch zu einem ganz kurzen, eine Centralhöhle umschliessenden gefalteten Cylinder

C. agaricoides gehört zu den mittelgrossen Arten. An dem grössten mir vorliegenden Exemplar aus Haldem besitzt der Schirm an seinem unteren Rande einen Durchmesser von 120 mm.; die Vordorfer und Ahltener Stücke sind in der Regel erheblich kleiner; ihr Durchmesser schwankt zwischen 60 und 90 mm. Die Breite des schräg oder auch steil abfallenden Randes beträgt je nach den Exemplaren durchschnittlich 15—22 mm., die Länge des Stieles wechselt zwischen 3 und 40 mm.

Das Gittergerüst der 1—2 mm. dicken gefalteten Wand besteht aus ziemlich regelmässigen cubischen Maschen und zwar liegen an den dünnwandigen Stücken aus Vordorf fünf bis sechs, an den grossen Haldemer acht bis neun Maschenreihen übereinander.

Ueber die feinere Struktur des Gittergerüstes und über die damit vorkommenden isolirten Kieselgebilde gebendie Tafeln III—VII hinreichend Aufschluss.

Vorkommen. Coeloptychium agaricoides ist sowohl aus der Quadraten-, als auch aus der Mucronatenkreide Norddeutschlands bekannt, in beiden Horizonten ziemlich verbreitet und jedenfalls die häufigste Coeloptychien-Art. Ich habe mehr als vier und zwanzig theils vollständige, theils fragmentarische Stücke untersucht, welche aus den Mucronatenschichten von Lemförde, Haldem, Darup und Soeckerhook bei Coesfeld in Westfalen, aus Linden und Ahlten in Hannover und Vordorf bei Gifhorn im Braunschweig'schen stammen. Am letztgenannten Fundort wurden von Herrn Grotrian zahlreiche Exemplare gesammelt und mit

grosser Liberalität verschiedenen Museen mitgetheilt. F. A. Roemer gibt auch noch Theidensen als Fundort für C. agaricoides an. Aus der Quadratenkreide rühren die Exemplare von Legden, Holtwik und z. Th. von Coesfeld in Westfalen her.

2. **Coeloptychium deciminum.** F. A. Roem.

Taf. I. Fig. 6, 7 und Taf. III. Fig. 2.

1841. Nordd. Kr. p. 10. t. IV. fig. 3. — 1864. Spongitarien S. 3. — 1872. C. agaricoides. Schlüter Spongitarien-Bänke S. 16.

Tischförmig, Oberseite eben oder in der Mitte vertieft; Deckschicht der Oberseite entweder gleichmässig aus grobmaschigem Gewebe, oder aus abwechselnd grobmaschigen und feinporösen Streifen bestehend. Rand einfach. Falten der Unterseite (zwischen 30 und 40), durch Gabelung aus acht bis zehn Primärfalten entstehend. Ostien kreisrund. Stiel gefaltet, seltener rund, ziemlich dünn.

Das zuverlässigste Unterscheidungs-Merkmal von der vorigen Art bietet die kreisrunde Form der Ostien auf den Falten der Unterseite. Ausserdem pflegen die Falten zahlreicher vorhanden zu sein, allein es wechselt dies so sehr nach der Grösse der Individuen, sowie nach der stärkeren oder geringeren Neigung zur Bifurcation, dass man kaum eine bestimmte Zahl für dieselben angeben kann. In der Regel lassen sich am oberen Ende des Stieles acht bis zehn Primärfalten unterscheiden. Die ungleiche Vergabelung der Falten und die Form der Ostien ersieht man vortrefflich aus Roemer's Abbildung.

Die Deckschicht der Oberseite ist entweder ganz eben (Exemplare von Ahlten) oder etwas concav mit Vertiefung im Centrum (Vordorf, Schwiechelt). Nach F. A. Roemer ist „die ganze obere concave Fläche von dichten blättrigen, concentrischen Linien bedeckt, welche durch kurze Querlinien verbunden werden; zehn schwache ausstrahlende Falten der oberen Fläche zeigen keine Spuren der feinen Poren, welche hier der vorigen Art eigen sind".

Wenn diese Beschreibung allgemeine Gültigkeit hätte, so wäre die Unterscheidung von der vorigen Art nach der Beschaffenheit der Deckschicht sehr leicht, allein unter dem mir zugänglichen Material befindet sich kein Stück, welches obigen Anforderungen völlig entspricht. Wohl

aber liegen mir aus Vordorf, Schwiechelt und Ahlten Exemplare vor, die in allen sonstigen Merkmalen mit dem Roemer'schen Original-Exemplar, dessen Untersuchung mir durch die Güte des Herrn Senators H. Roemer in Hildesheim ermöglicht wurde, vortrefflich übereinstimmen. Das kleinste Stück aus Vordorf entspricht der Roemer'schen Abbildung am meisten. Die Deckschicht zeigt eine fast durchaus grobmaschige Beschaffenheit, indess die feinporösen Bänder sind vorhanden, wenn auch nur in Gestalt sehr schmaler und kurzer Streifen. An allen übrigen und namentlich an den grössten im Göttinger Universitäts-Museum befindlichen Exemplaren aus Ahlten ist die Deckschicht genau wie bei C. agaricoides beschaffen; es alterniren regelmässig grobmaschige Bänder mit feinporösen von verschiedener Länge.

Ich halte die beiden Formen der Deckschicht lediglich für verschiedene vom Alter bedingte Entwicklungszustände. Das Wachsthum der Coeloptychiengerüste erfolgt nämlich allerdings vorzugsweise unter der Deckschicht des Schirmrandes, wo sich am Ende der Falten immer neue Sechsstrahler einschalten; gleichzeitig bilden sich aber auch auf der Innenseite der Wand, freilich viel langsamer neue Schichten von cubischen Maschen, welche nach und nach die Wand verdicken. Man kann sich namentlich bei C. agaricoides leicht von dieser Entwicklung überzeugen, da dort die Maschenreihen und die Dicke der Wand ganz regelmässig mit der Grösse des Schwammkörpers zunehmen. Bestehen aber an jugendlichen Exemplaren die dünnen Wände aus nur drei bis vier Gitterschichten, so erhalten die von der grobmaschigen Deckschicht überdachten Kammerräume zwischen den Falten eine ansehnliche Breite und schon aus diesem Grunde werden die grobmaschigen Parthieen den grössten Theil der Deckschicht zusammensetzen müssen. Die letztere spannt sich ja ziemlich lose über die gefaltete Wand aus und berührt an jungen Exemplaren kaum die dünnen, nach oben gerichteten Faltenrücken. Sie bleibt darum grobmaschig und erhält ihre feinporöse Beschaffenheit erst, wenn sich die Falten beim Weiterwachsen verdicken, mit der Deckschicht in innigen Contact treten und diese durch die überwuchernden Fortsätze der Gitterfasern verdichten.

Ist diese Auffassung richtig, so muss sie natürlich auch für C. agaricoides Gültigkeit haben. Und dafür kann ich den thatsächlichen

Beweis liefern. Im Göttinger Universitäts-Museum befindet sich das kleinste und jüngste mir bekannte Exemplar von C. agaricoides aus Ahlten mit einem grössten Durchmesser von nicht ganz 50 mm. Es ist durch seine spaltförmigen Ostien sofort als C. agaricoides zu erkennen. Die Falten der Unterseite haben sich dicht an dem runden, nach unten verjüngten Stiele gespalten, aber eine weitere Dichotomie hat nicht stattgefunden, so dass man im Ganzen nur 14 gleichstarke Falten unterscheidet. Die Deckschicht des schräg abfallenden Schirmrandes ist noch nicht verdichtet, sondern von grossen Löchern durchbohrt, sehr dünn und lässt an etwas abgeriebenen Stellen die darunter liegenden bereits regelmässig angeordneten Sechsstrahler erkennen. An diesem unzweifelhaft jungen Exemplar ist nun in der That die concave Oberseite von einer gleichmässigen grobmaschigen Deckschicht ohne alle feinporöse Bänder überzogen, so dass also die gleichmässige oder gestreifte Beschaffenheit derselben nicht zur Unterscheidung von C. agaricoides und deciminum und noch weniger zur Unterscheidung von zwei Gattungen, wie dies von Pomel geschieht, verwerthet werden kann. Coeloptychium deciminum hat so ziemlich die gleichen Dimensionen, wie C. agaricoides, nur pflegt der Rand in der Regel etwas schmäler zu sein. Das grösste Exemplar des Göttinger Museums misst am unteren Scheibenrand 115 mm. bei einer Höhe der Seitenfläche von 15 mm.

In der Beschaffenheit des Gittergerüstes finde ich keine bemerkenswerthen Verschiedenheiten von C. agaricoides. Die freien Kieselgebilde sind schwieriger zu erhalten, als von der vorigen Art, da sich das Nebengestein weder bei den Ahltener, noch bei den Vordorfern Stücken in Säure vollständig löst. Indess die wenigen untersuchten Proben lieferten mir fast alle wichtigeren Typen. Von einaxigen Nadeln sind die doppelt und einfach zugespitzten, die cylinder- und walzenförmigen vorhanden; ich kenne ferner einfache und vergabelte Vierstrahler, dreispitzige Anker, vielaxige Dactylocalyx artige Scheiben und Stelletta ähnliche strahlige Kieselscheibchen. Erhebliche Unterschiede, sei es in Grösse oder Form von den bei C. agaricoides beschriebenen, habe ich nicht wahrgenommen.

Vorkommen. Seltener als die vorige Art und wahrscheinlich auch in der Regel in etwas tieferen Schichten. Aus der Quadratenkreide

dürften die Stücke von Vordorf unfern Braunschweig und Schwiechelt bei Peine, aus der Mucronatenkreide die von Ahlten in Hannover stammen. Durch den verstorbenen Herrn Hohenegger erhielt das Münchener Museum auch zwei Stücke aus der (Quadraten-)Kreide von Kobilany und Trajanowice bei Krakau.

3. **Coeloptychium incisum.** Roem.

Taf. I Fig. 3, 4, 5.

1841. Nordd. Kr. S. 10. — 1864. Spongitarien. S. 4. — 1872. Schlüter. Die Spongitarienbänke etc. S. 17, 18 7

Tischförmig; Oberseite eben, oder nach der Mitte allmälig vertieft, manchmal auch im Ganzen concav. Deckschicht der Oberseite gleichmässig grobmaschig. Rand steil abfallend, schmal mit tiefen den Furchen der Unterseite entsprechenden Einschnitten. Falten zwanzig bis dreissig in der Regel aus zehn Primärfalten entstehend, von denen sich die meisten nur einmal, einzelne aber auch zweimal in zwei Aeste spalten. Ostien kreisrund. Stiel gefaltet oder glatt.

Obwohl diese bis jetzt noch nicht abgebildete Art durch die tiefen Randeinschnitte ein ganz eigenthümliches Aussehen erhält, woran man sie sofort erkennt, so bin ich doch im Zweifel, ob sie nicht einen Jugendzustand von C. deciminum darstellt. Denkt man sich den Schirm ganzrandig, so wird aus C. incisum ein junges C. deciminum. Diese Beziehung ist aber bedeutungsvoll, weil sie uns einen weiteren Anhaltspunkt über die Wachsthumsverhältnisse der Coeloptychien überhaupt verschafft. Die Falten der Unterseite schliessen bei C. incisum ihre den Seitenrand bildenden Enden anfänglich mit einer einfachen feinporösen Deckschicht ab, bleiben aber völlig von einer geschieden. Nach und nach breitet sich die Deckschicht nach beiden Seiten aus, ragt über die Falten heraus und verbindet sich mit der von der benachbarten Falte kommenden Ausbreitung. Diese Verbindung erfolgt zuerst am unteren Ende der Falten, so dass in diesem Stadium der Rand mit oben und unten geschlossenen Oeffnungen von spaltförmiger Form versehen ist. In diesem Stadium befindet sich das Taf. I Fig. 4 abgebildete Exemplar aus dem Göttinger Universitäts-Museum. Geht nun die Ausbreitung der Deckschicht weiter, so müssen auch diese Oeffnungen verschwinden und man hätte eine ganz geschlossene Randfläche. Ich habe keine Beweise

dafür, dass C. deciminum wirklich das Incisumstadium durchmacht und halte es darum für zweckmässig, die leicht unterscheidbare Roemer'sche Species so lange bestehen zu lassen, bis dieser Nachweis geliefert werden kann. Vielleicht würde sich damit dann auch ein weiterer Unterschied zwischen C. agaricoides und deciminum ergeben; denn bei ersterem entwickelt sich die Deckschicht des Schirms schon sehr frühzeitig zu einem geschlossenen Rand, der niemals Neigung zeigt, sich in getrennte Lappen zu zertheilen.

C. incisum Roem. gehört zu den kleinsten Arten dieser Gattung; das grösste mir bekannte Exemplar hat einen Scheibendurchmesser von 70 mm., bei einer Breite des Randes von 11 mm.

Vorkommen. Die vier mir vorliegenden Exemplare stammen aus der Mucronatenkreide von Vordorf und Ahlten. Nach F. A. Roemer auch in der Quadratenkreide von Ilsenburg am Harz; nach Schlüter in der Quadraten- und Mucronatenkreide des westfälischen Münsterlandes.

4. **Coeloptychium truncatum.** Fischer von Waldheim.

1844. Bull. soc. imp. des Naturalistes de Moscou 1844. vol. XVII. S. 278. t. VIII. 1, 2.

Das abgebildete Bruchstück deutet auf eine Form hin, welche sich von C. incisum durch ansehnlichere Grösse unterscheidet und möglicherweise damit identisch ist. Etwas sicheres lässt sich wegen der ungenügenden Beschaffenheit des aus chloritischer Kreide von Simbirsk stammenden Bruchstückes nicht sagen.

5. **Coeloptychium subagaricoides.** Sinzow.

1872. Sinzow. Ueber Jura und Kreideversteinerungen im Gouvernement Saratow. Materialy dlä Geologii Rossii. IV. 1872. pag. 49. Taf. VII. Fig. 1—4.

Schirmförmig; Oberseite eben oder vertieft, abwechselnd aus breiten feinporösen und sehr weitmaschigen Radialstreifen bestehend. Die grossen Maschen der durchbrochenen Streifen eckig oder gerundet. Seitenrand breit, zusammenhängend, wellig oder mit vereinzelten lappigen Einschnitten. Falten der Unterseite wenig zahlreich (fünf), meist nur einmal gegabelt mit sehr grossen von einem vorstehenden Rand umwallten runden Ostien. Stiel gefaltet, rund oder mehrkantig. [1])

1) Obige Diagnose wurde nachträglich nach Originalstücken, welche ich der Güte des Herrn Professor Sinzow verdanke, eingeschaltet. Der grösste Durchmesser eines vollständigen, mir vorliegenden Exemplares aus Saratow beträgt 100 mm., der Durchmesser der grossen

„Die schöne Spongie hat ziemlich regelmässige pilzförmige Gestalt und erreicht beträchtliche Grösse. Aeussere oder obere Seite bald eben, bald trichterförmig vertieft; Seitenflächen glatt, etwas gewölbt und am Umfang in Lappen getheilt, welche manchmal fast unbemerkbar sind. Unterseite immer flach, durch fünf ein- oder zweimal dichotomirende Falten in fünf Abtheilungen getheilt. Auf der Oberfläche der Falten befinden sich runde, von Wällen umgebene Oeffnungen. Der zur Befestigung bestimmte Stiel ist verlängert und variirt bedeutend in seiner äusseren Gestalt; er ist rund, viereckig, unregelmässig polygonal, einfach oder verzweigt. Anordnung der Gewebe in verschiedenen Theilen sehr verschieden. Ziemlich dicke Fäden auf der Oberfläche verwachsen in sehr unregelmässiger Weise mit einander. Die grössten Oeffnungen, welche sich in den Zwischenräumen derselben befinden, haben eckige oder gerundete Form und sind in radiale Reihen angeordnet, die sich nach der Peripherie verzweigen. Eine ähnliche unregelmässige Verwachsung von Fäden bedeckt die Seitenflächen, aber mit dem Unterschied, dass diese Flächen frei von den runden und eckigen Oeffnungen sind. Die Fäden auf der unteren Seite sind bedeutend dünner, auch ist das von ihnen gebildete Gewebe dichter und mit zahlreichen runden Oeffnungen versehen, welche regelmässiger angeordnet sind, als bei anderen Arten von Coeloptychien.

Das innere Skelet des Schwammkörpers besteht aus ähnlichen dünnen Fäden, wie das der Oberfläche. Durch die netzförmige Durchwachsung derselben entstehen rechtwinkliche Vierecke, die in Längs und Querreihen angeordnet sind. An den Kreuzungsstellen der Fäden bildet sich eine Verdickung, die manchmal mit kleinen Oeffnungen durchbohrt ist.“ (Sinzow.)

Die obige aus dem Russischen übersetzte Beschreibung Sinzow's lässt keinen Zweifel, dass wir es hier mit einer merkwürdigen, neuen Art von Coeloptychium zu thun haben, die dem westlichen Europa fehlt. Sie zeigt zugleich, dass Herr Prof. Sinzow der Rosen'schen Hypothese folgend die Coeloptychien als ursprünglich aus Hornfasern bestehend betrachtet.

Ostien auf der Unterseite, von denen in der Regel nur 3—4 auf einer Falte stehen, circa 3,5 mm. Die Mikrostruktur stimmt mit jener der übrigen Coeloptychien überein. Auch finden sich trotz der ungünstigen Erhaltung vereinzelte Nadeln zwischen den Falten.

Anmerkung während des Drucks.

Nach Sinzow ist Scyphia Eichwaldi Fisch. [1]) nur der Stiel eines sehr grossen Exemplars von C. subagaricoids. Sinz.

Vorkommen. Im oberen Kreidemergel der Gouvernement's Saratow und Simbirsk in Ostrussland.

6. **Coeloptychium Seebachi.** Zitt.

Taf. II. Fig. 5, 6, 7. Taf. III. Fig. 8, 9. Taf. V. Fig. A.

1873. ? Coeloptychium nsp. J. Ewald. Sitzgsber. der Gesellschaft naturforsch. Freunde in Berlin S. 38.

Weit trichter- bis scheibenförmig. Oberseite trichterartig, bis in den breiten Stiel hinein vertieft, mit zahlreichen abwechselnd feinporösen, etwas erhabenen und grobmaschigen, schwach vertieften Radialstreifen versehen. Maschen der durchbrochenen Streifen regelmässig viereckig, ziemlich klein. Seitenrand einfach, entweder steil abfallend und schmal, oder schräg und breit. Falten der Unterseite sehr zahlreich (36—48) durch mehrfache Dichotomie aus fünf bis sechs Primärfalten entstehend, welche bis zur Basis des Stieles verlaufen. Ostien klein, kreisrund. Stiel kurz, weit, stark gefaltet, ganz allmälig in die Scheibe des Schirms verlaufend.

Bemerkungen. Diese Art scheint gewöhnlich den ansehnlichen Durchmesser von 140—200 mm. zu erreichen, ja nach einem Fragment aus Lüneburg im Göttinger Universitäts-Museum gibt es Stücke von 280 mm. Scheibendurchmesser. Am kleinsten mir vorliegenden Exemplar des Münchener paläontologischen Museum's beträgt die Höhe des Seitenrandes 16 mm. bei einem Durchmesser von 136 mm.; ein etwas grösseres Stück besitzt einen schief abfallenden Rand von 30 mm. Höhe.

Von den bisher beschriebenen Arten unterscheidet sich C. Seebachi leicht durch die trichterartige, bis in den Stiel reichende Vertiefung der Oberseite, durch die grosse Anzahl der Falten auf der Unterseite und hauptsächlich durch den kurzen, dicken, nach oben stark erweiterten und allmälig in die Scheibe übergehenden Stiel, an dessen Basis die kräftigen Primärfalten beginnen. Wie bei den übrigen Arten tritt die Bifurcation der Falten keineswegs regelmässig ein, desshalb schwankt ihre Zahl in der Nähe des Randes auch zwischen 36 und 48. An den grössten Stücken dürften sie noch zahlreicher sein. Die kleinen runden

1) Bulletin soc. imp. des Naturalistes de Moscou 1844. vol. XVII. S. 233. t. IX. f. 1—3.

Ostien der Einströmungscanäle in der Mitte der Falten gehen bis an das untere Ende des Stieles herab. Die Deckschicht der vertieften Oberseite erinnert an C. agaricoides und deciminum; indess die Maschen der durchbrochenen Streifen sind verhältnissmässig kleiner und regelmässiger viereckig. Die feinporösen Streifen pflegen ganz schwach erhöht zu sein, ohne jedoch eigentliche Rippen zu bilden. Selbstverständlich ist die Zahl der abwechselnden Streifen, entsprechend der Zahl der Falten, grösser als bei den bisher beschriebenen Arten.

Die Maschen des Gittergerüstes der Wand haben dieselbe Grösse wie bei C. agaricoides. Auf Taf. V. Fig. A. sind zwei Maschen aus den innersten Lagen der Wand in 65facher Linearvergrösserung abgebildet.

Für die freien, in den Falten der Haldemer Exemplare massenhaft vorhandenen Kieselgebilde verweise ich statt weiterer Beschreibung auf die Tafeln.

Untersuchte Stücke: 4.

Vorkommen: In der Mukronatenkreide von Haldem und Lemförde in Westfalen und von Lüneburg.

7. **Coeloptychium princeps.** F. A. Roem.

Taf. I. Fig. 1, 2, 3, 4 und Taf. III. Fig. 7.

1874. Roem. Spongit. S. 4. t. III. fig. 1.

Schirmförmig; Oberseite trichterförmig vertieft; Deckschicht abwechselnd mit erhabenen feinporösen und vertieften grobmaschigen Radialbändern versehen. Maschen der letzteren ziemlich gross, vierseitig bis rundlich. Randfläche schief, breit, gewölbt. Unterseite am Rand mit circa 26—38 dicken, unregelmässig dichotomen Falten, die aus 6 Primärfalten des Stieles entspringen. Ostien kreisrund oder etwas länglich. Stiel mässig lang, bis an die Basis stark gefaltet, aber ziemlich bestimmt von der Scheibe geschieden.

Das prächtige Original-Exemplar F. A. Roemer's, welches ich Taf. I. Fig. 1 abermals abbilden lasse, weil die Darstellung in der Palaeontographica ein ganz falsches Bild dieser Art gibt, misst am unteren Scheibenrande 200 mm., die Seitenfläche ist 50—55 mm. breit; ein zweites Exemplar im Münchener paläontologischen Museum hat einen grössten Scheibendurchmesser von 150 mm. und eine 35 mm. hohe

Seitenfläche, deren unterer Rand etwas wellig gebogen ist. Durch die trichterartig vertiefte Oberseite, die runden Ostien auf den Falten und den tief gefalteten Stiel nähert sie sich unbedingt der vorigen Art. Der breite gewölbte, schräge Seitenrand, die dadurch verengte Oberseite und die geringere Anzahl der starken, mit fast knotiger Oberfläche versehenen Falten auf der Unterseite (selbst bei erheblich grösserem Durchmesser des Schwammkörpers), sowie deren unregelmässige Bifurcation verleihen indess der vorliegenden Art ein ziemlich abweichendes Aussehen. Die Gabelung der Falten findet am kleineren Exemplar in der Weise statt, dass sich von den zwei ersten Gabelästen einer ganz in der Nähe des Randes noch einmal spaltet, während der andere ungetheilt bleibt. Hin und wieder kommen auch ganz einfache vom Stiel zum Rand verlaufende Falten vor. Am Roemer'schen Original-Exemplar gabeln sich die meisten Doppeläste der sechs Primärfalten in vier Arme, einzelne aber bleiben auch einfach.

Auf der Oberseite ist die Zahl der Radialbänder geringer, als bei C. Seebachi; die feinporösen bilden schwach convexe ausstrahlende Rippen. Am Roemer'schen Original-Exemplar sind die maschigen Streifen breiter als die feinporösen, am andern Exemplar ist das Verhältniss umgekehrt. Die Maschen der durchbrochenen Streifen sind am kleineren Stück von ansehnlicher Grösse, unregelmässig vierseitig oder gerundet, am Roemer'schen Original kleiner und vierseitig. Charakteristisch ist die Beschaffenheit des dicken, grob gefalteten hohlen Stieles, an dessen Wänden die starken mit Ostien versehenen Primärfalten bis an das untere abgestutzte Ende herablaufen. Von seinem oberen Ende breitet sich der Schirm fast horizontal aus, so dass Stiel und Schirm deutlicher geschieden erscheinen, als bei der vorigen Art.

Das Gittergerüst zeichnet sich durch namhafte Stärke der mit wurzelartigen Fortsätzen versehenen Kieselfasern, sowie durch Octaëder mit weitem Lumen aus, durch welches man das centrale Axenkreuz besser, als bei irgend einer andern Art sieht. (Taf. III. Fig. 7.)

Unter den freien Kieselgebilden habe ich fast alle auf den Taf. IV—VII abgebildeten Formen aus dem Roemer'schen Original-Exemplar gewonnen. Neben den bei C. agaricoides, deciminum und princeps so häufigen einaxigen Nadeln, Walzen, Ankern, Vierstrahlern, Dactylocalyx artigen

Scheiben, homogenen und strahligen Kieselkugeln u. s. w. bemerkt man auch mehrere eigenthümliche Gebilde, wie die Taf. V. Fig. 11, 12 abgebildeten Stachelwalzen, das kurze beiderseits mit dickem Kopf versehene Stäbchen (Taf. V. Fig. 17) und acht- bis zehnstrahlige Kugelsterne. (ibid. Fig. 31.)

Vorkommen. Die beiden oben beschriebene Exemplaren stammen aus dem oberen Kreidemergel von Lemförde in Westfalen.

8. **Coeloptychium rude.** v. Seebach in litt.

Taf. I. Fig. 1, 2.

Tischförmig, sehr gross; Oberseite ganz eben, mit schwacher Vertiefung im Centrum. Deckschicht mit feinporösen und sehr grobmaschigen Radialstreifen. Die ersteren treten als kräftige, breite, gerundete Rippen über die vertieften Maschenstreifen hervor und verleihen der Oberfläche eine sternförmige Verzierung. Zwischen neun das Centrum erreichende Hauptrippen schieben sich je eine etwas kürzere und in der Nähe des Randes häufig noch je zwei ganz kurze kaum erhabene Streifen ein. Seitenfläche des Schirms steil, schmal, ungetheilt, mit scharfem, wellig gebogenem Oberrand. Unterseite horizontal, mit zahlreichen, durch unregelmässige Bifurcation aus neun Primärfalten entstehenden dicken Falten, deren man am Rand zwischen 30 und 45 zählt. Ostien rund. Stiel scharf vom Schirm geschieden, kurz, rund und glatt.

Diese schöne, im Göttinger Universitäts-Museum als C. rude bezeichnete neue Art erreicht den ansehnlichen Durchmesser von mehr als 200 mm. bei einem kaum 30 mm. hohen Seitenrand. Sie steht der vorigen Art sehr nahe, unterscheidet sich aber in ihrer allgemeinen Gestalt so wesentlich davon, dass ich mich nicht entschliessen konnte, beide zu vereinigen. Während bei C. princeps die Oberseite trichterförmig vertieft ist, haben wir bei C. rude eine horizontale Ebene mit seichter, kreisförmiger Einsenkung im Centrum. Die grobmaschigen Bänder zeigen bei beiden Arten gleiche Beschaffenheit, auch ragen die feinporösen als rundliche Rippen bei beiden über die Fläche hervor. Bei der vorliegenden Art sind aber sowohl die verschiedenen Bänder auf der Oberseite, als auch die Falten auf der Unterseite viel zahlreicher als bei C. Seebachi. Die horizontale Unterseite, von welcher der Stiel

scharf geschieden ist, sowie die runde Form des nur am obersten Theil gefalteten Stieles sind weitere Merkmale zur Unterscheidung unserer Art.

Vorkommen. Die vier Exemplare des Göttinger Universitäts-Museums, von welchen mir Herr Prof. von Seebach die best erhaltenen zur Untersuchung mitgetheilt hatte, stammen aus der Mucronatenkreide von Ahlten in Hannover. An einem Exemplar haben sich mehrere grosse Cranien auf der Oberseite und dem Rande des Schirms festgeheftet.

9. **Coeloptychium sulciferum.** Roem.

1841. Nordd. Br. S. 10. t. IV fig. 4. 1864. Spongit. S. 4. — 1872. Schlüter. Die Spongitarienbänke etc. S. 17.

Pilzförmig, gegen oben verschmälert; Oberseite trichterformig vertieft, mit steil nach dem Centrum einfallenden Seiten. Deckschicht aus gleichmässig maschigem Gewebe bestehend, mit sechs langen entweder schwach erhabenen oder schwach vertieften und sechs kürzeren Radien versehen, welche den zwölf Hauptfurchen der Unterseite entsprechen. Trichter der Oberseite durch einen scharfen, etwas hervorragenden Rand von den schräg abfallenden, gewölbten, breiten Seitenflächen geschieden. Seitenflächen mit welligem Unterrand, zuweilen ungetheilt, häufig aber in der oberen Hälfte mit spaltförmigen Längseinschnitten, welche dadurch entstehen, dass die Decklagen am Ende der Falten nicht vollständig mit einander verwachsen. Unterseite mit 20 bis 24 meist aus sechs hervorgehenden Falten. Ostien kreisrund. Stiel dünn, am oberen Ende gefaltet, gegen unten rund, manchmal mit wurzelartigen Anhängen.

Die Roemer'sche Abbildung gibt eine gute Vorstellung von einem jungen, wenn auch nicht gerade kleinen Exemplar dieser sehr veränderlichen Art. Das grösste mir vorliegende Stück der Schlüter'schen Sammlung misst am unteren Scheibenrand 95 mm., die Seitenflächen sind etwa 30 mm. hoch. Wären die spaltförmigen Einschnitte immer in der Weise vorhanden, wie sie Roemer zeichnet, so machte die Erkennung von C. sulciferum nicht die geringste Schwierigkeit. Ich halte diese Bildung jedoch lediglich für ein jugendliches Entwicklungsstadium, was auch daraus hervorgeht, dass die Falten der Wand am Seitenrand

des Schirmes noch deutlich durchschimmern. An älteren Stücken schliessen sich die Oeffnungen: es bleiben dann an Stelle der Durchbrüche nur vertiefte Rinnen übrig, die mit fortschreitender Verdichtung der Deckschicht immer schwächer werden. Ganz vereinzelt kommen zuweilen auch Einschnitte in den Seitenflächen vor, welche die ganze Breite der Seiten wie bei C. incisum durchschneiden.

Ganz abgesehen von dieser veränderlichen Beschaffenheit der Seitenflächen ist C. sulciferum leicht kenntlich an der etwas verengten, trichterförmig vertieften, gleichmässig grobmaschigen Oberfläche und an dem breiten, schräg abfallenden gewölbten Seitenrand. Unter den freien Kieselgebilden fallen Sechsstrahler mit einer sehr stark verlängerten Axe durch verhältnissmässig häufiges Vorkommen auf. (Taf. V. Fig. 37). Anker und Vierstrahler dagegen sind ziemlich spärlich vorhanden.

Vorkommen. Das Roemer'sche Original-Exemplar, ist aus der Quadratenkreide von Ilsenburg. Demselben Horizont entstammt ein Exemplar des Göttinger Museums vom Galgenberg bei Wernigerode. Aus der westfälischen Mucronaten- und Quadraten-Kreide erhielt ich von Herrn Prof. Schlüter mehrere Stücke von Darup und Coesfeld zur Untersuchung, von Herrn Grotrian eines aus Vordorf bei Braunschweig und schliesslich eines durch Herrn von Seebach aus Ahlten.

10. **Coeloptychium lobatum.** Goldf.

1826—33. Petrefacta Germaniae I. S. 220. t. LXV. fig. 11. — 1838. Bronn. Lethaea geogn. II. S. 594. t. 29. fig. 4. — 1841. F. A. Roemer Nordd. Kr. S. 10. — 1864. F. A. Roemer: Spongitarien. S. 4. Taf. II. Fig. 12. — 1872. Lophoptychium lobatum und inaequale. Pomel. Paléontologie d'Oran. S. 69. — 1872. C. lobatum Schlüter. Die Spongitarien-Bänke etc. S. 17.

Pilzförmig. Oberseite mehr oder weniger verengt, bis in den Stiel tief trichterförmig eingesenkt, mit sehr steil einfallenden Wänden, die von gleichmässigem Maschengewebe bedeckt sind. Zuweilen einige schwach vertiefte Radialfurchen vorhanden. Rand des Trichters scharf, vorstehend. Die breiten, schrägen, gewölbten Seiten bilden keine zusammenhängende Fläche, sondern werden durch die äusseren, geschlossenen Enden der vollkommen getrennten Falten gebildet und zerfallen dadurch in fünf starke, meist schon am Oberrande dichotome Falten, deren neun oder zehn durch gleichbreite, bis in die Mitte reichenden Zwischenräume geschiedene Lappen sich öfters

in der Nähe des Unterrandes nochmals durch Bifurcation verdoppeln. Eine Deckschicht von besonders dichter Struktur ist an den die Seiten des Schirms bildenden Flächen nicht vorhanden, sondern die Falten sind allseitig von einer gleichmässigen porösen Oberflächenschicht umgeben. Auf der Unterseite verlaufen die Falten in vollständig horizontaler Richtung nach dem oben gefalteten, weiter unten runden, verlängerten Stiel. Die kreisrunden Ostien stehen in geringer Zahl und in ziemlich beträchtlicher Entfernung in einer Reihe auf der Unterseite der Falten.

Das grösste etwas verkrüppelte Exemplar der Schlüter'schen Sammlung misst am unteren Rand 100 mm., die übrigen schwanken zwischen 70 und 80 mm. Die lappigen Seitenflächen können bis 45 mm. breit werden.

Unter allen Coeloptychien-Arten ist dies die variabelste. Von sechs mir vorliegenden Stücken aus Vordorf, Coesfeld, Ahlten und Legden gleicht keines dem anderen vollständig. Dennoch bin ich geneigt, alle ein und derselben Art zuzuschreiben, da ich keine bestimmten Grenzen zwischen denselben aufzufinden vermag. Angesichts der ausserordentlich abweichenden Abbildungen von Goldfuss und Roemer mag diese Auffassung gewagt erscheinen, allein meine vorliegenden Exemplare beweisen, dass die beiden Autoren zufällig gerade die extremsten Varietäten dargestellt haben. Die Goldfuss'sche Figur zeigt ein Exemplar mit weitem Trichter der Oberseite, schmalen Seiten und breiten vom oberen Rande an dichotomen Falten; Roemer dagegen zeichnet ein Stück aus Ahlten (dessen Original mir vorliegt), mit ganz ungewöhnlich engem Trichter und sehr breiten Seiten, deren dichotome Falten sich in der Nähe des Unterrandes zum Theil in zwei Lappen vergabeln. Zwischen diesen beiden Grenzformen lassen sich die von mir untersuchten Exemplare sehr gut einfügen, doch will ich die Möglichkeit einer Zerlegung des Coeloptychium lobatum in mehrere Arten durch einen späteren, mit reicherem Material versehenen Bearbeiter nicht in Abrede stellen.

Dass unsere Art zu keiner besonderen Gattung gehört, wie Pomel vorschlägt, beweisen die äussere Form, die ganze Organisation und die feineren Strukturverhältnisse. Denkt man sich an C. incisum die Ober-

seite vertieft, die Seitenflächen verbreitet, so erhält man eine der vorliegenden Art ziemlich ähnliche Gestalt.

Was die Struktur betrifft, so stimmt sowohl der feinere Bau des Gittergerüstes, als auch jener der Deckschichten vollständig mit den übrigen Coeloptychien überein. Die Gitterfasern zeichnen sich (wie aus Taf. III Fig. 12 zu ersehen) lediglich durch ihre schlanke, zierliche Form aus.

Damit contrastiren nun die isolirten Kieselgebilde durch ihre plumpe Gestalt in auffallender Weise. Keine Species besitzt grössere Einstrahler und mächtigere Anker als C. lobatum, auch die reichlich vorkommenden irregulären Gebilde mit kurzem Axenkreuz zeichnen sich durch Grösse aus. Im Allgemeinen besitzt indess C. lobatum fast alle typischen Kieselkörper der übrigen Arten.

Vorkommen. In der Mucronatenkreide von Ahlten in Hannover, Vordorf bei Braunschweig und Coesfeld in Westfalen; ferner in der Quadratenkreide von Coesfeld, Holtwik und Legden in Westfalen. Ueberall ziemlich selten.

Ausser den bereits erörterten Coeloptychium-Arten findet sich in F. A. Roemer's norddeutscher Kreide S. 10. t. IV. fig. 6 noch die Beschreibung eines Coelopt. alternans, welches auch in den Spongitarien der nordd. Kr. S. 4 aufrecht erhalten wird. Durch die Güte des Herrn Director von Groddeck erhielt ich aus der Sammlung der Clausthaler Berg-Akademie ein von der Hand F. A. Roemer's als C. alternans bezeichnetes Exemplar von Peine, welches wahrscheinlich den Original-Typus der Art darstellt, obwohl es weder mit der Abbildung noch mit der Beschreibung sonderlich im Einklang steht. Abgesehen von zwei kleinen Fragmenten ist es indess Alles, was in der Sammlung von Clausthal unter dem Namen C. alternans vorliegt, und auch in anderen norddeutschen Museen befindet sich Nichts, was besser auf die genannte Abbildung passte. Die Untersuchung des grösseren Originalstückes lässt keinen Zweifel an dessen Zugehörigkeit zur Gattung Becksia Schlüt. Die mit Stacheln versehene Basis ist zwar abgebrochen, allein immerhin ist noch der Ansatz eines der höchst stehenden Stacheln erhalten.

Wenn man schon schwer begreift, wie der Zeichner nach dem vorhandenen Original Fig. 6a herstellen konnte, so ist die restaurirte Fig. 6g geradezu ein Phantasiegebilde. Möglicher Weise ist das ursprüngliche Original verloren gegangen; da aber das in Clausthal befindliche Stück jedenfalls von F. A. Roemer selbst zu Coeloptych. alternans gerechnet wurde, so wird man dieses vorläufig als Typus der Art ansehen dürfen und darnach ist C. alternans jedenfalls aus der Gattung Coeloptychium zu entfernen.

Ueberblickt man schliesslich die geographische und zeitliche Vertheilung der verschiedenen Coeloptychien-Arten, so ergibt sich, dass von den zehn angeführten Formen acht: C. agaricoides Goldf., C. incisum Roem., C. princeps Roem., C. Seebachi Zitt., C. rude Seeb., C. sulciferum Roem. und C. lobatum Goldf. bis jetzt auf das nordwestliche Deutschland und zwar auf Westfalen, Hannover und Braunschweig beschränkt sind.

Coel. deciminum Roem. hat sich überdies auch in der Gegend von Krakau gefunden. Zwei Arten C. truncatum Fisch. und C. subagaricoides Sinzow gehören ausschliesslich dem südöstlichen Russland an.

Beschränkt wie die geographische Verbreitung, scheint auch die zeitliche Lebensdauer der Coeloptychien gewesen zu sein. Sämmtliche Arten gehören der oberen Kreide (dem Senonien d'Orbigny's) an und zwar liegt ihre Hauptentwicklung in Norddeutschland an der Grenze von Quadraten- und Mucronatenkreide. In Vordorf bei Braunschweig finden sie sich in den untersten Schichten der Mucronatenkreide, ungefähr im gleichen Lager bei Haldem, Lemförde, Sökerkook bei Coesfeld und Darup in Westfalen. Die Stücke von Ahlten gehören ebenfalls den Grenzschichten von Quadraten- und Mucronatenkreide an; bei Lüneburg liegen sie in Mucronatenkreide, bei Schwiechelt, Ilseburg, Wernigerode in Hannover in dem oberen Theil der Quadratenkreide. Nach Schlüter kommen die vier in der Mucronatenkreide des Münsterlandes nachgewiesenen Coeloptychien-Arten (C. agaricoides, incisum, lobatum, sulciferum) auch in der oberen Quadratenkreide von Legden, Holtwik und Coesfeld vor.

In älteren Kreideschichten kennt man bis jetzt keine Spongien, aus welchen man sich die Coeloptychien könnte entstanden denken und ebenso wenig haben sie Nachkommen in die Tertiär- oder Jetztzeit überliefert.

Soweit sich die Thatsachen gegenwärtig übersehen lassen, besitzt die Gattung Coeloptychium in räumlicher, zeitlicher und systematischer Hinsicht eine Begrenzung von seltener Schaerfe.

Die Ablagerungen, welche die Coeloptychien-Reste enthalten, bestehen theils aus reiner Schreibkreide, theils aus thonigem Kreidemergel und erweisen sich ebensowohl durch ihre lithologische Beschaffenheit, als durch ihre fossilen Ueberreste als Absätze eines tiefen Meeres. Zum gleichen Ergebniss führt auch der Vergleich mit der nächst verwandten lebenden Gattung Farrea, welche nach Bowerbank in Tiefen von 800—1000 Faden vorkommt. (Von Myliusia und Eurete sind die Lebensbedingungen unbekannt.)

Man wird demnach die wundervoll gebauten Schwammkörper der Coeloptychien wohl mit Fug und Recht gleichfalls als die Reste ächter Tiefseebewohner der Vorzeit betrachten dürfen.

Erklärung der Tafeln.

(Die Abbildungen auf Taf. I und II sind, wofern nicht besonders bemerkt, in natürlicher Grösse, die freien Kieselgebilde auf Taf. IV—VII in 100facher Vergrösserung dargestellt; bei den Abbildungen auf Taf. III ist die Vergrösserung angegeben.)

Taf. I.

Fig. 1. 2. Coeloptychium rude. Seeb. aus der Mucronatenkreide von Ahlten in Hannover (etwas verkleinert). Original im Göttinger Universitäts-Museum.

Fig. 3. 4. 5. Coeloptychium incisum. Roem. aus der Mucronatenkreide von Vordorf bei Braunschweig. Das Orig. zu Fig. 4 im Göttinger Universitäts-Museum, jenes zu Fig. 3 und 4 im Pal. Mus. zu München.

Fig. 6. Coeloptychium deciminum. Roem. aus der Quadratenkreide von Kobilany bei Krakau. Horizontaldurchschnitt des Schirms. P. M. M.

Fig. 7. Coeloptychium deciminum. Roem. von Trajanowice bei Krakau. Vertikaldurchschnitt des Schirms. P. M. M.

Taf. II.

Fig. 1. 2. Coeloptychium princeps. Roem. aus der Mucronatenkreide von Haldem. 1 von der Seite 2 von unten in natürlicher Grösse nach F. A. Roemer's im Hildesheimer Museum befindlichen Original-Exemplar.

Fig. 3. Coeloptychium princeps. Unterseite eines kleineren Exemplars. P. M. M.

Fig. 4. „ „ Ein Stück der Oberseite. P. M. M.

Fig. 5. 6. Coeloptychium Seebachi. Zitt. von Haldem. P. M. M.

Fig. 7. Coeloptychium Seebachi. von Haldem. Original im Göttinger Universitäts-Museum.

Taf. III.

Fig. 1. Innere Wandung einer Falte oder Seitenwand einer Radialkammer von C. agaricoides Goldf. aus Haldem. 36 mal vergr.

Fig. 2. Grobmaschige Deckschicht der Oberseite von C. deciminum aus Schwiechelt. Die breiten löcherigen Bänder sind die concentrischen Rippen, welche durch dichte Transversalstäbe verbunden werden. 32 mal vergrössert.

Fig. 3. Feinporöse Deckschicht des seitlichen Schirmrandes von C. princeps aus Haldem mit durchschimmernden, in der Bildung begriffenen Sechsstrahlern. 36 mal vergrössert.

Fig. 4. Aeussere Oberfläche eines Faltenrückens der Unterseite von C. agaricoides. 40 mal vergrössert.

Fig. 5. Aus einem feinporösen Radialstreifen der Oberseite von C. agaricoides von Vordorf. Die kleinen dunkeln Punkte zwischen den Löchern deuten die feinen Spitzen an. 36 mal vergrössert.

Fig. 6. Gittergerüste des Stiels von C. agaricoides aus Haldem. 45 mal vergrössert.

Fig. 7. Ein Octaëdrischer Knotenpunkt aus dem Gerüste von C. princeps mit deutlich sichtbarem Axenkreuz. 64 mal vergrössert.

Fig. 8. 9. Gittergerüst von C. Seebachi. Zitt. aus Haldem. 47 mal vergrössert.

Fig. 10. Feinporöse Deckschicht des seitlichen Schirmrandes von C. agaricoides aus Vordorf. 36 mal vergrössert.

Fig. 11. Gittergerüst von C. agaricoides aus Vordorf. 47 mal vergrössert.
Fig. 12. „ „ C. lobatum. Goldf. aus Coesfeld. 47 mal vergrössert.
Fig. 13. Ein Stück der Unterseite des Schirms von C. agaricoides aus Vordorf, natürl. Gr.

Taf. IV.

Fig. A. Innere Wand einer Falte (Seitenwand einer Radialkammer) von C. agaricoides aus Vordorf. 28 mal vergrössert.
Fig. 1—15. Spiessförmige, doppelt zugespitzte Stabnadeln.
Fig. 1 aus C. agaricoides von Vordorf.
Fig. 2. 3. C. Seebachi von Haldem.
Fig. 4. C. lobatum von Coesfeld.
Fig. 5. C. agaricoides. Vordorf.
Fig. 6. C. princeps. Haldem.
Fig. 7—15. Kleinere Stabnadeln aus C. agaricoides, Seebachi und princeps aus Vordorf und Haldem.
Fig. 16—21 junge, seitlich offene Nadeln aus verschiedenen Arten.
Fig. 22—24 mehrere junge Nadeln aneinander gereiht.
Fig. 25. 26. S förmig gebogene Stabnadeln aus C. agaricoides.
Fig. 27. 27 A u. 28. Klammern (Esperites Carteri) aus C. agaricoides von Vordorf u. Haldem.
Fig. 29. Grabscheitartiger Doppelanker (Esperites Carteri) Haldem.
Fig. 30—38. Kurze, doppelt zugespitzte Nadeln aus verschiedenen Arten. Haldem, Vordorf, Coesfeld.
Fig. 39—50. Walzenartige, beiderseits stumpfe Nadeln mit rauher Oberfläche, meist ohne Canal.
Fig. 51—66. Kugelige, eiförmige, keulenförmige und cylindrische Gebilde aus dichter homogener Kieselsubstanz.

Taf. V.

Fig. A. Gittergerüst von C. Seebachi aus Haldem. 65 mal vergrössert.
Fig. 1—10. Stabnadeln an einem Ende abgerundet, am andern zugespitzt (5 aus C. lobatum, die übrigen aus C. agaricoides, Seebachi u. princeps).
Fig. 11. 12. Dornige Walzen aus C. princeps u. agaricoides.
Fig. 13. Dornige Nadel aus C. lobatum.
Fig. 14—16. Desgl. aus C. agaricoides von Haldem und Vordorf.
Fig. 17. Doppelköpfige Nadel aus C. princeps.
Fig. 18—26. Stelletta ähnliche strahlige Kieselscheiben aus C. agaricoides, deciminum, Seebachi, princeps und lobatum.
Fig. 27—30. Geodia ähnliche strahlige Kieselkugeln aus verschiedenen Arten.
Fig. 31. Vielaxige Kieselkugel von Haldem.
Fig. 32—35. Dactylocalyx ähnliche vielaxige Scheiben.
Fig. 36—46. Verschiedene Sechsstrahler z Th. mit einem verkümmerten Strahl.
Fig. 47—50 Schirmnadeln aus C. agaricoides u. Seebachi.
Fig 51—55. Verschiedene Vierstrahler aus Haldem, Vordorf u. Coesfeld.
Fig. 56. 57. Anker mit 6 Widerhaken aus C. agaricoides. Vordorf.

Taf. VI.

Fig. 1. 2. Vierstrahler mit einem verlängerten Arm.
Fig. 3—7. 9. 10. Anker mit 3 Zinken. Vordorf u. Haldem.
Fig. 8. Anker mit 3 gegabelten Zinken. Haldem.
Fig. 9. 10. Anker mit 3 abwärts gerichteten Zinken. Haldem.
Fig. 11—15. Anker mit 3 Widerhaken. Haldem u. Vordorf.

Fig. 16—18. Achtstrahlige Sterne (ein Strahl ist der Regel abgebrochen).
Fig. 19—26 Anker mit drei gegabelten Armen (Siebenstrahler) aus verschiedenen Arten.
Fig. 27. Ungewöhnlich plumper Anker. C. lobatum.
Fig. 28. 29. 30. Anker von unregelmässiger Form. Aus C. agaricoides u. deciminum.
Fig. 31. Kieselscheibe mit dreifach gegabeltem Axencanal. C. agaricoides.

Taf. VII.

Fig. 1—8. Anker mit 3 gegabelten Zinken. Vordorf, Haldem, Coesfeld.
Fig. 9—10. Anker mit 3 wurzelartig verzweigten Zinken. C. agaricoides u. Seebachi von Haldem.
Fig. 11—25. Unregelmässige Nebenformen der vierstrahligen Sterne mit kurzen Centralkanälen. Haldem, Vordorf, Coesfeld.
Fig. 26—31. Unregelmässige Nebenformen der Siebenstrahler mit 3 gegabelten Armen. Haldem, Vordorf, Coesfeld, Schwiechelt.
Fig. 32—37. Unregelmässige Kieselgebilde. Haldem, Vordorf.



1.

3.

4

2

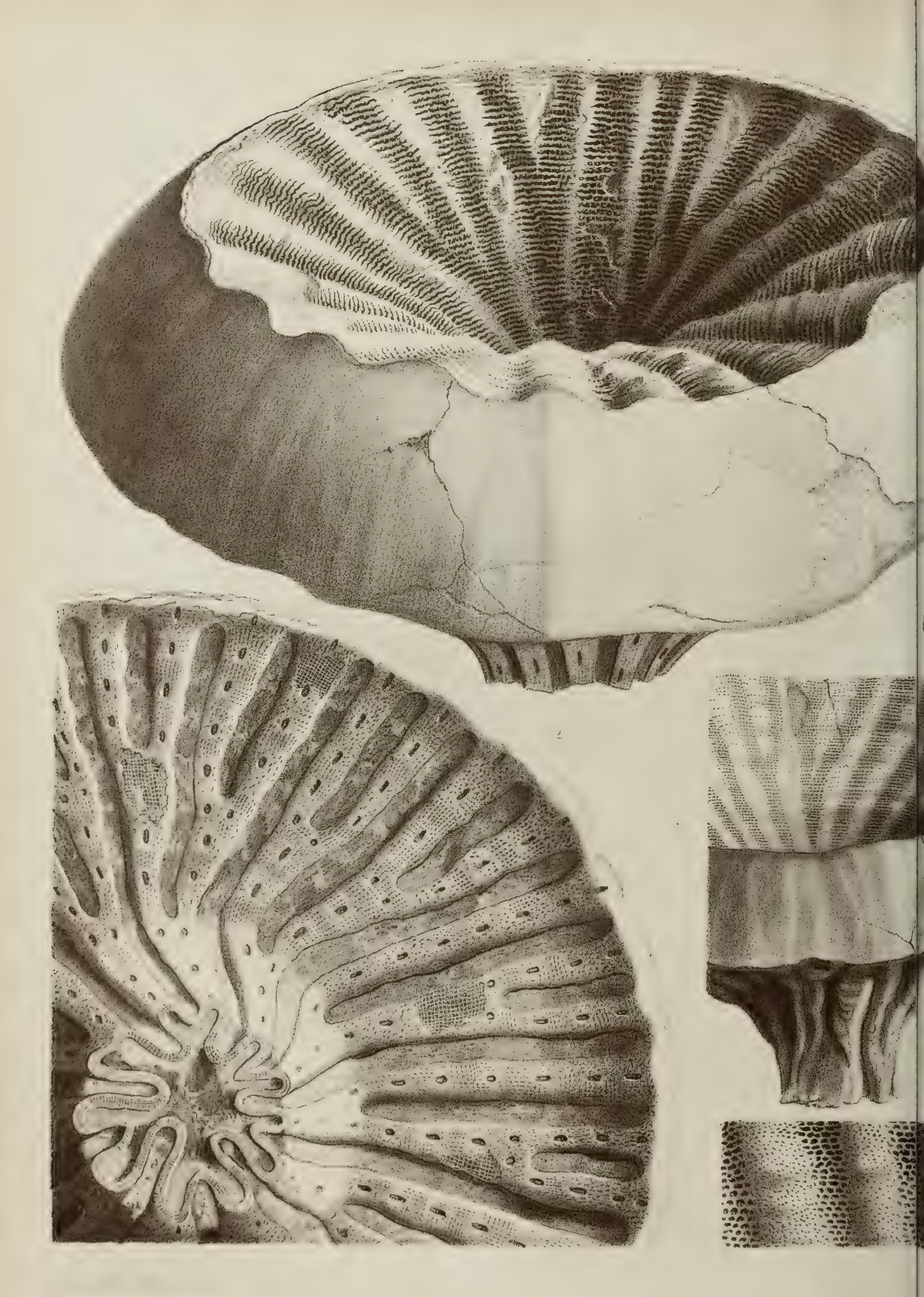
6.

5.

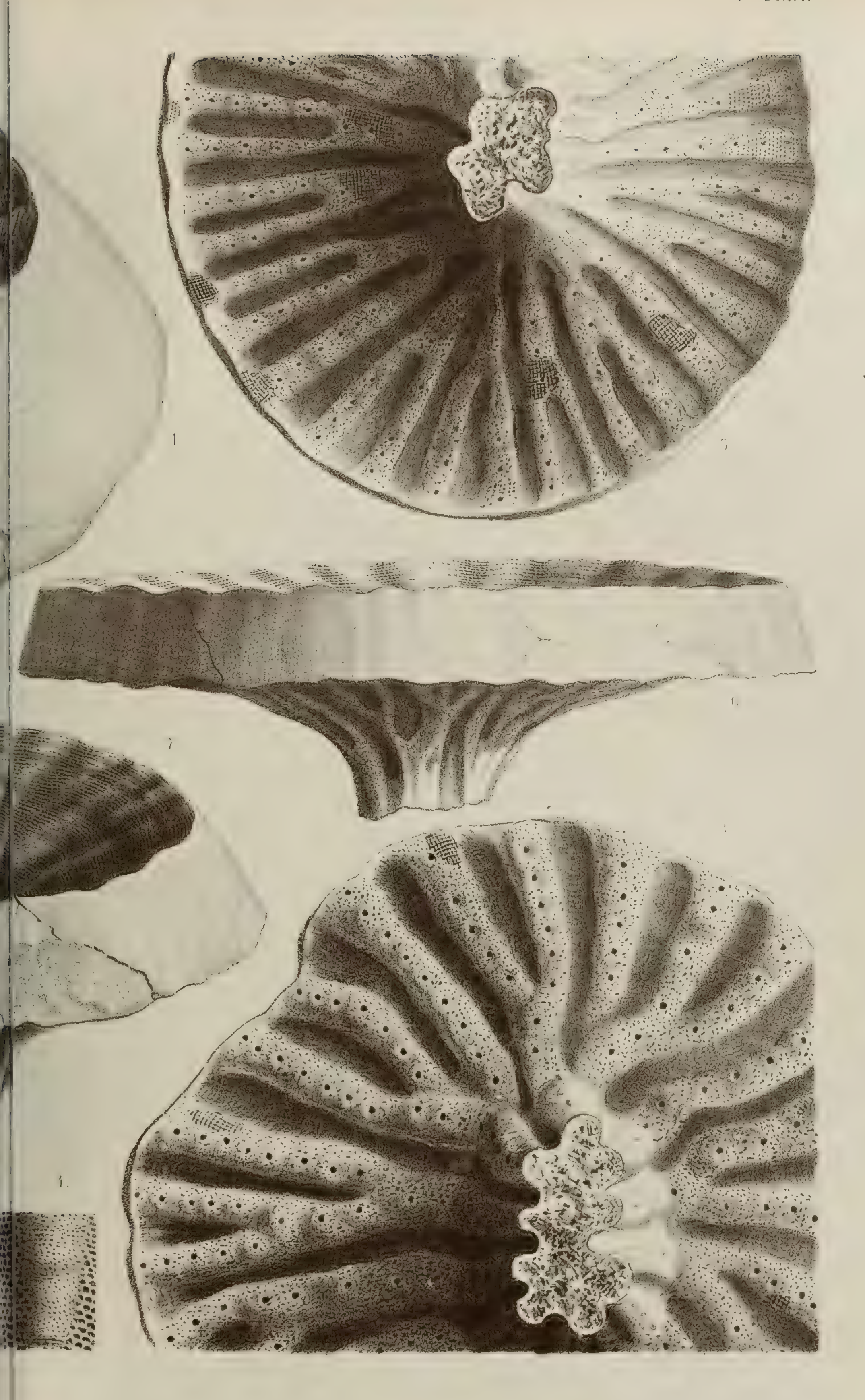
7.

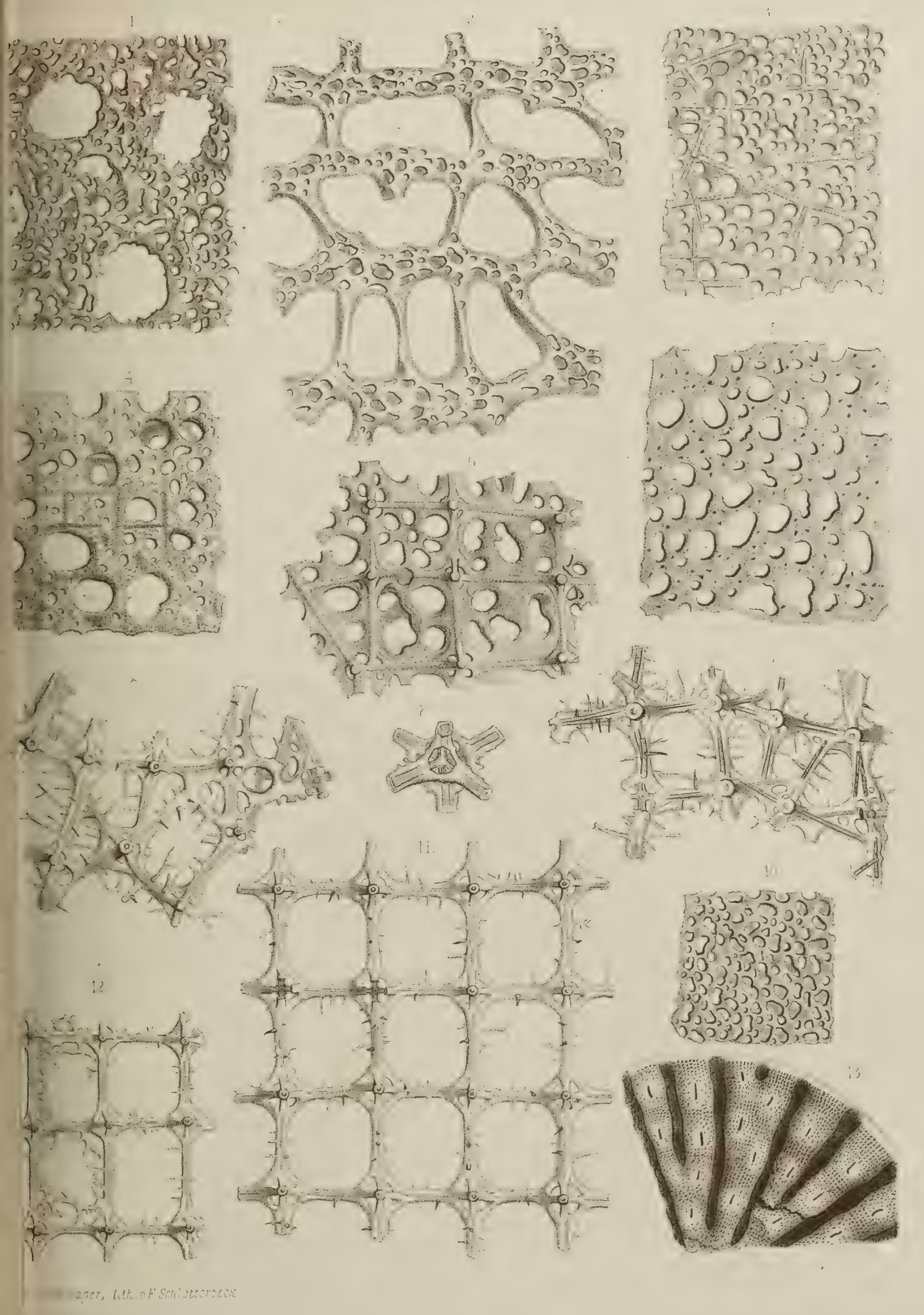



NATURAL HISTORY



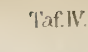
Math. phys. Cl. XII. III.


1
5
6
7
3.



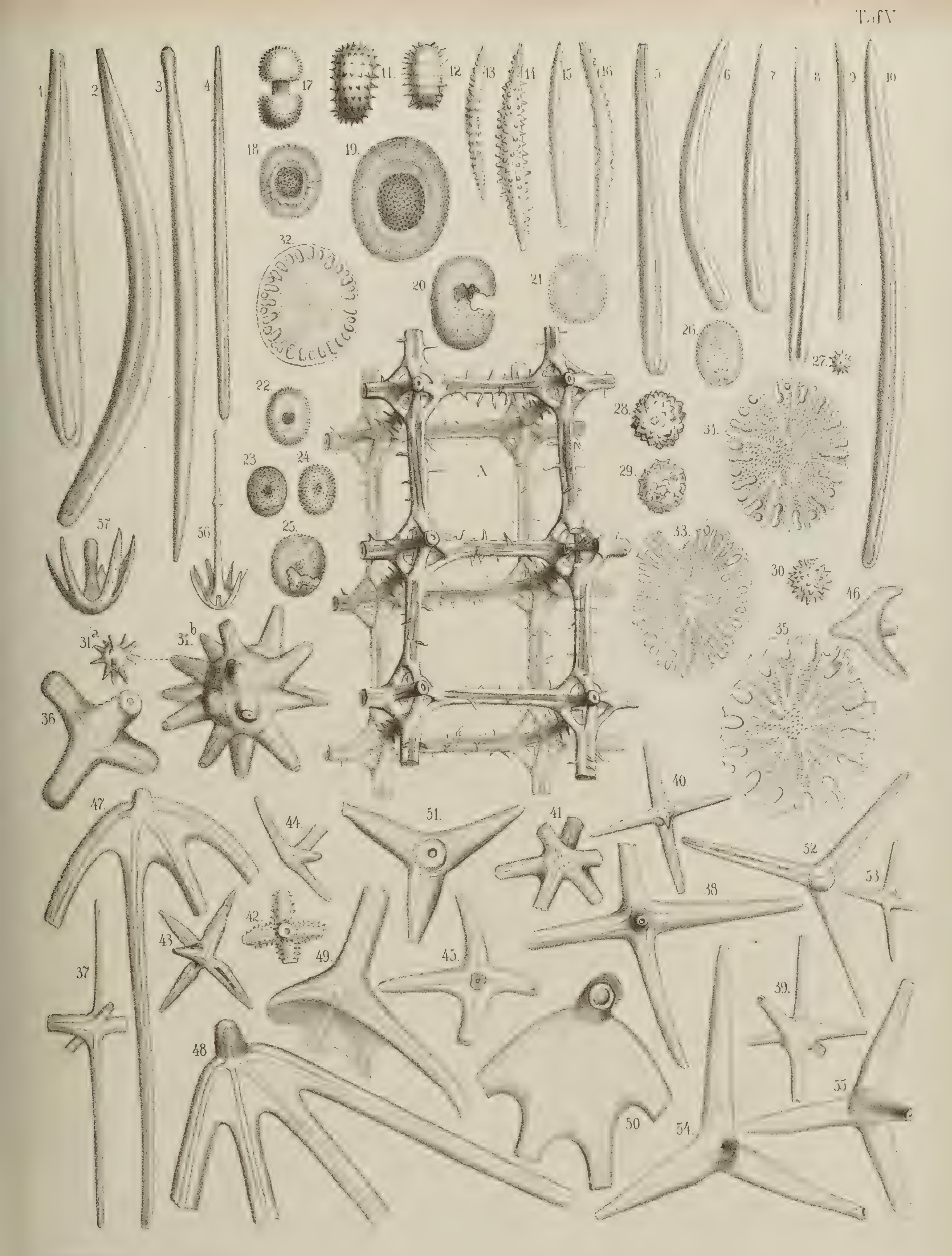
aeger, lith. v. F. Schlotterbeck


NATURAL H.STORY

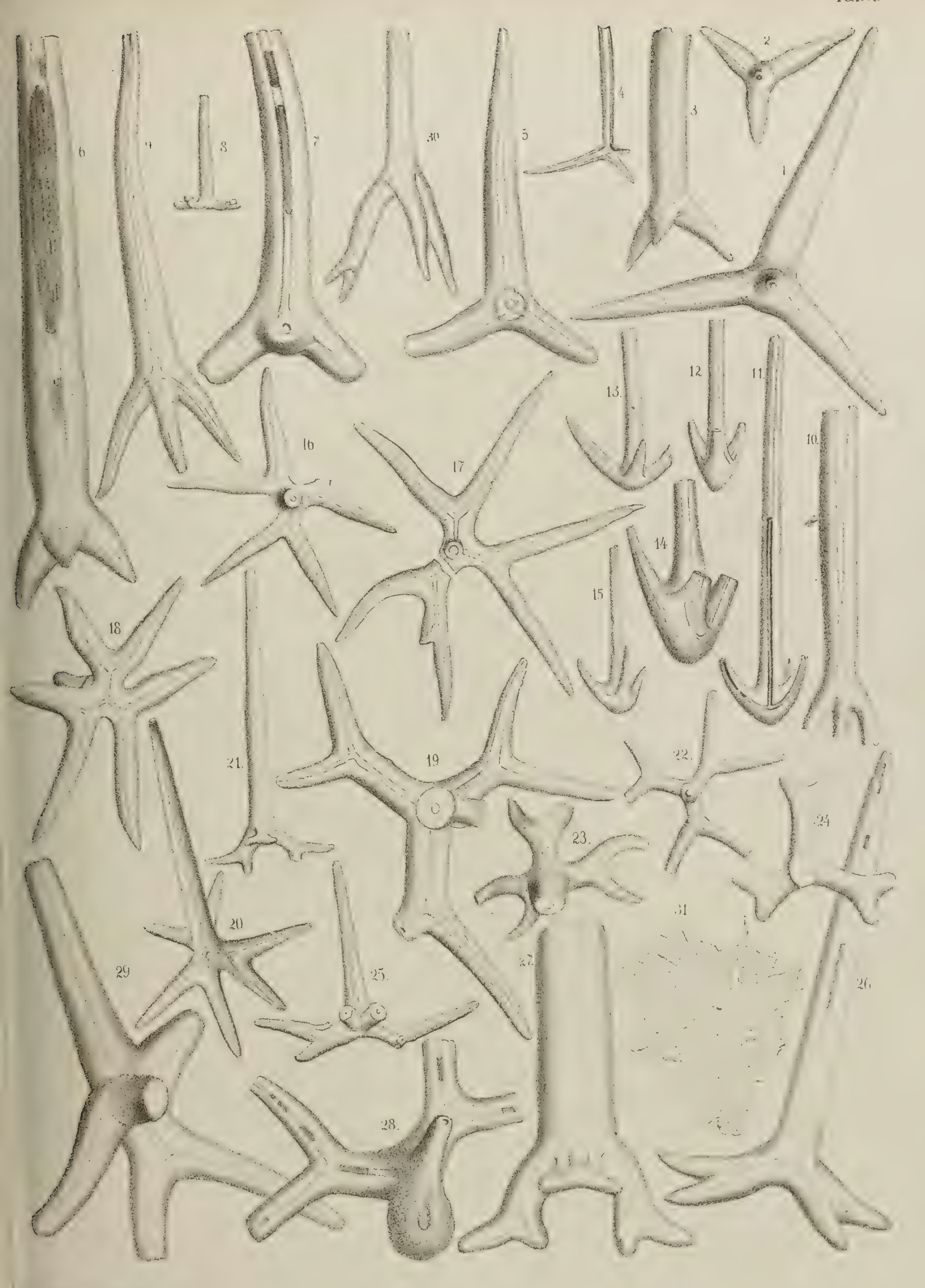


gez. v. Schwager. lith. v. F. Schlotterbeck


NATURAL HISTORY



gez. ... lith. v. F. Schlotterbeck



... Schlotterbeck.





lith. v. F. Schlotterbeck.

Das

Bayerische Präcisions-Nivellement.

Vierte Mittheilung

von

Carl Max v. Bauernfeind.

Ergebnisse

des in

Verbindung mit der Europäischen Gradmessung in Bayern

ausgeführten

Präcisions-Nivellements.

Vierte Mittheilung

von

Carl Max v. Bauernfeind.

Zu der hier vorliegenden vierten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement habe ich nur wenig Allgemeines zu bemerken. Sie umfasst ausser den Vorarbeiten zur Ausgleichung des ganzen Bayerischen Höhennetzes erster Ordnung die in den Jahren 1874 und 1875 ausgeführten Beobachtungsarbeiten und schliesst sich genau an die dritte Mittheilung vom Jahre 1874 an, welche in den Abhandlungen der mathematisch-physicalischen Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften und zwar in Band XI, Abtheilung III, Seite 141 bis 174 und auch als Separatabdruck veröffentlicht wurde.

Die Beobachtungen wurden im Jahre 1874 von den Assistenten Herrn A. Rieppel, der schon in den Vorjahren verwendet war, und Herrn O. Decher, der neu eintrat, im Jahre 1875 aber von letzterem allein gemacht, und bei den Rechnungen war wie bisher der Hilfsrechner Hesselbarth betheiligt. Es ist also seit acht Jahren durch den Wechsel der Beobachter und Rechner die Stetigkeit in der Ausführung des Messungs- und Rechnungsverfahrens nicht unterbrochen worden, da jeder neue Assistent wenigstens ein Jahr lang mit einem älteren zusammenarbeitete

und das Gehilfenpersonale bis auf zwei Mann das nämliche blieb. Unter diesen Umständen darf unbedenklich angenommen werden, dass sich auch die Genauigkeit der Beobachtungen nicht verändert habe.

Der bisherigen Uebung gemäss werde ich über die Messungs- und Rechnungsarbeiten der beiden letzten Jahre in derselben Reihenfolge berichten, welche in den vorausgegangenen drei Mittheilungen eingehalten worden ist.

Uebersicht der Nivellementsarbeiten von 1874 und 1875.

Im Jahre 1874 waren die Herren Rieppel und Decher vom 24. August bis 18. October auswärts beschäftigt, und von deren 57 Reisetagen konnten 37 auf Beobachtungen verwendet werden. Diese reichten hin, um die Bahnstrecken Geiselhöring-Passau-Landesgrenze mit 98,5 Kilometer, dann Simbach Haidhausen nebst den Zweignivellements Haidhausen-Sternwarte, Haidhausen - Oberföhring (westliche Basispyramide) und Schwaben-Erding - Aufkirchen (östliche Basispyramide) in einer Länge von 136,0 Kilometer doppelt zu nivelliren. Auf diesen Strecken, welche zusammen 234,5 Kilometer lang sind, wurden 118 Fixpunkte angebracht. Davon sind 21 in massive Umfassungsmauern von Gebäuden eingelassen und mit metallenen Höhenmarken (⊙) versehen, die übrigen sind in Brücken, Durchlässe, Stütz- und Futtermauern u. dgl. eingehauen und entsprechend bezeichnet. Das geometrische Nivellement der Strecke von 234,5 Kilometer erforderte 1932 Aufstellungen der beiden Instrumente, wesshalb die mittlere Zielweite 60,1 Meter betrug. Dieses Mittel weicht von jenen der Vorjahre, wo es zwischen 60 und 66,5 Meter schwankte, nicht wesentlich ab. Die Tagesleistung der beiden Ingenieure, welche das Nivellement ausführten, berechnet sich daher für jeden der 37 Arbeitstage auf 6,3 Kilometer, während sie in früheren Jahren zwischen 4,8 und 6,7 Kilometer sich bewegte.

Im Jahre 1875 hat Herr O. Decher mit einem einzigen Instrumente die Arbeiten am 19. August begonnen und mit einer Unterbrechung von 4 Tagen bis zum 5. October fortgesetzt. Hieran reihten sich sodann am 8. October die Bestimmung der Höhenlage zweier Fixpunkte in der k. Sternwarte zu Bogenhausen, am 14. desselben Monats diejenige der inneren Endpunkte der altbayerischen Basis in den massiven Pyramiden bei

Oberföhring und Aufkirchen, und schliesslich noch zu Ende October die Uebertragung der in der zweiten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement auf Seite 19 unter Nr. 653 angeführten Höhenmarke von dem alten zum Abbruch bestimmten Betriebsgebäude in Neu-Ulm an das vollendete neue Stationsgebäude dortselbst. Mit dieser Arbeit wurde die Herstellung eines Hauptfixpunktes am Münster in Alt-Ulm verbunden. In der Zeit vom 19. August bis zum 5. October hat Herr O. Decher 24 Tage auf die Beobachtungen verwendet, und zwar in der Art, dass er zuerst von Salzburg aus längs eines Theils der Giselabahn, dann über die Salzachbrücke durch die Vorstadt Nonnthal auf der Reichsstrasse nach Berchtesgaden und von hier bis zum Ausfluss der Königsache aus dem Königssee nivellirte, um einige Hauptfixpunkte an diesem See und am Gebirge zu bestimmen. Am 9. September wurde ein Zweignivellement von der Eisenbahnstation Prien bis an den Wasserspiegel des Chiemsees hergestellt und am darauf folgenden Tage mit dem Nivellement der Strecke Simbach-Passau, welche die letzte Seite in dem Polygon München-Geiselhöring-Passau-Simbach-München bildete, begonnen. Dieses Nivellement musste wie jenes nach Berchtesgaden und an den Königssee grösstentheils auf Staats- und Districtsstrassen ausgeführt worden. Die eben genannten Strecken haben zusammen eine Länge von 94,5 Kilometer. Es wurden also in den beiden Jahren 1874 und 1875, über welche sich dieser Bericht erstreckt, zusammen 329 Kilometer doppelt nivellirt und folglich beträgt die Gesammtlänge aller doppelt nivellirten Linien des Bayerischen Präcisionsnivellements:
1850,4 + 329,0 = 2179,4 Kilometer oder 293,72 geographische Meilen.

Zur Herstellung der Strecken von 94,5 Kilometer Länge waren 912 Instrumentenaufstellungen nothwendig und wurden 44 horizontal abgearbeitete Flächen als Fixpunkte zubereitet und 9 metallene Höhenmarken (⊙) in massive Mauern eingelassen. Die Zahl der Fixpunkte beträgt somit auf diesen Strecken 53 und die mittlere Zielweite 51,8 Meter. Diese geringere Zielweite erklärt sich aus den grösseren Steigungen und schärferen Krümmungen, sowie aus der staubigen Atmosphäre der Strassen, auf denen beobachtet werden musste. Es beträgt daher auch die durchschnittliche tägliche Leistung nur 3,9 Kilometer. Wie sehr die Beschaffenheit der Nivellements-Tracen, die Witterung und der Ver-

kehr auf die tägliche Leistung der Ingenieure Einfluss haben, mag man aus der Bemerkung abnehmen, dass unter den günstigsten äusseren Umständen (namentlich bei Windstille und bedecktem Himmel) im Jahre 1874 einmal eine Maximalleistung von 11 Kilometer mit 2 Instrumenten auf einer Eisenbahn und im Jahre 1875 einmal eine solche von 6 Kilometer mit 1 Instrument auf einer Staatsstrasse erreicht wurde.

Der Nivellirapparat.

Der in der ersten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement beschriebene Nivellirapparat war, mit Ausnahme einer neuen Latte, welche an die Stelle einer alten zerbrochenen treten musste, und worüber bereits in der dritten Mittheilung (Seite 6) berichtet wurde, auch in den Jahren 1874 und 1875 unverändert geblieben. Die nominelle Meterlänge beträgt demnach, je nachdem bei den Beobachtungen die Latten Ia, II, III oder Ia', III abgelesen wurden,

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{Ia}' + \mathrm{II}) = 1\overset{\mathrm{m}}{,}000151 \text{ bei } + 14\overset{\circ}{,}2 \text{ C}$$
$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{Ia}' + \mathrm{III}) = 1\overset{\mathrm{m}}{,}000132 \text{ bei } + 13\overset{\circ}{,}7 \text{ C}$$
$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{Ia} + \mathrm{II} + \mathrm{III}) = 1\overset{\mathrm{m}}{,}000192 \text{ bei } + 12\overset{\circ}{,}2 \text{ C} .$$

Die Verhältnisszahl w blieb ebenfalls unverändert und betrug also wie früher für die Latte

$$\mathrm{Ia} = 0{,}9638$$
$$\mathrm{II} = 0{,}9725$$
$$\mathrm{III} = 0{,}9661$$

und daher im Mittel 0,9675, wofür abgerundet 0,97 gesetzt werden darf.

Eine Schätzung B im weissen Centimeterfelde muss somit um 3 Procent oder 0,03 B reducirt werden.

Die Constanten der Instrumente.

Im Jahre 1874 wurden diese Werthe zweimal bestimmt, nämlich am 24. August in Geiselhöring und am 17. October in Haidhausen. Die erste Bestimmung ergab für das Instrument

$$\text{Nr. I.} \quad \cot\varphi = 136{,}41 \pm 0{,}074$$
$$\text{Nr. II.} \quad \cot\varphi = 137{,}35 \pm 0{,}060$$

und die zweite Bestimmung für das Instrument

$$\text{Nr. I.} \quad \cot\varphi = 137{,}00 \pm 0{,}069$$
$$\text{Nr. II.} \quad \cot\varphi = 138{,}54 \pm 0{,}064\,.$$

Im Jahre 1875 hat Herr O. Decher für das Instrument Nr. I drei Constanten-Bestimmungen gemacht, nämlich

am 19. August in Salzburg mit dem Ergebnisse

$$\cot\varphi = 137{,}06 \pm 0{,}058;$$

am 10. September in Simbach mit dem Werthe

$$\cot\varphi = 136{,}99 \pm 0{,}054;$$

und am 12. October in Haidhausen mit dem Resultate

$$\cot\varphi = 137{,}08 \pm 0{,}063\,.$$

Zur Bestimmung der Entfernungen E waren demnach folgende Ausdrücke massgebend:

im Jahre 1874 für das Instrument Nr. I

$$E = 136{,}70\,a + 0{,}78$$

und für das Instrument Nr. II

$$E = 137{,}94\,a + 0{,}78;$$

im Jahre 1875 für das Instrument Nr. I
während der ersten Hälfte der Arbeitszeit:

$$E = 137{,}03\,a + 0{,}78$$

und für die zweite Hälfte der Beobachtungen:

$$E = 137{,}04\,a + 0{,}78.$$

Die Höhencorrectionen wurden wie früher aus photographischen Tafeln, denen die Constante $\cot\varphi = 137{,}5$ zu Grunde liegt, entnommen, da die kleinen Abweichungen dieses Werthes von den für 1874 und 1875 gültigen Constanten keinen merklichen Einfluss auf jene Verbesserungen auszuüben vermögen.

Abschlüsse von Polygonen.

Durch die in den Jahren 1874 und 1875 doppelt nivellirten Strecken wurde das Polygon München-Geiselhöring-Straubing-Passau-Schärding-Simbach-Mühldorf-München, welches eine Gesammtlänge von 452 Kilometer besitzt, abgeschlossen. Der Abschluss geschah bei dem

Fixpunkte Nr. 1283 auf der Innbrücke zu Passau mit einer Differenz von $0\overset{m}{,}0202 \pm 0\overset{mm}{,}0285$ und folglich einem mittleren Fehler von 0,95 Millimeter auf einen Kilometer. Nach den wahrscheinlichen Fehlern der einzelnen Strecken sollte dieser Fehler nur 0,50 Millimeter betragen; jedenfalls liegt er weit innerhalb der Grenzen, welche von der Allgemeinen Conferenz für die Genauigkeit der Präcisionsnivellements festgesetzt wurden, nämlich 3 Millimeter für 1 Kilometer.

Mit dem eben genannten Polygone und unter Einrechnung der Württembergischen Strecke Nördlingen - Aalen - Heidenheim - Ulm besitzt Bayern im Ganzen sechs doppelt nivellirte Polygone mit einem Umfange von 2945 Kilometer, wovon es 2179,4 Kilometer selbst ausgeführt und 225,3 Kilometer aus dem Württembergischen Nivellement einbezogen hat. In der am Schlusse dieser Denkschrift enthaltenen Ausgleichung der Bayerischen Polygone haben wir das grosse theilweise durch Württemberg laufende Polygon Nördlingen - Aalen - Ulm - Augsburg - Donauwörth-Nördlingen ausgeschlossen, weil wir nicht im Stande sind, das Verhältniss der Gewichte der Bayerischen und Württembergischen Nivellementsarbeiten gehörig abzuschätzen, während wir aus den schon Eingangs erwähnten Gründen alle Ursache haben, von unseren Beobachtungen zu behaupten, dass sie alle gleiche Genauigkeit besitzen.

Hauptfixpunkte.

In Bayern sind nun alle Arbeiten vollendet, welche sich auf das von der ersten Allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung im Jahre 1864 verlangte Präcisionsnivellement beziehen; bei der zweiten Conferenz im Jahre 1867 wurde aber von Herrn Professor Sartorius v. Waltershausen in Göttingen eine Erweiterung dieses Nivellements in der Hinsicht angeregt, dass Hauptfixpunkte geschaffen werden sollen, durch welche es möglich wird, nach Jahrhunderten die Niveauveränderungen des festen Landes, welche nicht wie jene an den Küsten der Ostsee und des Mittelmeers durch die vom Meere zurückgelassenen Spuren entdeckt werden können, nachzuweisen. Herr Professor Sartorius v. Waltershausen schlug vor, diese Höhenmarken aus Porzellan herzustellen und mit Cement und Schrauben an geologisch wichtigen

Punkten, besonders an Felsen, zu befestigen. Wir sind zur Zeit mit der Aufsuchung und dem Nivellement solcher Hauptfixpunkte beschäftigt und werden darüber wohl erst im Jahre 1878 in einer fünften und letzten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement berichten können; gleichwohl gestatten wir uns schon jetzt hier anzuführen, was wir bereits im September 1875 in Paris gesagt und im Februar 1876 für den Generalbericht der Europäischen Gradmessung geschrieben haben, dass es nach unseren Beobachtungen am zweckmässigsten sei, die erwähnten Hauptfixpunkte an Kirchen und Schulgebäuden, Palästen, Museen, Rathhäusern, Sternwarten, Basispfeilern für Dreiecksnetze u. s. w., kurz an Bauten anzubringen, welche der Pflege der Religion und Erziehung, der Staatsverwaltung und Rechtsprechung, der Kunst und Wissenschaft dienen, für die also eine Pietät des Volkes und damit auch eine Garantie für lange Bewahrung der fraglichen Höhenmarken besteht. Felsen im Hochgebirge und Flachlande, welche Herr Professor Sartorius v. Waltershausen allein im Auge hatte, eignen sich zu Hauptfixpunkten bei Weitem nicht so wie die eben genannten Bauwerke, weil sie stets der Gefahr ausgesetzt sind, ganz oder theilweise den industriellen Interessen oder der Gewalt der Naturkräfte weichen zu müssen. Damit soll übrigens nicht gesagt sein, dass man Fixpunkte in Felsen gar nicht anbringen dürfe, sondern nur, dass man sorgfältig die möglichen künftigen Veränderungen dieser Felsen in Betracht zu ziehen habe, wenn man nicht vergeblich Zeit und Geld auf die Herstellung wichtiger Höhenmarken für geologische Zwecke verwenden will.

Verzeichniss der Fixpunkte.

Fortsetzung und Schluss.

Erklärung der Ueberschriften und Zeichen.

Nr Laufende Nummer der Höhenmarke oder des Fixpunktes;
A Nummer einer Abtheilung zwischen zwei benachbarten Fixpunkten, nach der Reihenfolge der Aufnahme;
J Anzahl der Stände des Instruments in einer Abtheilung;
Z die in derselben angewendete mittlere Zielweite in Meter;
D die Distanz zweier sich folgenden Fixpunkte in Meter;
H deren Höhenunterschied in Meter;
w wahrscheinlicher Fehler von H in Millimeter;
w′ derselbe Fehler, reducirt auf D = 1 Kilometer, in Millimeter;
⊙ messingene Höhenmarken (Bolzen mit centraler Bohrung) in verticalen Wänden;
□ wagrechte, in Stein gehauene und mit einer Rinne umgebene Vierecke, welche zur Bezeichnung von Fixpunkten dienen;
□̆ dergleichen, mit den eingemeisselten Buchstaben HM (Höhenmarke), oder auch viereckige Cementplatten, in rauhe oder bröckelnde Steine eingesetzt;
= wagrecht geebnete Steinflächen zur Bezeichnung untergeordneter Fixpunkte;
Pl Planiehöhe (Schwellenoberfläche) der Eisenbahn;
St Wegstunde (halbe Bayerische Meile), bezieht sich auf die in Bayern gebräuchliche Bezeichnung der Bahnstrecken. Eine Bayerische Meile misst 7415^m.

Die Kunstbauten der Bahnen sind theils auf grössere Strecken fortlaufend, theils nach den bei dem Baue bestandenen Sectionen numerirt. Eine definitive Bezeichnung derselben bleibt für die letzte Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement vorbehalten.

Die Coten in Metern gehen von einem Generalhorizont aus, welcher 1600′ Bayr. = $466{,}976^m$ über dem Nullpunkt des Lindauer Bodenseepegels und (nach vorläufigen Ermittlungen) 862^m über dem Meeresspiegel liegt.

Die eingeklammerten Abtheilungen {. . . .} bilden Zweignivellements zu Höhenmarken und Fixpunkten, auf deren Coten das durchlaufende Nivellement sich nicht stützt.

Geiselhöring — Straubing — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1088.	□ auf der Umfassungsmauer der grossen Drehscheibe zu Station Geiselhöring, nordöstl. Randstein								
									502,5590
1089.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Geiselhöring, Südostseite, dicht neben dem Eingange zum Telegraphenbureau								
									500,5476
1234.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 5 nordöstl. Stirndeckstein, bei St. 46,7 + 353^{m}, 0,47^{m} unter Pl								
	1	23	64	2955	+ 6,2986	0,8	0,6	0,4	508,8576
1235.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 7, südöstl. Flügeldeckplatte, bei St. 47,5 + 222^{m} Pl								
	2	25	56	2813	+ 6,3102	1,1	1,2	0,7	515,1678
1236.	□ auf dem gedeckten Wegdurchlass Lit. B rechts der Bahn, nordöstl. Flügeldeckstein, bei St. 48,4 + 130^{m}, 0,22^{m} über Pl								
	3	25	65	3240	+ 2,3825	0,8	0,7	0,5	517,5503
1237.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 1 rechts der Bahn, östl. Widerlager, rechtseitiger Deckstein, bei St. 49,0 + 120^{m} Pl								
	4	20	55	2206	+ 8,3594	0,5	0,3	0,4	525,9097
1238.	□ auf der schiefen Bahnbrücke Nr. 1 über die Allach, östl. Widerlager, Gesimsdeckstein rechts der Bahn, vor Station Straubing, Pl								
	5	36	56	4014	+ 9,4811	1,5	2,1	0,7	535,3908
1239.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Straubing, Perron, südöstl. Ecke, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal III. Classe								
	6	4	49	392	— 2,0873	0,4	0,2	0,6	533,3035
1240.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr. 2 über den Abdeckerbach, östl. Widerlager, rechtseitiger Brüstungsstein, bei St. 50,3 + 100^{m}, 0,40^{m} über Bahnhof-Pl der Station Straubing								
	1	4	49	389	+ 1,7821	0,4	0,1	0,6	535,0856
1241.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr. x mit 9 Oeffnungen über die Aiterach, südöstl. Widerlager, Brüstungsstein rechts der Bahn, einspringende Ecke, bei St. 51,4 + 360^{m}, 0,33^{m} über Pl								
	2	37	58	4320	— 3,5955	1,0	1,1	0,5	531,4901
1242.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. y, südwestl. Flügeldeckstein, bei St. 52,0 + 360^{m} Pl								
	3	18	62	2217	— 0,3078	0,9	0,8	0,6	531,1823

Geiselhöring — Straubing — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1243.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr. z beim Dorfe Schambach, südöstl. Brüstungsstein rechts der Bahn, bei St. 52,6 + 68^{m}, $0,32^{m}$ über Pl								
	4	15	64	1925	+ 1,5085	0,7	0,4	0,5	532,6908
1244.	□ auf der gewölbten Bahndurchfahrt Nr. 1, südöstl. Flügelgesimsstein, bei St. 53,1 + 150^{m}								
	5	17	58	1985	+ 2,5086	0,8	0,7	0,6	535,1994
1245.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Strasskirchen, Südfront, neben dem Eingange links								
	6	10	54	1087	— 1,8400	0,7	0,5	0,7	533,3594
1246.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr. 3 mit 4 Oeffnungen über den Irlbach, südwestl. Brüstungsstein in der Mitte, bei St. 53,7 + 240^{m}, $0,34^{m}$ über Bahnhof-Pl der Station Strasskirchen								
	1	4	53	422	+ 1,6092	0,3	0,1	0,5	534,9686
1247.	□ auf der offenen Bahnbrücke Nr. 1 mit 2 Oeffnungen beim Dorfe Loh, südwestl. Flügeldeckstein, bei St. 54,4 + 339^{m} Pl								
	2	24	56	2696	— 0,2352	0,8	0,7	0,5	534,7334
1248.	□ auf dem gewölbten Babndurchlass Nr. 2, südöstl. Flügeldeckstein, bei St. 55,5 + 250^{m}, $0,10^{m}$ über Pl								
	3	41	58	4716	+ 0,3464	1,2	1,5	0,6	535,0798
1249.	□ auf dem schiefen Wegdurchlass Lit. D links der Bahn, nordwestl. Flügeldeckstein in der Mitte, bei St. 56,4 + 10^{m}, $0,18^{m}$ über Pl								
	4	26	59	3067	+ 0,2397	0,9	0,9	0,5	535,3195
1250.	□ auf dem Durchgange Nr. 1 rechts der Bahn, südöstl. Flügelgesimsstein, bei St. 56,8 + 158^{m}, Bahnhof-Pl der Station Plattling								
	5	15	54	1624	+ 5,5541	0,9	0,9	0,7	540,8736
1251.	= unter der Höhenmarke zu Station Plattling, auf dem Wangenstein								
	6	4	46	368	— 0,5533	0,5	0,2	0,8	540,3203
1252.	⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Plattling, südöstl. Seite, rechts neben dem Eingange vom Markte her								
					— 1,7225				538,5978
1253.	□ unter der Höhenmarke auf dem Brüstungsstein								
	1	10	59	1189	— 2,6346	0,7	0,5	0,7	538,2390

Geiselhöring — Straubing — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1254.	⊙ am nördlichen Brückenportal der eisernen Fachwerkbrücke Nr. 3 mit 6 Oeffnungen über die Isar bei Plattling, linkseitiges Widerlager								
					— 0,8655				537,3735
1255.	□ auf dem Portal der eisernen Fachwerkbrücke Nr. 3, mit 6 Oeffnungen über die Isar bei Plattling, rechtseitiges Widerlager bei St. 57,2 + 4^{m}								
	2	2	44	177	+ 0,0129	0,1	0,0	0,3	538,2519
1256.	□ auf der Blechbalkenbrücke (Fluthbrücke) Nr. 2, mit 3 Oeffnungen, südöstl. Widerlager, mittlerer Kammerstein, bei St. 58,2 + 42^{m} 0,05^{m} über Pl								
	3	33	56	3697	+ 3,6246	0,9	0,7	0,4	541,8765
1257.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr. 1 rechts der Bahn, südwestl. Flügeldeckstein, bei St. 59,4 + 320^{m} Pl								
	4	43	55	4719	+ 1,5670	1,4	2,0	0,7	543,4435
1258.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 2 rechts der Bahn, nordwestl. Flügeldeckstein, bei St. 59,9 + 159^{m} Pl								
	5	15	56	1681	+ 2,0699	0,6	0,4	0,5	545,5134
1259.	□ auf der eisernen Blechbalkenbrücke Nr. 2 mit 3 Oeffnungen über den Mühlbach, rechtseitiges Widerlager, südl. Flügeldeckstein, bei St. 60,5 + 185^{m} Pl								
	6	19	58	2219	— 1,1799	0,9	0,8	0,6	544,3335
1260.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Osterhofen, gegen Altenmarkt, südl. Ecklisene								
	7	10	56	1111	— 1,3499	0,4	0,1	0,4	542,9836
1261.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 1 südsüdwestl. Stirndeckstein rechts der Bahn, bei St. 61,3 + 263^{m} Pl								
	1	16	61	1954	+ 6,1639	0,7	0,4	0,5	549,1475
1262.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 2 südöstl. Flügeldeckstein, bei St. 63,0 + 306^{m} Pl								
	2	49	65	6342	+ 1,0432	1,6	2,5	0,6	550,1907
1263.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 8, südwestl. Stirndeckstein, bei St. 63,6 + 45^{m} Pl								
	3	17	58	1976	+ 3,6270	0,7	0,5	0,5	553,8177
1264.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 1, südsüdöstl. Flügeldeckstein, bei St. 64,1 + 285^{m} Pl								
	4	16	63	2009	— 0,0085	0,7	0,5	0,5	553,8092

Geiselhöring — Straubing — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1265.	⌂ auf der Bogenbrücke Nr. 9 mit 4 Oeffnungen über die Vils, rechtseitiges Widerlager, südl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 64,9 + 60ᵐ, 0,35ᵐ über Pl								
	5	23	61	2787	— 6,1102	0,9	0,8	0,5	547,6990
1266.	= unter der Höhenmarke der Station Vilshofen auf der Treppenstufe								
	6	4	52	416	— 0,3345	0,2	0,1	0,4	547,3645
1267.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Vilshofen, Nordnordostseite, Mittelpfeiler des Haupteinganges von der Stadt her, 2,38ᵐ über Bahnhof-Pl								
					— 1,7732				545,5913
1268.	⌂ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr. 2 über die Wolfach, nördl. Flügel, Brüstungsstein links der Bahn, bei St. 65,2 + 355ᵐ, 0,10ᵐ über Pl								
	1	9	53	958	+ 4,9880	0,5	0,2	0,5	552,3525
1269.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr. 10 nördl. Flügeldeckstein links der Bahn, bei St. 65,8 + 105ᵐ Pl								
	2	18	55	1969	— 0,1914	0,8	0,7	0,6	552,1611
1270.	⌂ auf der gewölbten Bahndurchfahrt Nr. 8 südöstl. Flügeldeckstein, bei St. 66,8 + 62ᵐ Bahnhof-Pl der Station Sandbach								
	3	28	65	3641	+ 4,8414	0,7	0,5	0,4	557,0025
1271.	⌂ auf der gewölbten Bogenbrücke Nr. 5 mit 4 Oeffnungen über den Laufenbach, rechtseitiges Widerlager, südsüdöstl. Flügel, Brüstungsstein (einspringende Ecke) bei St. 67,5 + 305ᵐ								
	4	24	59	2852	— 6,0818	0,8	0,6	0,5	550,9207
1272.	⊙ im Sockel des Löwendenkmals, in der Mitte der Südseite								
	5	28	58	3233	+ 4,7093	0,7	0,5	0,4	555,6300
1273.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr. 1 nördl. Flügeldeckstein links der Bahn, bei St. 69,0 + 0ᵐ Pl								
	6	16	64	2056	+ 3,8245	0,7	0,5	0,5	559,4545
1274.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 3, südl. Flügeldeckstein rechts der Bahn, bei St. 69,2 + 146ᵐ Pl								
	7	7	64	900	— 1,8670	0,6	0,3	0,6	557,5875
1275.	□ auf der eisernen Blechträgerbrücke Nr. 2 mit 2 Oeffnungen über den Hammerbach, südöstl. rechtseitiges Widerlager, Kammerstein in der Mitte, bei St. 70,0 + 125ᵐ Pl								
	8	23	64	2922	+ 2,3754	1,0	1,0	0,6	559,9629

Geiselhöring — Straubing — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1276.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 4 westl. Flügeldeckstein, bei St. 70,3 + 93ᵐ								
	9	9	60	1081	+ 0,3271	0,5	0,3	0,5	560,2900
1277.	□ auf dem Wegdurchlass Lit. A rechts der Bahn, südöstl. Stirndeckstein, bei St. 70,6 + 112ᵐ								
	10	8	70	1119	— 1,0556	0,5	0,2	0,4	559,2344
1278.	= unter der Höhenmarke der Station Passau, auf der Treppenstufe								
	11	7	47	661	— 0,1666	0,5	0,3	0,6	559,0678
1279.	⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Passau, nördl. Front (Stadtseite), linker Thürpfosten des mittleren Portals, 2,19ᵐ über Bahnhof-Pl								
					— 1,7375				557,3303
1280.	□ auf der gewölbten Bahndurchfahrt Nr. LVIII, östl. Stirn, 4. Gesimsstein auf der vorspringenden Wassernase, bei Profil 801 + 52ᵐ								
	1	8	50	797	— 0,5834	0,4	0,1	0,4	558,4844
1281.	= unter der Höhenmarke auf dem Sockel des linkseitigen Eingangs-Portals der Innbrücke								
	2	1	65	130	— 0,2235				558,2609
1282.	⊙ am mittleren Pfeiler des nördl. linkseitigen Eingangsportals der eisernen Fachwerkbrücke Nr. LIX mit 1 Oeffnung über den Inn bei Passau, bei Profil 799 + 70,5ᵐ								
					— 2,1521				556,1088
1283.	⛋ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr. LIX mit 1 Oeffnung über den Inn bei Passau, südöstl. Flügel, Brüstungsstein, südl. rechtseitiges Widerlager								
	3	2	59	238	— 0,5940	0,1	0,0	0,2	557,6669
1284.	⛋ auf dem Bahngrenzstein Nr. 38 rechts der Bahn, nordwestl. zwischen Profil 793 und 794 neben der bayerischen Grenztafel								
	4	4	73	582	— 1,7488	0,4	0,1	0,5	555,9181
1277.	□ auf dem Wegdurchlass Lit. A rechts der Bahn, südöstl. Stirndeckstein, bei St. 70,6 + 112ᵐ								
									559,2344
1285.	□ auf der Quaimauer rechts der 2. Zugangstreppe oberhalb der Strassenbrücke über die Donau bei Passau, rechtseitiges Ufer								
	12	11	58	1267	+ 9,2929	0,5	0,2	0,4	568,5273

Geiselhöring — Straubing — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1286.	⊙ an der Strassenbrücke über die Donau bei Passau, 1. südl. Pfeiler vom rechtseitigen Ufer her, Südseite								
	13	1	16	32	— 4,5015				564,0258
1287.	□ auf der Donaulände (Quaimauer), östl. Flügel, nordöstl. Ecke der Landungstreppe								
	14	9	62	1118	+ 0,1747	0,6	0,3	0,5	568,7020
1288.	□ auf dem Sockel der Strassenbrücke mit 9 Oeffnungen über den Inn bei Passau, nördl. linkseitiges Widerlager, südwestl. Ecke								
	15	9	51	926	— 3,0210	0,5	0,3	0,6	565,6810
1289.	□ auf der Strassenbrücke mit 9 Oeffnungen über den Inn bei Passau, nördl. linkseitiges Widerlager, Brüstungsstein auf dem nordöstl. Flügel								
	16	3	28	166	— 5,2434				560,4376
1290.	⊙ am Redoutengebäude der Stadt Passau, Südfront								
	17	2	10	42	— 0,7256	0,1	0,0	0,6	559,7120
1280.	□ auf der gewölbten Bahndurchfahrt Nr. LVIII, östl. Stirn, 4. Gesimsstein auf der vorspringenden Wassernase, bei Profil 801 + 52^{m}								
	18	11	47	938	— 1,9555	0,4	0,1	0,4	558,4821

Simbach — Mühldorf — Haidhausen.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1291.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Simbach, Nordseite, links neben dem Eingange vom Orte her								
									510,9315
1292.	□ unter der Höhenmarke zu Station Simbach auf der Wange der Freitreppe								
					+ 1,9720				512,9035
1293.	□ auf der obersten Treppenstufe am südl. Eingange der grossen Drehscheibe zu Station Simbach, Bahnhof-Pl								
	1	5	43	431	+ 0,7931	0,3	0,1	0,4	513,6966
1294.	□ auf der offenen Bahnbrücke Nr. 4, linkseitiges Widerlager, südöstl. Flügeldeckstein bei St. 32,6 + 100^{m} Pl								
	2	18	55	1978	— 9,2750	0,9	0,7	0,6	504,4216

Simbach — Mühldorf — Haidhausen.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1295.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 2 für den Mühlkanal, südwestl. Eckstein, bei St. 32,4 + 75^m Pl								
	3	7	55	767	— 3,9114	0,6	0,3	0,7	500,5102
1296.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 1, nördl. Stirn, bei St. 31,8 + 300^m, 0,54^m unter Pl								
	4	20	58	2329	— 7,2787	0,9	0,9	0,6	493,2315
1297.	□ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr. 6 mit 2 Oeffnungen über den Türkenbach, rechtseitiges Widerlager, nordöstl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 30,7 + 275^m, 0,40 über Pl								
	5	31	61	3767	— 7,0245	0,9	0,9	0,5	486,2070
1298.	= unter der Höhenmarke zu Station Marktl, auf der Treppenstufe								
	6	34	55	3768	+ 5,4642	1,0	1,0	0,5	491,6712
1299.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Marktl, Südfront, östl. Pfeiler, neben dem Eingange vom Orte her, 2,24^m über Bahnhof-Pl								
					— 1,8397				489,8315
1300.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 56, südwestl. Ecke								
	1	30	56	3348	+ 9,1061	1,0	1,0	0,6	500,7773
1301.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 54, südöstl. Ecke (Haltestelle Perach)								
	2	33	61	4058	— 3,2549	1,0	1,0	0,5	497,5224
1302.	□ auf der Blechträgerbrücke Nr 4 über die Reischach, linkseitiges Widerlager, nordöstl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 26,7 + 170^m, 0,5 über Pl								
	3	31	61	3763	— 3,5855	0,9	0,9	0,5	493,9369
1303.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Neuötting, südöstl. Ecke von der Stadt her, 2,04^m über Bahnhof-Pl								
	4	16	61	1937	— 4,1699	0,6	0,3	0,4	489,7670
1304.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 1, nordwestl. Flügeldeckstein, bei St. 26,0 + 335^m Pl								
	1	4	64	516	+ 1,7071	0,4	0,2	0,6	491,4741
1305.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 48, süd westl. Ecke, 0,64^m über Pl								
	2	39	62	4875	—22,9694	1,1	1,3	0,5	468,5047

Simbach — Mühldorf — Haidhausen.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1306.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 46, nordöstl. Ecke								
	3	28	60	3369	— 7,3298	0,8	0,7	0,4	461,1749
1307.	□ auf dem linkseitigen Wangenstein der grossen Drehscheibe zu Station Mühldorf, Südostseite, Bahnhof-Pl								
	4	32	61	3909	—10,8643	0,9	0,9	0,5	450,3106
1308.	= unter der Höhenmarke zu Station Mühldorf auf dem Wangenstein der Freitreppe								
	5	2	60	240	— 0,6669	0,1	0,0	0,3	449,6437
1309.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Mühldorf, 1. Pfeiler südöstl. von der Stadt her								
					— 1,8179				447,8258
1310.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Wechselwärterposten gegen Ampfing, nordwestl. Ecke (Station Mühldorf)								
	1	5	60	602	+ 0,3745	0,4	0,2	0,5	450,0182
1311.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 42, nordöstl. Ecke								
	2	43	61	5228	— 5,3160	1,1	1,2	0,5	444,7022
1312.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Ampfing, Südseite, Perron, zwischen den Eingängen zu den Wartsälen I., II. und III. Classe, 2,38^m über Bahnhof-Pl								
	3	18	64	2298	— 4,3278	0,8	0,7	0,5	440,3744
1313.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Wechselwärterposten gegen Weidenbach, südöstl. Ecke (Station Ampfing)								
	1	3	55	331	+ 2,0882	0,2	0,0	0,3	442,4626
1314.	□ auf der eisernen Blechbalkenbrücke Nr. 9 über den Hartingerbach, südöstl. Flügel, rechtseitiges Widerlager, bei St. 19,6 + 300^m Pl								
	2	23	64	2950	— 5,0698	0,8	0,7	0,5	437,3928
1315.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 3, ostnordöstl. Widerlager, Deckstein, bei St. 19,2 + 110^m in der Haltestelle Weidenbach, Pl								
	3	14	60	1684	— 0,8302	0,4	0,1	0,3	436,5626
1316.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 3, westsüdwestl. Flügeldeckstein, bei St. 18,1 + 60^m Pl								
	4	34	61	4126	— 4,5873	1,1	1,2	0,5	431,9753

Simbach — Mühldorf — Haidhausen.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1317.	□ auf der Blechbalkenbrücke Nr. 3 mit 2 Oeffnungen über die Goldach, rechtseitiges Widerlager, Brüstungsstein, in der Mitte bei St. 17,3 + 125^m, $0,45^m$ über Pl								
	5	24	60	2898	— 3,0679	0,7	0,6	0,4	428,9074
1318.	□ unter der Höhenmarke zu Station Schwindegg, auf dem Sockel								
	6	6	63	757	— 1,6161	0,3	0,1	0,3	427,2913
1319.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Schwindegg, Nordseite, Perron, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal III. Classe, $2,84^m$ über Bahnhof-Pl								
					— 1,5508				425,7405
1320.	⌂ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Wechselwärterposten gegen Schwindegg, südöstl. Ecke, $0,33^m$ über Pl der Station Dorfen								
	1	54	61	6575	—14,6704	1,4	2,1	0,6	412,6209
1321.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Dorfen, Südseite, Perron, zwischen den Eingängen zu den Wartsälen I., II. und III. Classe								
	2	2	71	282	— 2,3003	0,2	0,0	0,3	410,3206
1322.	□ auf der Blechbalkenbrücke Nr. 4 über die Lappach, linkseitiges Widerlager, südöstl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 15,6 + 330^m, $0,31^m$ über Pl								
	1	18	61	2188	+ 1,0518	0,9	0,7	0,6	411,3724
1323.	□ auf der gewölbten Fluthbrücke Nr. 2 für das Isenhochwasser, ostnordöstl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 14,1 + 144^m, $0,33^m$ über Pl								
	2	15	66	1966	— 2,7699	0,8	0,7	0,6	408,6025
1324.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 28, südöstl. Ecke								
	3	23	64	2939	—14,7719	1,0	0,9	0,6	393,8306
1325.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 4, nordwestl. Flügel, Gesimsstein, bei St. 12,6 + 275^m, $0,10^m$ über Pl								
	4	44	63	5520	—26,8612	1,2	1,4	0,5	366,9694
1326.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Walpertskirchen, Südostseite, Perron, rechts neben dem Eingange zum Wartesaal III. Classe								
	5	19	59	2241	— 2,2552	0,8	0,7	0,6	364,7142
1327.	⌂ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Bahnwärterposten Nr. 23, südöstl. Ecke, $0,20^m$ über Bahnhof-Pl der Station Hörlkofen								
	1	20	65	2615	— 8,2717	0,8	0,7	0,5	356,4425

Simbach — Mühldorf — Haidhausen.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1328.	□ auf dem schiefen Wegdurchlass Lit. A, westl. Stirn, nordwestl. Flügel, Gesimsdeckstein, bei St. 10,3 + 36^m, $0,12^m$ über Pl								
	2	9	62	1110	+ 0,1625	0,5	0,2	0,4	356,6050
1329.	□ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr. 4 mit 2 Oeffnungen über die Unter-Schwellach, linkseitiges Widerlager, südl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 9,5 + 119^m								
	3	21	66	2788	+ 3,2813	0,9	0,9	0,6	359,8863
1330.	□ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr. 8 über den Anzingerbach, rechtseitiges Widerlager, ostsüdöstl. Flügel, Brüstungsstein, bei St. 8,8 + 230^m, $0,35^m$ über Pl								
	4	19	66	2495	+ 3,1799	0,7	0,6	0,5	363,0662
1331.	⌂ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Wechselwärterposten gegen Hörlkofen, westl. Ecke des südwestl. Läutwerkes, $0,26^m$ über Bahnhof-Pl der Station Schwaben								
	5	15	62	1935	— 9,5153	0,7	0,5	0,5	353,5509
1332.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Schwaben, Nordseite, Perron, nordwestl. Ecke, neben dem Eingange zum Wartesaal III. Classe								
	6	2	65	261	— 2,1541	0,2	0,0	0,3	351,3968
1333.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Haltestelle Poing, nordwestl. Ecke								
	1	35	65	4520	— 6,1513	0,9	0,8	0,4	345,2455
1334.	⌂ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Wechselwärterposten gegen Poing, westl. Ecke, $0,315^m$ über Bahnhof-Pl der Station Feldkirchen								
	2	47	64	5982	— 7,2184	1,0	1,0	0,4	338,0271
1335.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Feldkirchen, Nordseite, Perron, links neben dem Eingange zum Wartesaal III. Classe								
	3	3	64	382	— 2,1015	0,1	0,0	0,2	335,9256
1336.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 2, südl. Flügeldeckstein, bei St. 4,3 + 176^m, $0,06^m$ unter Pl								
	1	28	65	3636	+ 4,7200	0,9	0,9	0,5	340,6456
1337.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 10, südwestl. Ecke, $0,385^m$ über Pl								
	2	22	63	2804	— 1,3193	0,7	0,5	0,4	339,3263

Simbach — Mühldorf — Haidhausen.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1002.	□ unter der Höhenmarke zu Station Haidhausen in einen Pflasterstein gehauen								
	3	24	65	3101	— 9,2425	0,9	0,7	0,5	330,0838
1003.	⊙ am südöstl. Pfeiler des provisorischen Betriebsgebäudes (Güterhalle) zu Station Haidhausen								
					— 1,7133				328,3705

Haidhausen — Sternwarte — Basis Anfang und Schwaben — Basis Ende.

1337.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 10, südwestl. Ecke, $0{,}385^m$ über Pl								
									339,3263
1338.	□ auf dem Sockel der Pyramide über dem Anfang der Basis für die bayer. Triangulation, südwestl. Seite gegen die Frauenthürme in München								
	1	34	63	4300	+ 8,7453	1,1	1,1	0,5	348,0716
1339.	□ auf dem Marmorblock derselben Pyramide, welcher die Inschrift trägt, südwestl. Seite gegen die Frauenthürme in München								
					— 0,3968				347,6748
1340.	Oberfläche des Anfanges der Basis in der Pyramide bei Oberföhring								
					— 0,0109				347,6639
1337.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 10, südwestl. Ecke, $0{,}385^m$ über Pl								
									339,3263
1341.	□ auf dem Sockel der Pyramide über dem Anfang der Basis für die bayr. Triangulation, nordöstl. Seite gegen den Thurm in Aufkirchen								
	2	1	70	141	+ 8,7428	0,2	0,0	0,6	348,0691
1342.	□ auf dem Marmorblock derselben Pyramide, welcher die Inschrift trägt, nordöstl. Seite gegen Aufkirchen								
					— 0,3955				347,6736
1340.	Oberfläche des Anfanges der Basis in der Pyramide bei Oberföhring								
					— 0,0122				347,6614

Haidhausen — Sternwarte — Basis Anfang und Schwaben — Basis Ende.

Nr	Beschreibung	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1337.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 10, südwestl. Ecke, 0,385ᵐ über Pl									339,3263
1343.	⌂ auf der linkseitigen, nordwestl. Treppenwange neben dem Eingange zum Refraktor in der k. Sternwarte zu Bogenhausen	1	31	61	3756	— 5,9976	1,2	1,4	0,6	333,3287
1344.	⌂ auf der rechtseitigen, südwestl. Treppenwange, neben dem Eingange zum Refractor in der k. Sternwarte zu Bogenhausen	2	1	17	35	+ 0,0019				333,3306
1345.	Oberfläche des Pfeilers im Haupteingange der k. Sternwarte zu Bogenhausen	3	2	14	57	— 1,0336	0,1	0,0	0,6	332,2951
1346.	Oberfläche der isolirten Säule in der westl. Kuppel der k. Sternwarte zu Bogenhausen	4	3	14	81	— 7,5514				325,7773
1331.	⌂ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule beim Wechselwärterposten gegen Hörlkofen, westl. Ecke des südwestl. Läutwerkes, 0,26ᵐ über Bahnhof-Pl der Station Schwaben									353,5509
1347.	□ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterposten Nr. 3, nordöstl. Ecke (Bahnlinie Schwaben-Erding)	1	32	65	4156	+ 8,0083	0,8	0,7	0,4	361,5592
1348.	⌂ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule bei Haltestelle Aufhausen, östl. Ecke	2	44	64	5594	+24,1321	1,4	2,1	0,6	385,6913
1349.	□ auf dem Sockel der Pyramide über dem Ende der Basis, für die bayer. Triangulation, nordöstl. Seite, gegen Aufkirchen	3	40	60	4812	—11,5858	1,0	1,0	0,5	374,1055
1350.	□ auf dem Marmorblock derselben Pyramide, welcher die Inschrift trägt, nordöstl. Seite gegen Aufkirchen					— 0,4282				373,6773
1351.	Oberfläche des Endes der Basis in der Pyramide bei Aufkirchen					— 0,0208				373,6565

Salzburg — Berchtesgaden — Königssee.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
877.	Blechträgerbrücke Nr. II mit 5 Oeffnungen über die Salzach, östl. Widerlager, ⊙ an der Südseite des nördl. Eckthurmes, bei St. 43,0 + 340ᵐ								435,8398
878.	Schiefe offene Bahndurchfahrt Nr. III mit Blechträger über die Strasse nach Braunau und Hauptzufuhrstrasse zum Bahnhofe, nordöstl. Widerlager, nordwestl. Stirnflügel, Cementplatte innen an der Brüstung ⌂ Pl bei St. 43,1 + 300ᵐ								
	7	3	54	321	+ 2,2735	0,6	0,4	1,1	438,1133
1352.	⊙ am Betriebshauptgebäude im Bahnhof Salzburg, Perron, Südostseite, rechts neben dem Eingange zum Revisionssaale und links neben der Uhr								
	8	5	50	497	— 2,2816	0,5	0,2	0,7	435,8317
1353.	□ auf der Umfassungsmauer der bayr. Locomotiv-Drehscheibe zu Station Salzburg, Nordnordwestseite von der Mitte, Bahnhof-Pl								
	9	4	37	296	+ 2,0428	0,3	0,1	0,6	437,8745
1354.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr. 1, Stirndeckstein rechts der Bahn, Südwestseite, 1,65ᵐ unter Pl (Bahnlinie Salzburg-Hallein) bei Profil 14 + 78ᵐ								
	1	14	52	1456	— 0,3806	0,7	0,5	0,6	437,4939
1355.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 4 rechts der Bahn, westl. Stirndeckstein, bei Profil 19 + 46ᵐ								
	2	6	33	395	— 2,5423	0,2	0,0	0,3	434,9516
1356.	□ auf dem schiefen offenen Bahndurchlass Nr. 13, rechtseitiges Widerlager, südwestl. Deckstein, bei Profil 35 + 1ᵐ								
	3	11	57	1247	— 7,0420	0,5	0,3	0,5	427,9096
1357.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 18 bei Profil 41 + 71ᵐ rechts der Bahn, nordwestl. Flügeldeckstein								
	4	5	60	599	+ 4,8746	0,2	0,0	0,2	432,7842
1358.	□ auf dem linkseitigen Widerlager der Reichsstrassenbrücke über den Gerstbach, neben dem nordwestl. Brüstungspfeiler, Strasse von Salzburg nach Linz								
	5	11	51	1130	+ 6,8847	0,7	0,5	0,7	439,6689
1359.	□ auf dem gedeckten Reichsstrassendurchlass, östl. Stirndeckstein. Strasse von Salzburg nach Berchtesgaden								
	6	14	43	1208	+ 0,3345	0,8	0,6	0,7	440,0034

Salzburg — Berchtesgaden — Königssee.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1360.	□ auf dem gedeckten Wegdurchlass an der Reichsstrasse, nordwestl. Stirndeckstein, 20ᵐ vor der Thurmegger Bezirkstafel								
	7	12	54	1293	— 4,4650	0,8	0,7	0,7	435,5384
1361.	⌂ auf der Reichsstrassenbrücke über den Schleilacherbach, linkseitiges Widerlager, nordöstl. Ende bei 2 Kᵐ + 700ᵐ								
	8	21	55	2298	— 8,6141	0,9	0,8	0,6	426,9243
1362.	⌂ auf der Oberfläche des 7. Kilometersteines der Reichs-Strasse von Salzburg nach Berchtesgaden								
	9	37	56	4172	—20,5313	1,2	1,4	0,6	406,3930
1363.	⊙ am k. k. österreichischen Nebenzollamtsgebäude I. Classe zum „Hangenden Stein", Strassenseite, an der südwestl. Ecke								
	10	18	51	1825	— 6,4509	0,8	0,7	0,6	399,9421
1364.	□ auf der gewölbten Staatsstrassenbrücke über einen Wildbach, östl. Flügel, Ecke der Wasserablaufrinne neben dem Ende der Brüstung, beim k. bayerischen Zollamt I. Classe								
	1	16	48	1527	— 6,4493	0,7	0,5	0,6	393,4928
1365.	□ auf der Staatsstrassenbrücke mit 3 Oeffnungen über die Königsache im Markte Schellenberg, linkseitiges Widerlager, nordöstl. Vorkopf bei 2 Kᵐ + 500ᵐ								
	2	12	41	995	— 7,9180	0,5	0,3	0,5	385,5748
1366.	□ auf dem nördl. Eckdeckstein des linkseitigen Staatsstrassengrabens vor der hölzernen Brücke am Ende der Stützmauer bei 3 Kᵐ + 220ᵐ								
	3	8	51	814	— 4,4796	0,4	0,2	0,5	381,0952
1367.	⌂ auf der Brücke über die Königsache für den Weg zur Almbachklamm, rechtseitiges Widerlager, südsüdöstl. Flügeldeckstein								
	4	21	51	2159	—12,7995	0,9	0,8	0,6	368,2957
1368.	⌂ auf der Staatsstrassenbrücke über die Königsache, linkseitiges Widerlager, nordwestl. Flügel neben dem Flügeldeckstein (mit Rasen überdeckt)								
	5	32	45	2884	—24,3269	0,9	0,9	0,6	343,9688
1369.	⊙ am Eingange zum Hauptstollen des Ferdinandsbergs rechts des k. Bergwerkes in Berchtesgaden								
					—14,6866				329,2822

Salzburg — Berchtesgaden — Königssee.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1370.	□ auf der ersten Treppenstufe links neben dem Eingange zum Hauptgebäude des Salzbergwerkes in Berchtesgaden, Südostseite								
	6	28	45	2547	—12,8553	0,8	0,7	0,5	331,1135
1371.	⊙ an der Nordseite des südöstl. Vorbaues am Gebäude des Bäckermeisters zum Frauenreitl, Haus-Nr. 1, Gem. Bischofswies. Besonderes Kennzeichen: Wappen über der Eingangsthür mit der Umschrift: Georg Geigendaller hat angef. im Jahre 1570; ⊙ vom Fensterladen verdeckt								
	7	21	52	2190	— 9,6821	0,5	0,3	0,4	321,4314
1372.	= auf dem Deckstein am rechtseitigen Widerlager des Nadelwehres der Saline, zu gleicher Zeit linkseitiges Widerlager des gewölbten Kanales über die Ramsauerache (der Stein trägt die Jahreszahl 1850)								
	1	1	48	96	— 0,7052	.			320,7262
1373.	= unter der Höhenmarke auf einem vorspringenden Felsenkopf								
	2	10	45	904	— 9,9243	0,4	0,1	0,4	310,8019
1374.	⊙ Hauptfixpunkt an der steil abfallenden Felsenwand des linkseitigen Ufers der Königsache, oberhalb des Steges für den Fussweg in die Schönau, beim Schmiedhäuslgut Haus-Nr. 3 ½ in der Oberschönau, Südostseite								
					— 1,6489				309,1530
1375.	□ auf der rechtseitigen Treppenwange neben dem Eingange zu der neuen Kapelle im Dorfe Unterstein, Westnordwestseite								
	3	28	35	1959	—22,5528	0,8	0,7	0,6	288,2491
1376.	⌂ auf dem linkseitigen Widerlager des Schleusenwehres am Abflusse der Königsache aus dem Königssee								
	4	29	35	2004	—29,0059	0,8	0,6	0,5	259,2432
1377.	Oberfläche der versenkten Diebelköpfe des Schleussenwehres am Abflusse der Königsache aus dem Königssee								
					—29,0106				259,2385
—	Mittlerer Wasserspiegel am 7. September 1875, Vormittag 10 ¾ Uhr								
					+ 0,2880				259,5265

Prien — Chiemsee.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
826.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Prien, Nordseite am Perron, Mitte des Mittelbaues, 1,82m über Pl bei St. 26,2 + 100m								328,6593
1378.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass gegenüber dem zweiten Hause im Weiler Stock, nordöstl. Stirndeckstein								
	1	21	33	1500	+11,2493	0,9	0,7	0,7	339,9086
1379.	= unter der Höhenmarke auf dem Fundamentvorsprung des Nebengebäudes des Dampfschiffbesitzers Herrn Fessel in Stock								
	2	3	42	254	+ 2,2947	0,3	0,1	0,6	342,2033
1380.	⊙ am Sockel des Nebengebäudes des Dampfschiffsbesitzers Herrn Fessel in Stock, neben der südöstl. Ecke am Hafen, Ostseite								
					— 1,3830				340,8203
—	Mittlerer Wasserspiegel des Chiemsee's im Hafen, am 9. September 1875, Nachmittag 2¼ Uhr								
					+ 0,2100				342,4133

Simbach — Scheerding — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1291.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Simbach, Nordseite, links neben dem Eingange vom Orte her								510,9315
1292.	□ unter der Höhenmarke zu Station Simbach, auf der Wange der Freitreppe								512,9035
1381.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass Lit. b in 57 Km, Stirndeckstein am Ablauf								
	1	32	48	3071	—13,2557	0,9	0,8	0,5	499,6478
1382.	⌂ auf der hölzernen Strassenbrücke Lit. a in 53 Km, linkseitiges Widerlager, südöstl. Flügeldeckstein								
	2	21	45	1899	+22,9107	0,6	0,4	0,5	522,5585
1383.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass Lit. c in 51 Km, nördl. Stirndeckstein am Einlauf bei 50 Km + 420m								
	3	26	46	2368	—15,4627	0,9	0,8	0,6	507,0958

Simbach — Scheerding — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1384.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass Lit. b in 48 K^m, nördl. Stirndeckstein am Einlauf, bei 47 K^m + 350^m								
	4	28	55	3076	+12,6808	1,0	0,9	0,5	519,7766
1385.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass Lit. d in 44 K^m im Dorfe Malching, südöstl. Stirndeckstein, bei 43 K^m + 300^m								
	5	36	55	3988	— 2,4340	0,8	0,6	0,4	517,3426
1386.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass Lit. a in 39 K^m, südl. Stirndeckstein, bei 38 K^m + 40^m								
	6	46	53	4842	+ 5,1143	1,2	1,4	0,5	522,4569
1387.	□ auf der Strassenbrücke über den Köstlarerbach im Dorfe Tutting, linkseitiges Widerlager, östl. Ecke, bei 37 K^m + 0^m								
	7	14	55	1539	+ 0,0251	0,7	0,6	0,6	522,4820
1388.	□ auf dem 35,5 Kilometerstein ab Passau								
	8	14	53	1492	+ 2,9020	0,6	0,3	0,5	525,3840
1389.	□ auf dem 32. Kilometerstein ab Passau								
	9	29	60	3489	+ 7,6024	0,8	0,6	0,4	532,9864
1390.	□ unter der Höhenmarke in Pocking in das Sockelgesims gehauen								
	10	23	58	2673	+ 4,6924	0,7	0,5	0,4	537,6788
1391.	⊙ an der Pfarrkirche im Dorfe Pocking, Westfront des Thurmes in der Mitte								
					— 0,9186				536,7602
1392.	□ auf dem 29. Kilometerstein ab Passau								
	1	4	51	407	+ 0,7898	0,3	0,1	0,5	538,4686
1393.	□ auf dem gedeckten Strassendurchlass Lit. a in 27. K^m, nordwestl. Stirndeckstein in der Mitte, bei 26 K^m + 600^m (mit Rasen bedeckt)								
	2	20	60	2393	+ 5,1599	0,9	0,9	0,6	543,6285
1394.	□ auf dem gewölbten Strassendurchlass Lit. a in 21 K^m, nordöstl. Flügeldeckstein, bei 20 K^m + 400^m								
	3	52	61	6332	+10,9728	1,2	1,5	0,5	554,6013
1395.	□ auf der hölzernen Fachwerkbrücke mit 2 Oeffnungen über die Rott, linkseitiges Widerlager, südl. oberster Flügeldeckstein, bei 19 K^m + 700^m								
	4	6	54	643	— 3,5288	0,4	0,1	0,4	551,0725

Simbach — Scheerding — Passau.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w²	w'	Cote
1396.	□ auf dem I. Pfeiler, vom linkseitigen bayerischen Ufer ab, der Strassenbrücke über den Inn, zwischen Neuhaus und Scheerding, südl. Vorkopf								
	5	14	54	1518	+ 2,3655	0,5	0,2	0,4	553,4380
1397.	□ auf der hölzernen Strassenbrücke über den Brambach, rechtseitiges Widerlager, nordöstl. Flügel, oberster Deckstein (Strasse von der Stadt zum Bahnhofe Scheerding)								
	6	21	34	1435	— 1,0641	0,9	0,8	0,7	552,3739
1398.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Scheerding, Perron, Ostseite, neben der Eingangsthür zum grossen Wartesaal								
	7	9	51	917	— 7,4034	0,4	0,1	0,4	544,9705
1399.	□̌ auf der offenen Bahnbrücke Nr. 1 über die Staatsstrasse von Scheerding nach Linz und Passau, nordwestl. Flügeldeckstein, Eckstück, bei Profil 672 + 50^m								
	1	3	59	352	+ 1,6590	0,3	0,1	0,5	546,6295
1400.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr. 9, östl. Stirndeckstein, bei Profil 701 + 87^m								
	2	22	50	2623	— 1,3256	0,7	0,5	0,4	545,3039
1401.	□̌ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 18 bei Profil 722 + 57^m, linkseitiges Widerlager, westnordwestl. Eckstück, 0,074^m über Bahnhof-Pl der Station Wernstein								
	3	20	58	2334	+ 0,6938	0,7	0,5	0,4	545,9977
1402.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr. 31, linkseitiges Widerlager, nordöstl. Flügeldeckstein, bei Profil 763 + 97^m								
	4	36	58	4211	+ 7,4645	1,1	1,3	0,5	553,4622
1284.	□̌ auf dem Bahngrenzstein Nr. 38 rechts der Bahn, nordwestl. zwischen Profil 793 und 794 neben der Grenztafel zwischen Königreich Bayern und Kaiserreich Oesterreich								
	5	24	61	2932	+ 2,4364	0,7	0,6	0,5	555,8986
1283.	□̌ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr. LIX mit 1 Oeffnung über den Inn bei Passau, südöstl. Flügel, Brüstungsstein, südl., rechtseitiges Widerlager								
	4	5	59	588	+ 1,7481	0,3	0,1	0,3	557,6467

Neu-Ulm — Ulm.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
652.	= auf der Treppenstufe unter der Höhenmarke am alten Betriebsgebäude zu Neuulm								
									390,5432
653.	⊙ an der Westseite des neuen Betriebshauptgebäudes im Bahnhofe Neu-Ulm, in der Mitte								
	—	1	30	60	— 0,6990	0,2	0,0	0,7	389,8442
1403.	□ auf der steinernen Strassenbrücke mit 3 Oeffnungen über die Donau zwischen Neu-Ulm und Ulm, rechtseitiges Widerlager, Flügel auf dem Gesimsdeckstein neben dem Thorpfeiler								
	1	8	57	907	— 2,4952	0,4	0,1	0,4	388,0480
1404.	□ unter der Höhenmarke in Ulm in das Treppenpflaster gehauen								
	2	7	42	591	— 4,7874	0,4	0,1	0,5	383,2606
1405.	⊙ am Hauptportal des Münsters in Ulm, Nordwestseite des rechtseitigen Vorpfeilers, am Sockel								
					— 0,7299				382,5307

Zur Ausgleichung des Bayerischen Höhennetzes.

Das Bayerische Präcisionsnivellement setzt sich aus 4 grösseren Schleifen oder geschlossenen Polygonen und aus eben so vielen Strecken, welche zu theilweise auswärtigen Polygonen gehören, zusammen. Drei geschlossene Polygone vereinigen sich in Regensburg, und das vierte schliesst sich an die Seite Neuenmarkt-Bayreuth-Weiden der dritten Schleife an.

Das erste Polygon (Nr I) besteht aus folgenden Strecken:

1.	Regensburg-Geiselhöring-Straubing-Passau,	Länge	s_1 =	125,771 Km
2.	Passau-Schärding-Braunau-München,	Länge	s_2 =	179,025
3.	München-Landshut-Geiselhöring-Regensburg,	Länge	s_3 =	147,266.

Das zweite Polygon (Nr II) setzt sich aus folgenden Strecken zusammen:

1.	Regensburg-Geiselhöring-Landshut-München	(Länge = s_3)		
2.	München-Nanhofen-Augsburg,	Länge	s_4 =	60,597 Km
3.	Augsburg-Nördlingen-Gunzenhausen-Nürnberg,	Länge	s_5 =	174,047
4.	Nürnberg-Neumarkt (Oberpfalz)-Regensburg,	Länge	s_6 =	101,083.

Das dritte Polygon (Nr III) besteht aus folgenden Strecken:

1.	Regensburg-Neumarkt (Opf.)-Nürnberg	(Länge = s_6)		
2.	Nürnberg-Bamberg-Neuenmarkt (Oberfranken),	Länge	s_7 =	134,879 Km
3.	Neumarkt-Bayreuth-Kirchenlaibach-Weiden,	Länge	s_8 =	80,112
4.	Weiden-Schwandorf-Regensburg,	Länge	s_9 =	87,034.

Das vierte Polygon (Nr IV) setzt sich aus folgenden Strecken zusammen:

1.	Weiden-Kirchenlaibach-Bayreuth-Neuenmarkt	(Länge = s_8)		
2.	Neuenmarkt (Oberfr.)-Oberkotzau-Franzensbad,	Länge	s_{10} =	96,768 Km
3.	Franzensbad-Eger-Waldsassen-Weiden,	Länge	s_{11} =	67,892.

Das Umfangspolygon (Nr V), welches die vorhergenannten vier Polygone einschliesst, hat eine Länge

$$S_V = s_1 + s_2 + s_4 + s_5 + s_7 + s_{10} + s_{11} + s_9 = \overset{\text{Km}}{926{,}013}$$

während die Längen der Umfänge der Einzelpolygone folgende sind:

$$S_I = s_1 + s_2 + s_3 = \overset{\text{Km}}{452{,}062}$$
$$S_{II} = s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 482{,}993$$
$$S_{III} = s_6 + s_7 + s_8 + s_9 = 403{,}108$$
$$S_{IV} = s_8 + s_{10} + s_{11} = 244{,}772.$$

Die Länge aller Strecken beträgt

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11} = \overset{\text{Km}}{1254{,}474}.$$

An den Endpunkten der 11 Strecken $s_1, s_2 \ldots s_{11}$ sind folgende Höhenunterschiede in Metern beobachtet worden:

Auf der Strecke	s_1	(Regensburg-Passau):	Unterschied	$d_1 = + \overset{\text{m}}{35{,}8723}$
„ „ „	s_2	(Passau-München)	„	$d_2 = - 217{,}5062$
„ „ „	s_3	(München-Regensburg)	„	$d_3 = + 181{,}6541$
„ „ „	s_4	(München-Augsburg)	„	$d_4 = + 32{,}0958$
„ „ „	s_5	(Augsburg-Nürnberg)	„	$d_5 = + 179{,}5981$
„ „ „	s_6	(Nürnberg-Regensburg)	„	$d_6 = - 30{,}0005$
„ „ „	s_7	(Nürnberg-Neuenmarkt)	„	$d_7 = - 38{,}6644$
„ „ „	s_8	(Neuenmarkt-Weiden)	„	$d_8 = - 48{,}8053$
„ „ „	s_9	(Weiden-Regensburg)	„	$d_9 = + 57{,}4440$
„ „ „	s_{10}	(Neuenmarkt-Franzensbad)	„	$d_{10} = - 100{,}1619$
„ „ „	s_{11}	(Franzensbad-Weiden)	„	$d_{11} = + 51{,}4646.$

Die vorstehenden Höhenunterschiede der einzelnen Strecken ergeben (bei gehöriger Rücksicht auf die Richtung der Strecken, d. i. auf die Vorzeichen der Höhenunterschiede d) folgende Schlussfehler (Δ) der Polygone:

$$\Delta_1 = d_1 + d_2 + d_3 = + \overset{\text{m}}{0{,}0202}$$
$$\Delta_2 = d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = + 0{,}0393$$
$$\Delta_3 = d_6 + d_7 + d_8 + d_9 = - 0{,}0252$$
$$\Delta_4 = d_8 + d_{10} + d_{11} = + 0{,}1080$$
$$\Delta_5 = d_1 + d_2 + d_4 + d_5 + d_7 + d_{10} + d_{11} + d_9 = + 0{,}1423.$$

Bei den nachfolgenden Rechnungen, wovon die unter Nr 1 ausgeführten die Ausgleichung des Netzes nach der Methode der kleinsten Quadrate und die unter Nr 2 mitgetheilten die Ausgleichung desselben Netzes nach einem von mir erfundenen Verfahren bezwecken, will ich die verbesserten Höhenunterschiede der 11 Strecken s_1 bis s_{11}, welche jedes Einzelpolygon für sich auf Null abschliessen,

$$d'_1 \ , \ d'_2 \ , \ d'_3 \ , \ d'_4 \ \ldots . \ d'_{11}$$

heissen, wenn sie nach dem ersten Verfahren bestimmt sind, und

$$\mathfrak{d}'_1 \ , \ \mathfrak{d}'_2 \ , \ \mathfrak{d}'_3 \ , \ \mathfrak{d}'_4 \ \ldots . \ \mathfrak{d}'_{11}$$

wenn sie nach meinem (dem zweiten) Verfahren gefunden wurden.

Die Verbesserungen, welche an den Höhenunterschieden $d_1, d_2, d_3 \ldots$ anzubringen sind, um diese auf $d'_1, d'_2, d'_3 \ldots$ zu bringen, wenn sie nach dem gewöhnlichen, auf die Methode der kleinsten Quadrate gegründeten Verfahren berechnet worden, sollen mit

$$v_1 \ , \ v_2 \ , \ v_3 \ , \ v_4 \ \ldots . \ v_{11}$$

und wenn sie nach meiner Methode bestimmt sind, mit

$$\mathfrak{v}_1 \ , \ \mathfrak{v}_2 \ , \ \mathfrak{v}_3 \ , \ \mathfrak{v}_4 \ \ldots . \ \mathfrak{v}_{11}$$

bezeichnet werden. Da für beide Methoden sowohl die Verbesserungen v , $\mathfrak{v}$ als auch die Höhenunterschiede d , $\mathfrak{d}$ auf zwei verschiedenen Wegen berechnet werden, so will ich die auf dem zweiten Wege erhaltenen Werthe für v und $\mathfrak{v}$ von jenen des ersten Wegs durch einen Accent unterscheiden und die aus v' und $\mathfrak{v}'$ hervorgegangenen Höhenunterschiede durch d'' und $\mathfrak{d}''$ bezeichnen.

1. Ausgleichung des Bayerischen Höhennetzes nach der Methode der kleinsten Quadrate:

a) Nach dem Verfahren von Baeyer.[1]

Diese Art der Ausgleichung der Polygonschlussfehler ($\Delta_1, \Delta_2 \ldots$) erfüllt die Forderung, dass die Quadratsumme der Verbesserungen (v_1, v_2), welche den Abschluss der Einzelpolygone und des Hauptpolygons bewirken, ein Minimum wird, und dass die Fehlervertheilung proportional den Längenverhältnissen der Einzelstrecken zur Gesammtlänge erfolgt. Um der vorstehenden Forderung zu genügen, sind zunächst folgende Bedingungen zu erfüllen, welche ausdrücken, dass jedes Polygon für sich und auch das Hauptpolygon auf Null abschliessen muss:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 - (v_1 + v_2 + v_3) = 0 \\
&\Delta_2 - (v_3 + v_4 + v_5 + v_6) = 0 \\
&\Delta_3 - (v_6 + v_7 + v_8 + v_9) = 0 \\
&\Delta_4 - (v_8 + v_{10} + v_{11}) = 0 \\
&\Delta_5 - (v_1 + v_2 + v_4 + v_5 + v_7 + v_9 + v_{10} + v_{11}) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnet man die Gewichte der Strecken $s_1, s_2, s_3 \ldots$ beziehungsweise mit $p_1, p_2, p_3 \ldots.$, so haben dieselben nach Baeyer folgende Werthe:

$$p_1 = \frac{S_v}{s_1}, \quad p_2 = \frac{S_v}{s_2}, \quad p_3 = \frac{S_v}{s_3} \text{ u. s. w.}$$

Mit Rücksicht hierauf muss, um obiger Forderung zu genügen, auch noch die allgemeine Function erfüllt werden:

$$2\Sigma = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \ldots. + p_{11} v_{11}^2 \tag{2}$$

Multiplicirt man jede der mit (1) bezeichneten 5 Gleichungen mit einer Constanten k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, so geht das System (1) in das nachstehende (3) über:

---

1) Vergl. Peters, Astronomische Nachrichten, 1875, Bd 86, Nr 2052: „Ueber Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements" von Generallieutenant Dr. J. J. Baeyer.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 k_1 - (v_1 + v_2 + v_3) k_1 &= 0 \\
\Delta_2 k_2 - (v_3 + v_4 + v_5 + v_6) k_2 &= 0 \\
\Delta_3 k_3 - (v_6 + v_7 + v_8 + v_9) k_3 &= 0 \\
\Delta_4 k_4 - (v_8 + v_{10} + v_{11}) k_4 &= 0 \\
\Delta_5 k_5 - (v_1 + v_2 + v_4 + v_5 + v_7 + v_9 + v_{10} + v_{11}) k_5 &= 0
\end{aligned} \qquad (3)$$

Differentiiren wir die Gleichungen (2) und (3) successive nach v_1, v_2, v_3 . . ., so erhalten wir die Bedingungen für das Minimum der Quadratsumme Σ wie folgt:

$$\begin{aligned}
p_1 v_1 - k_1 - k_5 &= 0 \\
p_2 v_2 - k_1 - k_5 &= 0 \\
p_3 v_3 - k_1 - k_2 &= 0 \\
p_4 v_4 - k_2 - k_5 &= 0 \\
p_5 v_5 - k_2 - k_5 &= 0 \\
p_6 v_6 - k_2 - k_3 &= 0 \\
p_7 v_7 - k_3 - k_5 &= 0 \\
p_8 v_8 - k_3 - k_4 &= 0 \\
p_9 v_9 - k_3 - k_5 &= 0 \\
p_{10} v_{10} - k_4 - k_5 &= 0 \\
p_{11} v_{11} - k_4 - k_5 &= 0
\end{aligned} \qquad (4)$$

Hieraus findet man für die Verbesserungen folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{p_1}(k_1 + k_5) = \frac{s_1}{S}(k_1 + k_5) \\
v_2 &= \frac{1}{p_2}(k_1 + k_5) = \frac{s_2}{S}(k_1 + k_5) \\
v_3 &= \frac{1}{p_3}(k_1 + k_2) = \frac{s_3}{S}(k_1 + k_2) \\
v_4 &= \frac{1}{p_4}(k_2 + k_5) = \frac{s_4}{S}(k_2 + k_5) \\
v_5 &= \frac{1}{p_5}(k_2 + k_5) = \frac{s_5}{S}(k_2 + k_5) \\
v_6 &= \frac{1}{p_6}(k_2 + k_3) = \frac{s_6}{S}(k_2 + k_3) \\
v_7 &= \frac{1}{p^7}(k_3 + k_5) = \frac{s_7}{S}(k_3 + k_5)
\end{aligned} \qquad (5)$$

$$v_8 = \frac{1}{p_8}(k_3 + k_4) = \frac{s_8}{S}(k_3 + k_4)$$
$$v_9 = \frac{1}{p_9}(k_3 + k_5) = \frac{s_9}{S}(k_3 + k_5)$$
$$v_{10} = \frac{1}{p_{10}}(k_4 + k_5) = \frac{s_{10}}{S}(k_4 + k_5)$$
$$v_{11} = \frac{1}{p_{11}}(k_4 + k_5) = \frac{s_{11}}{S}(k_4 + k_5)$$

Werden diese Werthe in die mit (1) bezeichneten Gleichungen eingesetzt, so ergeben sich für die Bestimmung der Constanten k_1 bis k_5 die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{s_1+s_2+s_3}{S}\cdot k_1 + \frac{s_3}{S}\cdot k_2 + \frac{s_1+s_2}{S}\cdot k_5 \\
\Delta_2 &= \frac{s_4}{S}\cdot k_1 + \frac{s_3+s_4+s_5+s_6}{S}\cdot k_2 + \frac{s_6}{S}\cdot k_3 + \frac{s_4+s_5}{S}\cdot k_5 \\
\Delta_3 &= + \frac{s_6}{S}\cdot k_2 + \frac{s_6+s_7+s_8+s_9}{S}\cdot k_3 + \frac{s_8}{S}\cdot k_4 + \frac{s_7+s_9}{S}\cdot k_5 \qquad (6) \\
\Delta_4 &= + \frac{s_8}{S}\cdot k_3 + \frac{s_8+s_{10}+s_{11}}{S}\cdot k_4 + \frac{s_{10}+s_{11}}{S}\cdot k_5 \\
\Delta_5 &= \frac{s_1+s_2}{S}\cdot k_1 + \frac{s_4+s_5}{S}\cdot k_2 + \frac{s_7+s_9}{S}\cdot k_3 + \frac{s_{10}+s_{11}}{S}\cdot k_4 + \frac{s_1+s_2+s_4+s_5+s_7+s_9+s_{10}+s_{11}}{S}\cdot k_5
\end{aligned}$$

Führt man die zehnfachen Zahlenwerthe ein und reducirt auf Null, so gehen die vorstehenden Gleichungen in folgende über:

$$\begin{aligned}
3{,}604\,k_1 + 1{,}174\,k_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 2{,}430\,k_5 - 0{,}202 &= 0 \\
1{,}174\,k_1 + 3{,}850\,k_2 + 0{,}806\,k_3 \qquad\qquad + 1{,}870\,k_5 - 0{,}393 &= 0 \\
+ 0{,}806\,k_2 + 3{,}213\,k_3 + 0{,}639\,k_4 + 1{,}769\,k_5 + 0{,}252 &= 0 \qquad (7) \\
+ 0{,}639\,k_3 + 1{,}951\,k_4 + 1{,}313\,k_5 - 1{,}080 &= 0 \\
2{,}430\,k_1 + 1{,}870\,k_2 + 1{,}769\,k_3 + 1{,}313{,}k_4 + 7{,}382\,k_5 - 1{,}423 &= 0
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser 5 Gleichungen nach dem in Jordans Taschenbuch der praktischen Geometrie, Seite 31, angegebenen Verfahren liefert:

$$\begin{aligned}
k_1 &= -\,0{,}0993 \\
k_2 &= +\,0{,}1125 \\
k_3 &= -\,0{,}3106 \qquad (8) \\
k_4 &= +\,0{,}5368 \\
k_5 &= +\,0{,}1759
\end{aligned}$$

und hiemit findet man durch Einsetzung in (5) folgende Werthe für die Verbesserungen und deren Quadrate, wozu nur zu bemerken ist, dass letztere nicht Quadratmeter sondern Quadratcentimeter bedeuten, also die zehntausendfachen Zahlenwerthe von v_1^2, v_2^2, v_3^2 vorstellen:

$$
\begin{array}{llll}
v_1 = +\overset{m}{0{,}0077} & & v_1^2 = & \overset{\square cm}{0{,}5929} \\
v_2 = +0{,}0109 & & v_2^2 = & 1{,}1881 \\
v_3 = +0{,}0016 & & v_3^2 = & 0{,}0256 \\
v_4 = +0{,}0139 & & v_4^2 = & 1{,}9321 \\
v_5 = +0{,}0399 & & v_5^2 = & 15{,}9201 \\
v_6 = -0{,}0160 & & v_6^2 = & 2{,}5600 \\
v_7 = -0{,}0145 & & v_7^2 = & 2{,}1025 \\
v_8 = +0{,}0145 & & v_8^2 = & 2{,}1025 \\
v_9 = -0{,}0093 & & v_9^2 = & 0{,}8649 \\
v_{10} = +0{,}0550 & & v_{10}^2 = & 30{,}2500 \\
v_{11} = +0{,}0386 & & v_{11}^2 = & 14{,}8996 \\
\hline
 & & [vv] = & 72{,}4383
\end{array} \qquad (9)
$$

Sucht man mit Hilfe dieser Fehlerquadrate und der Streckenlängen s_1, s_2, s_3 . . . das Quadrat des mittleren Fehlers (m) pro Kilometer, so geschieht dieses bekanntlich durch die Formel

$$m^2 = \frac{1}{11}\left(\frac{v_1^2}{s_1} + \frac{v_2^2}{s_2} + \frac{v_3^2}{s_3} + \ldots\ldots + \frac{v_{11}^2}{s_{11}}\right) \qquad (10)$$

in welcher die Werthe von s_1, s_2, s_3 . . . . . . in Kilometern einzusetzen sind, wenn man die vorstehenden Fehlerquadrate bei der Berechnung von m^2 benützen will. Unter dieser Voraussetzung findet man den im ganzen Bayerischen Präcisionsnivellement begangenen mittleren Fehler pro Kilometer

$$m = 0{,}2601^{cm} = 2{,}601^{mm} \qquad (11)$$

während er nach dem Beschlusse der dritten Allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung 3 Millimeter pro Kilometer betragen dürfte.

b) Nach dem Verfahren von Jordan.[1])

Dieses Verfahren unterscheidet sich von dem vorigen des Herrn Generals Baeyer im Wesentlichen nicht nur durch die verschiedene Art der Gewichtsbestimmung, sondern auch durch die Zahl und Art der unabhängigen Unbekannten. Während nämlich nach Baeyer die Gewichte

$$p_1 \;,\; p_2 \;,\; p_3 \ldots\ldots \text{ den Quotienten } \frac{S_I}{s_1} , \frac{S_I}{s_2} , \frac{S_I}{s_3} \ldots\ldots$$

gleich gesetzt werden, nehmen wir sie nach Jordan den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Höhenunterschiede d_1, d_2, $d_3 \ldots$. umgekehrt proportional an und bezeichnen sie der Reihe nach mit p'_1, p'_2, $p'_3 \ldots$. Diese wahrscheinlichen Fehler sind in den Fixpunktverzeichnissen meiner 4 Mittheilungen über das Bayerische Präcisionsnivellement enthalten, und ergeben durch Zusammenstellung mit den beobachteten Höhenunterschieden d_1 bis d_{11} nachstehende Tafel:

Nr	Nivellirte Strecke	Beobachteter Höhenunterschied d	Wahrscheinlicher Fehler dieses Unterschieds W	Gewicht der nivellirten Strecke p'
1	Regensburg-Passau	35,8723 m	± 0,0059	2,83
2	Passau-München	217,5062	± 0,0067	2,20
3	München-Regensburg	181,6541	± 0,0062	2,60
4	München-Augsburg	32,0958	± 0,0038	6,76
5	Augsburg-Nürnberg	179,5981	± 0,0084	1,42
6	Nürnberg-Regensburg	30,0005	± 0,0047	4,55
7	Nürnberg-Neuenmarkt	38,6644	± 0,0094	1,14
8	Neuenmarkt-Weiden	48,8053	± 0,0055	3,26
9	Weiden-Regensburg	57,4440	± 0,0053	3,51
10	Neuenmarkt-Franzensbad	100,1619	± 0,0087	1,33
11	Franzensbad-Weiden	51,4646	± 0,0051	3,79

Als unabhängige Unbekannte führen wir die 7 absoluten Höhenunterschiede zwischen Regensburg und den übrigen Hauptpunkten ein, mit folgenden Näherungswerthen:

---

1) Vergl. das „Taschenbuch der praktischen Geometrie“ von Dr. W. Jordan, Professor in Carlsruhe. Stuttgart 1873. § 89, Seite 182—185.

Regensburg-Passau	X_1 =	35,8723
Regensburg-München	X_2 =	184,6541
Regensburg-Augsburg	X_3 =	149,5583
Regensburg-Nürnberg	X_4 =	30,0005
Regensburg-Neuenmarkt	X_5 =	8,6639
Regensburg-Weiden	X_6 =	57,4140
Regensburg-Franzensbad	X_7 =	108,9086.

Nennt man die zu den Werthen X_1 , X_2 , $X_3 \ldots X_7$ gehörigen Verbesserungen beziehungsweise x_1 , x_2 , $x_3 \ldots x_4$, so bestehen für die an den Werthen d_1 , d_2 , $d_3 \ldots d_{11}$ anzubringenden Correctionen v'_1 , v'_2 , $v'_3 \ldots v'_{11}$ zunächst 11 Bedingungsgleichungen von der Form

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_7 x_7 + w \qquad (12)$$

worin die w die in den Schlussfehlern sich kundgebenden Widersprüche und a_1 , a_2 , $a_3 \ldots$ Coefficienten bezeichnen, deren Werthe nur entweder 0 oder ± 1 sind. Ausser den genannten Gleichungen ist auch noch die Bedingung zu erfüllen:

$$2 \Sigma = p'_1 v'^2_2 + p'_2 v^2_2 + p'_3 v'^2_3 + \ldots + p'_{11} v'^2_{11} = \text{minimum}. \qquad (13)$$

Die Coefficienten zu x_1 , x_2 , $x_3 \ldots$ und die Werthe von w für die eben erwähnten 11 Bedingungsgleichungen sind in nachstehender Tafel enthalten:

v'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	w in Meter
v'_1	+ 1	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
v'_2	+ 1	+ 1	. .	. .	. .	. .	. .	+ 0,0202
v'_3	. .	+ 1	. .	. .	. .	. .	. .	. .
v'_4	. .	+ 1	— 1	. .	. .	. .	. .	. .
v'_5	. .	. .	+ 1	+ 1	. .	. .	. .	— 0,0393
v'_6	. .	. .	. .	+ 1	. .	. .	. .	. .
v'_7	. .	. .	. .	+ 1	+ 1	. .	. .	. .
v'_8	. .	. .	. .	. .	— 1	+ 1	. .	— 0,0252
v'_9	. .	. .	. .	. .	. .	+ 1	. .	. .
v'_{10}	. .	. .	. .	. .	— 1	. .	+ 1	+ 0,0828
v'_{11}	. .	. .	. .	. .	. .	— 1	+ 1	. .

Werden die nach vorstehenden 11 Gleichungen allgemein ausgedrückten Werthe von v_1 bis v_{11} in die vorstehend mit Nr 13 bezeichnete Funktion $2\,\Sigma$ eingeführt, so ergibt sich durch Differentiiren nach x_1, x_2, $x_3 \ldots x_7$ die Bedingung für $[p' v' v'] =$ minimum in den folgenden leicht zu bildenden 7 Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= (p_1 + p_2)\, x_1 + p_2\, x_2 + p_2\, w_2 \\
0 &= p_2\, x_1 + (p_2 + p_3 + p_4)\, x_2 - p_4\, x_3 + p_2\, w_2 \\
0 &= -\, p_4\, x_2 + (p_4 + p_5)\, x_3 + p_5\, x_4 + p_5\, w_5 \\
0 &= p_5\, x_3 + (p_5 + p_6 + p_7)\, x_4 + p_7\, x_5 + p_5\, w_5 \\
0 &= p_7\, x_4 + (p_7 + p_8 + p_{10})\, x_5 - p_8\, x_6 - p_{10}\, x_7 - p_8\, w_8 - p_{10}\, w_{10} \qquad (14) \\
0 &= -\, p_8\, x_5 + (p_8 + p_9 + p_{11})\, x_6 - p_{11}\, x_7 + p_8\, w_8 \\
0 &= -\, p_{10}\, x_5 - p_{11}\, x_6 + (p_{10} + p_{11})\, x_7 + p_{10}\, w_{10}
\end{aligned}
$$

welche sich nach Einführung der Zahlenwerthe für p und w (in Centimetern) wie folgt gestalten:

$$
\begin{array}{lllllllll}
0 = 5{,}03\,x_1 & +\ 2{,}20\,x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +\ 4{,}444 \\
0 = 2{,}20\,x_1 & +11{,}56\,x_2 & -\ 6{,}76\,x_3 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +\ 4{,}444 \\
0 = \ldots & -\ 6{,}76\,x_2 & +8{,}18\,x_3 & +1{,}42\,x_4 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -\ 5{,}581 \\
0 = \ldots & \ldots & +1{,}42\,x_3 & +7{,}11\,x_4 & +1{,}14\,x_5 & \ldots & \ldots & \ldots & -\ 5{,}581 \\
0 = \ldots & \ldots & \ldots & +1{,}14\,x_4 & +5{,}73\,x_5 & -\ 3{,}26\,x_6 & +1{,}33\,x_7 & & -\ 2{,}797 \\
0 = \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -3{,}26\,x_5 & +10{,}56\,x_6 & -3{,}79\,x_7 & & -\ 8{,}215 \\
0 = \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1{,}33\,x_5 & +\ 3{,}79\,x_6 & +5{,}12\,x_7 & & +11{,}012
\end{array}
$$

Die Auflösung dieser 7 Gleichungen nach dem von Jordan (Seite 31 seines Taschenbuchs der praktischen Geometrie) angegebenen Verfahren liefert die Werthe:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\,0{,}9992 \text{ cm} \\
x_2 &= +\,0{,}2646 \\
x_3 &= +\,0{,}7847 \\
x_4 &= +\,0{,}6697 \qquad (15) \\
x_5 &= -\,0{,}2588 \\
x_6 &= -\,0{,}1335 \\
x_7 &= -\,2{,}3168
\end{aligned}
$$

und hiemit findet man durch Einsetzung in die Gleichungen für die Verbesserungen v' deren Werthe und Quadrate wie folgt:

cm	□cm
$v_1^1 = -1,00$	$d_1^2 = 1,0000$
$v_2^1 = +1,29$	$d_2^2 = 1,6641$
$v_3^1 = +0,26$	$d_3^2 = 0,0676$
$v_4^1 = -0,52$	$d_4^2 = 0,2704$
$v_5^1 = -2,48$	$d_5^2 = 6,1504$
$v_6^1 = +0,67$	$d_6^2 = 0,4489$
$v_7^1 = +0,41$	$d_7^2 = 0,1681$
$v_8^1 = -2,40$	$d_8^2 = 5,7600$
$v_9^1 = -0,13$	$d_9^2 = 0,0169$
$v_{10}^1 = +6,22$	$d_{10}^2 = 38,6884$
$v_{11}^1 = -2,18$	$d_{11}^2 = 4,7524$
	$[v'v'] = 58,9872$

Berechnet man aus diesen Verbesserungen (deren Quadratsumme bedeutend kleiner ist als die nach Baeyer berechnete Summe 72,44) mittelst der oben angegebenen Formel (10) den mittleren Fehler des Bayerischen Präcisionsnivellements pro Kilometer, so wird derselbe

$$m' = 0,2219^{cm} = 2,219^{mm}$$

also wesentlich kleiner als ihn die erste Ausgleichung (a) ergeben hat, wonach er $2,601^{mm}$ betragen würde.

c) Nach einer Abänderung des Baeyer'schen Verfahrens.

Ich hatte den oben (Seite 113) bezeichneten Aufsatz des Herrn Generals Baeyer über die Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements nicht näher durchgesehen, als ich meinem geodätischen Bureau den Auftrag ertheilte, die Ausgleichung unseres Höhennetzes auch nach dem Verfahren des Herrn Generals vorzunehmen, was alsbald in der unter a) mitgetheilten Weise geschah. Als sich hiebei jedoch zeigte, dass die Summe der Fehlerquadrate grösser wurde als nach meinem unter Nr 2 zu beschreibenden einfachen Näherungsverfahren, fand ich mich veranlasst, den erwähnten Aufsatz näher zu prüfen, und diese Prüfung ergab sofort, dass das mit Nr 22 bezeichnete System von Gleichungen des Baeyer'schen Aufsatzes insoferne eine Unrichtigkeit enthält, als die vierte Gleichung jenes Systems, nämlich

$$u^{III} = 0 = D^{III} - (v + v^{III} + v^{V} + v^{VI} + v^{VII} + v^{I})$$

von den drei ersten nicht unabhängig ist, sondern lediglich deren Summe darstellt, wie sich am anschaulichsten aus dem für vier Polygone giltigen Schema (25), das ich für mein Verfahren aufgestellt habe, ergibt. Es ist demnach auch von Herrn General Baeyer ein willkührlicher Factor (IV) zu viel in die Rechnung eingeführt worden, und es wären drei Unbekannte (I, II, III) genügend gewesen, die 8 Verbesserungen v, v^{I}, $v^{II} \ldots v^{VII}$ zu finden.

Unser unter Nr 1, a behandelte Fall umfasst 4 Polygone, also sind hiefür nur 4 unabhängige Bedingungsgleichungen aufzustellen, und zwar mit Rücksicht auf die Steigungen und Gefälle folgende vier:

$$\begin{aligned} 0 &= +(d_1+v_1)-(d_2+v_2)+(d_3+v_3) \\ 0 &= -(d_3+v_3)+(d_4+v_4)+(d_5+v_5)-(d_6+v_6) \\ 0 &= +(d_6+v_6)-(d_7+v_7)-(d_8+v_8)+(d_9+v_9) \\ 0 &= +(d_8+v_8)-(d_{10}+v_{10})+(d_{11}+v_{11})\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Diese 4 Gleichungen geben, wenn man sie addirt, in der That für den Umfang:

$$\begin{aligned} &+(d_1+v_1)-(d_2+v_2)+(d_4+v_4)+(d_5+v_5)-(d_7+v_7)+ \\ &+(d_9+v_9)-(d_{10}+v_{10})+(d_{11}+v_{11})=0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man in dem System (12), wie es in Wirklichkeit der Fall ist,

$$\begin{aligned} +d_1-d_2+d_3 &= \Delta_1 = +\overset{m}{0},0202 \\ -d_3+d_4+d_5-d_6 &= \Delta_2 = +0,0393 \\ +d_6-d_7-d_8+d_9 &= \Delta_3 = -0,0252 \\ +d_8-d_{10}+d_{11} &= \Delta_4 = +0,1080 \end{aligned} \tag{14}$$

und multiplicirt die 4 Gleichungen jenes Systems nacheinander mit den willkührlichen Factoren k_1, k_2, k_3, k_4, so erhält man folgendes neue System von Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_1 k_1 + (v_1 - v_2 + v_3)k_1 \\ 0 &= \Delta_2 k_2 - (v_3 - v_4 - v_5 + v_6)k_2 \\ 0 &= \Delta_3 k_3 + (v_6 - v_7 - v_8 + v_9)k_3 \\ 0 &= \Delta_4 k_4 + (v_8 - v_{10} + v_{11}) \end{aligned} \tag{15}$$

zu denen noch kommt die allgemeine Function

$$2\Sigma = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \ldots\ldots + p_{11} v_{11}^2 = \text{min.}$$

Hieraus folgt durch Differentiiren das System (16) und aus diesem die in (17) dargestellten Verbesserungen v_1 bis v_{11}, nämlich

$$\begin{aligned}
0 &= p_1 v_1 + k_1 & \qquad v_1 &= -\frac{k_1}{p_1} &&= -\frac{s_1}{S}k_1 \\
0 &= p_2 v_2 - k_1 & v_2 &= +\frac{k_1}{p_2} &&= +\frac{s_2}{S}k_1 \\
0 &= p_3 v_3 + k_1 - k_2 & v_3 &= +\frac{k_2 - k_1}{p_3} &&= +\frac{s_3}{S}(k_2 - k_1) \\
0 &= p_4 v_4 + k_2 & v_4 &= -\frac{k_2}{p_4} &&= -\frac{s_4}{S}k_2 \\
0 &= p_5 v_5 + k_2 & v_5 &= -\frac{k_2}{p_5} &&= -\frac{s_5}{S}k_2 \\
0 &= p_6 v_6 - k_2 + k_3 \quad (16) & v_6 &= +\frac{k_2 - k_3}{p_6} &&= +\frac{s_6}{S}(k_2 - k_3 \quad (17) \\
0 &= p_7 v_7 - k_3 & v_7 &= +\frac{k_3}{p_7} &&= +\frac{s_7}{S}k_3 \\
0 &= p_8 v_8 - k_3 + k_4 & v_8 &= +\frac{k_3 - k_4}{p_8} &&= +\frac{s_8}{S}(k_3 - k_4) \\
0 &= p_9 v_9 + k_3 & v_9 &= -\frac{k_3}{p_9} &&= -\frac{s_9}{S}k_3 \\
0 &= p_{10} v_{10} - k_4 & v_{10} &= +\frac{k_4}{p_{10}} &&= +\frac{s_{10}}{S}k_4 \\
0 &= p_{11} v_{11} + k_4 & v_{11} &= -\frac{k_4}{p_{11}} &&= -\frac{s_{11}}{S}k_4 .
\end{aligned}$$

Werden diese Werthe von v in das Gleichungssystem (15) eingesetzt, so erhält man folgendes andere:

$$\begin{aligned}
0 &= +(s_1 + s_2 + s_3)\,k_1 - s_3\,k_2 - S\Delta_1 \\
0 &= -s_3\,k_1 + (s_3 + s_4 + s_5 + s_6)\,k_2 - s_6\,k_3 - S\Delta_2 \\
0 &= -s_6\,k_2 + (s_6 + s_7 + s_8 + s_9)\,k_3 - s_8\,k_4 - S\Delta_3 \\
0 &= -s_8\,k_3 + (s_8 + s_{10} + s_{11})\,k_4 - S\Delta_4
\end{aligned} \qquad (18)$$

und wenn wir für die Strecken s_1 bis s_{11}, dann deren Summe S und die Schlussfehler Δ_1 bis Δ_4 die oben angegebenen Zahlenwerthe ein-

führen, so ergeben sich die zur Bestimmung der Faktoren k_1 bis k_4 dienenden 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= +4{,}521\,k_1 - 1{,}473\,k_2 && - 2{,}533 \\
0 &= -1{,}473\,k_1 + 4{,}830\,k_2 - 1{,}011\,k_3 && + 4{,}930 \\
0 &= \quad - 1{,}011\,k_2 + 4{,}013\,k_3 - 0{,}801\,k_4 && + 3{,}161 \\
0 &= \quad - 0{,}801\,k_3 + 2{,}448\,k_4 && - 13{,}549\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Mit den hieraus gefundenen vier Werthen:

$k_1 = +1{,}0473 \qquad k_2 = +1{,}4947 \qquad k_3 = +0{,}7385 \qquad k_4 = +5{,}7763$

erhält man die gesuchten Verbesserungen und deren Quadrate wie folgt:

$v_1 = -\overset{cm}{1{,}05}$	$v_1^2 = \overset{\square cm}{1{,}1025}$
$v_2 = +1{,}49$	$v_2^2 = 2{,}2201$
$v_3 = +0{,}525$	$v_3^2 = 0{,}2756$
$v_4 = -0{,}72$	$v_4^2 = 0{,}5184$
$v_5 = -2{,}07$	$v_5^2 = 4{,}2849$
$v_6 = +0{,}61$	$v_6^2 = 0{,}3721$
$v_7 = +0{,}79$	$v_7^2 = 0{,}6241$
$v_8 = -3{,}21$	$v_8^2 = 10{,}3041$
$v_9 = -0{,}51$	$v_9^2 = 0{,}2601$
$v_{10} = +4{,}46$	$v_{10}^2 = 19{,}8916$
$v_{11} = -3{,}13$	$v_{11}^2 = 9{,}7969$
	$[v\,v] = 49{,}6504.$

Mit den vorstehenden Fehlerquadraten findet man nach Formel (10) den mittleren Kilometerfehler des Bayerischen Präcisionsnivellements

$$m = \overset{cm}{0{,}2228} = \overset{mm}{2{,}23}$$

und es würde derselbe noch viel weiter herabgehen, wenn die zu den Strecken s_{10} und s_{11} gehörenden Höheunterschiede d_{10} und d_{11} ausgeschlossen oder nach wiederholtem Nivellement verbessert worden wären.

2. Ausgleichung des Bayerischen Höhennetzes ohne Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Für ein Netz von wenig Polygonen, wie das Bayerische, verursacht die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate im Hinblicke

auf die Ausgleichungen von Dreiecksnetzen keine übergrosse Rechnung, obwohl auch diese zu dem Gewinne, welcher dadurch erreicht wird, in keinem richtigen Verhältnisse steht; wollte man aber die umfangreicheren Höhennetze von Deutschland, Oesterreich, Frankreich, Italien u. s. w. einzeln hienach ausgleichen, so würde sich die darauf zu verwendende Arbeit unerträglich steigern, und für das gesammte Europäische Netz wäre sie in Einem nicht durchführbar und man müsste dann doch zu Hilfsmitteln greifen, welche als streng-wissenschaftliche nicht mehr bezeichnet werden können.

Diese Erwägung und der Gedanke, dass es sich im Grunde nicht rechtfertigen lässt, warum die vorzüglichere Arbeit, welche auf irgend ein Polygon verwendet wurde, durch die minder gute eines anderen Polygons verschleiert werden soll, haben mich veranlasst, darüber nachzudenken, ob es nicht genüge, der Reihe nach alle das Umfangspolygon zusammensetzenden Einzelpolygone für sich auf Null auszugleichen und dabei für die gemeinschaftliche Seite zweier Nachbarpolygone die aus dem einen schon ausgeglichenen Vielecke gefundene Verbesserung beizubehalten. Und in der That fand ich, dass, wie auch immer die Einzelpolygone zusammenhängen, das Umfangspolygon und jede Zusammensetzung zweier oder mehrerer Polygone zu einem grösseren Polygon ebenfalls auf Null ausgeglichen sind, sobald die zusammengehörigen Einzelpolygone unter der eben ausgesprochenen Bedingung (dass nämlich für die gemeinschaftliche Seite zweier benachbarter Polygone die aus dem zuerst ausgeglichenen Vielecke hervorgegangene Verbesserung auch für das andere Polygon beibehalten werde) schliessen. Ich werde diesen als natürlich und einfach sich darstellenden Satz in den Sitzungsberichten der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften beweisen und für seine Verbreitung durch andere wissenschaftliche Zeitschriften sorgen; hier setze ich ihn als bereits feststehend voraus, und zeige nur, wie er auf den vorliegenden Fall angewendet wird.

Zunächst bemerke ich, dass mein Satz in diesem Falle sagt: wenn die vier ersten Gleichungen des Systems (1) auf Seite 113 erfüllt sind, so ist damit auch schon die fünfte erfüllt. Auf die allgemeine Function $2\Sigma = [p\mathfrak{vv}]$ werde ich also hier keine Rücksicht nehmen, wohl aber

am Schlusse dieses Abschnittes zeigen, wie sich die Quadratsummen der Fehler v und $\mathfrak{v}$ oder [vv] und [$\mathfrak{v}\mathfrak{v}$] zu einander verhalten.

Während es bei der strengeren Art der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Polygone in Rechnung zieht, ist dieses bei meinem Verfahren keineswegs der Fall: hier empfieht es sich, mit demjenigen Polygon zu beginnen, welches unter allen auszugleichenden den grössten Anschlussfehler hat, und dieses ist in dem vorliegenden Falle die mit IV bezeichnete Fichtelgebirgsschleife. Damit der eben erwähnte Unterschied deutlich in die Augen springt, werde ich zuerst die Ausgleichung der Polygone nach der Reihenfolge I, II, III, IV und dann in der umgekehrten Folge IV, III, II, I vornehmen.

a) Ausgleichung nach der Reihenfolge I, II, III, IV.

Sollen im Polygon Nr. I. (Regensburg-Passau-München-Regensburg) die Höhenunterschiede der Eckpunkte die Summe = 0 ergeben, so ist der Schlusssfehler $\Delta_1 = +\overset{m}{0},0202$ proportional den Verhältnissen $\frac{s_1}{S_I}$, $\frac{s_2}{S_{II}}$, $\frac{s_3}{S_{III}}$ auf die Höhenunterschiede d_1, d_2, d_3 zu vertheilen. Geschieht dieses, so sind die Verbesserungen:

$$\mathfrak{v}_1 = -\overset{m}{0},0056 \quad ; \quad \mathfrak{v}_2 = +\overset{m}{0},0000 \quad ; \quad \mathfrak{v}_3 = -\overset{m}{0},0066$$

und die verbesserten Höhenunterschiede: (21)

$$d_1' = +3\overset{m}{5},8667 \quad ; \quad d_2 = -21\overset{m}{7},5142 \quad ; \quad d_3' = +18\overset{m}{1},6475$$

Im Polygon II (Regensburg-München-Augsburg-Nürnberg-Regensburg) denken wir uns die Verbesserung v_3 an d_3 schon angebracht, der Schlussfehler wird dann $\Delta_2 + 0,0066 = 0,0393 + 0,0066 = \overset{m}{0},0459$ und die Verbesserung $-\overset{m}{0},0459$ ist nunmehr auf die Seiten s_4, s_5, s_6 proportional zu $\frac{s_4}{S_{II}-s_3}$, $\frac{s_5}{S_{II}-s_3}$, $\frac{s_6}{S_{II}-s_3}$ zu vertheilen. Dadurch erhalten wir die Verbesserungen:

$$\mathfrak{v}_4 = -\overset{m}{0},0083 \quad ; \quad \mathfrak{v}_5 = -\overset{m}{0},0238 \quad ; \quad \mathfrak{v}_6 = -\overset{m}{0},0138$$

und die verbesserten Höhenunterschiede: (22)

$$d'_4 = +32\overset{m}{,}0875 \quad ; \quad d'_5 = +179\overset{m}{,}5743 \quad ; \quad d'_6 = -30\overset{m}{,}0143 .$$

Für das Polygon III (Regensburg-Nürnberg-Neuenmarkt-Weiden-Regensburg) ist der Restfehler $\Delta_3 - \mathfrak{v}_6 = -0,0252 + 0,0138 = -\overset{m}{0},0114$ und desshalb sind die Verbesserungen:

$$\mathfrak{v}_7 = +\overset{m}{0},0051 \quad ; \quad \mathfrak{v}_8 = +\overset{m}{0},0000 \quad ; \quad \mathfrak{v}_9 = +\overset{m}{0},0033$$

und die verbesserten Höhenunterschiede: (23)

$$d'_7 = -38\overset{m}{,}6593 \quad ; \quad d'_8 = -48\overset{m}{,}8023 \quad ; \quad d'_9 = +57\overset{m}{,}4473 .$$

Für das Polygon IV (Weiden-Neuenmarkt-Franzensbad-Weiden) beträgt der Restfehler $\Delta_4 - \mathfrak{v}_8 = \overset{m}{0},1080 - \overset{m}{0},0030 = +\overset{m}{0},1055$ und es berechnen sich hieraus die Verbesserungen:

$$\mathfrak{v}_{10} = -\overset{m}{0},0617 \quad ; \quad \mathfrak{v}_{11} = -\overset{m}{0},0432$$

und die verbesserten Höhenunterschiede: (24)

$$d'_{10} = -100\overset{m}{,}2236 \quad ; \quad d'_{11} = +51\overset{m}{,}4213 .$$

Man kann sich durch Zusammenstellung der Zahlenwerthe überzeugen, dass folgende Gleichungen stattfinden, welche dem System (1) entsprechen, nämlich:

$$\begin{aligned}
& d'_1 + d'_2 + d'_3 = 0 \\
& -d'_3 + d'_4 + d'_5 + d'_6 = 0 \\
& -d'_6 + d'_7 + d'_8 + d'_9 = 0 \\
& -d'_8 + d'_{10} + d'_{11} = 0 \\
& d'_1 + d'_2 + d'_4 + d'_5 + d'_7 + d'_9 + d'_{10} + d'_{11} = 0
\end{aligned} \qquad (25)$$

Zugleich sieht man, dass die letzte Gleichung aus den vier ersten folgt, wenn diese addirt werden, wobei als selbstverständlich ange-

sehen wird, dass die verbesserten Höhenunterschiede d'_3, d'_6, d'_8 in den aufeinanderfolgenden Polygonen II, III, IV mit entgegengesetzten Vorzeichen einzuführen sind, weil sie in diesen auch in entgegengesetzter Richtung genommen werden, z. B. in I München-Regensburg, in II Regensburg-München; in II Nürnberg-Regensburg, in III Regensburg-Nürnberg u. s. w. In den vorstehenden fünf Gleichungen ist der Gang des Beweises meines Satzes angedeutet und ausgedrückt, dass ich diese anschauliche Art der Beweisführung jener abstracten vorziehe, welche sich auf die Natur und Zahl der Bedingungsgleichungen gründen lässt, und worüber ich mich in den oben erwähnten Sitzungsberichten ebenfalls näher aussprechen werde.

Stellt man die eben gefundenen Werthe der Verbesserungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ . . . . mit ihren Quadraten zusammen, wie es vorhin für die Verbesserungen v_1, v_2, v_3 . . . geschehen ist, und drückt man auch hier die $\mathfrak{v}$ in Meter und die $\mathfrak{v}^2$ in Quadratcentimeter aus, so gelangt man zu folgender Tafel:

$\mathfrak{v}_1 = + 0{,}0056^{m}$	$\mathfrak{v}_1^2 = 0{,}3136^{\square cm}$
$\mathfrak{v}_2 = - 0{,}0080$	$\mathfrak{v}_2^2 = 0{,}6400$
$\mathfrak{v}_3 = - 0{,}0066$	$\mathfrak{v}_3^2 = 0{,}4356$
$\mathfrak{v}_4 = - 0{,}0083$	$\mathfrak{v}_4^2 = 0{,}6889$
$\mathfrak{v}_5 = - 0{,}0238$	$\mathfrak{v}_5^2 = 5{,}6644$
$\mathfrak{v}_6 = - 0{,}0138$	$\mathfrak{v}_6^2 = 1{,}9044$
$\mathfrak{v}_7 = + 0{,}0051$	$\mathfrak{v}_7^2 = 0{,}2601$
$\mathfrak{v}_8 = + 0{,}0030$	$\mathfrak{v}_8^2 = 0{,}0900$
$\mathfrak{v}_9 = + 0{,}0033$	$\mathfrak{v}_9^2 = 0{,}1089$
$\mathfrak{v}_{10} = - 0{,}0617$	$\mathfrak{v}_{10}^2 = 38{,}0689$
$\mathfrak{v}_{11} = - 0{,}0432$	$\mathfrak{v}_{11}^2 = 18{,}6624$
	$[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 66{,}8372$.

Hier stellte sich nun als bemerkenswerth dar, dass die Quadratsumme der nach meiner Methode bestimmten Verbesserungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ . . . kleiner sich ergab als die der v_1, v_2, v_3 . . ., welche nach dem unveränderten Verfahren von Baeyer (Seite 116) berechnet wurden, indem erstere 66,8372 und letztere 72,4383 betrug.

Von der Ueberzeugung ausgehend, dass mein Näherungsverfahren

wohl einen nahezu gleichen aber keinen kleineren Werth für [vv] geben könne als ein richtiges auf der Methode der kleinsten Quadrate beruhendes Verfahren, untersuchte ich nun erst, wie oben (Seite 120) schon bemerkt, die Methode von Baeyer und fand, dass sich eine Unrichtigkeit in dieselbe eingeschlichen hat, indem sie eine Bedingungsgleichung und eine Unbekannte zu viel aufstellt.

b) Ausgleichung nach der Reihenfolge IV, III, II, I.

In der Fichtelgebirgsschleife (Polygon IV) ist der Anschlussfehler $\varDelta_4 = +0{,}1080^{\mathrm{m}}$ besonders gross, wahrscheinlich in Folge eines 1 Decimeter betragenden Ablesefehlers, der zur Zeit noch nicht aufgedeckt ist. Vertheilt man diesen Schlussfehler proportional den Seitenlängen über die Schleife Nr IV, so werden die in Meter ausgedrückten Verbesserungen an den Endpunkten der Strecken s ihrer absoluten Grösse nach gefunden aus der Gleichung:

$$\mathfrak{v} = \frac{\varDelta_4}{S_{IV}} \cdot s = \frac{0{,}108}{244{,}772} \cdot s = 0{,}0004412 \,.\, s$$

Hienach ergibt sich, wenn man für s nach einander die Werthe für s_8, s_{10}, s_{11} einsetzt und die den Höhenunterschieden d_8, d_{10}, d_{11} angehörigen Vorzeichen berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_8 &= -\overset{\mathrm{m}}{0{,}03535} = -\overset{\mathrm{cm}}{3{,}54} & \qquad \mathfrak{v}_8^2 &= \overset{\square\mathrm{cm}}{12{,}5316} \\ \mathfrak{v}_{10} &= -0{,}04268 = -4{,}27 & \mathfrak{v}_{10}^2 &= 18{,}2329 \\ \mathfrak{v}_{11} &= -0{,}02983 = -2{,}99 & \mathfrak{v}_{11}^2 &= 8{,}9401. \end{aligned}$$

Bringt man diese Verbesserungen an den Höhenunterschieden d_8, d_{10}, d_{11} an, so wird

$$\begin{aligned} d'_8 &= d_8 + \mathfrak{v}_8 = +\ 48{,}8053 - 0{,}0354 = +\ \overset{\mathrm{m}}{48{,}7699} \\ d'_{10} &= d_{10} + \mathfrak{v}_{10} = -100{,}1619 - 0{,}0427 = -100{,}2046 \\ d'_{11} &= d_{11} + \mathfrak{v}_{11} = +\ 51{,}4646 - 0{,}0299 = +\ 51{,}4347 \end{aligned}$$

und man erkennt sofort, dass $d'_8 + d'_{10} + d'_{11} = 0$ ist, also das Polygon IV schliesst.

In der Schleife Nr III ist $\varDelta_3 = -0{,}0252$ und $S_{III} = 403{,}108^{\mathrm{Km}}$. Da jedoch die gemeinsame Strecke Neuenmarkt-Weiden oder s_8 von $80{,}112^{\mathrm{Km}}$

Länge bereits um $\mathfrak{v}_8 = \overset{m}{0{,}0354}$ verbessert ist und hieran nichts mehr geändert werden darf, so trifft auf die übrigen 3 Strecken dieses Polygons nur mehr ein Schlussfehler

$$\Delta''' = \Delta_3 + \mathfrak{v}_8 = -\,0{,}0252 + 0{,}0354 = +\,\overset{m}{0{,}0102}$$

welcher nach der Formel zu vertheilen ist:

$$\mathfrak{v} = \frac{\Delta'''}{S_{III} - s_8} \cdot s = \frac{0{,}0102}{322{,}996} \cdot s = 0{,}000032\,.\,s\,.$$

Setzt man für s nach einander die Werthe s_6, s_7 s_9 ein und berücksichtigt die Vorzeichen der Höhenunterschiede d_6, d_7, d_9, so folgt hieraus

$$\mathfrak{v}_6 = -\,\overset{m}{0{,}003233} = -\,\overset{cm}{0{,}33} \qquad \mathfrak{v}_6^2 = \overset{\square cm}{0{,}1089}$$
$$\mathfrak{v}_7 = -\,0{,}004155 = -\,0{,}42 \qquad \mathfrak{v}_7^2 = 0{,}1764$$
$$\mathfrak{v}_9 = -\,0{,}002726 = -\,0{,}27 \qquad \mathfrak{v}_9^2 = 0{,}0729.$$

Werden diese Verbesserungen an den Höhenunterschieden d_6, d_7, d_9 angebracht, so nehme diese letztere folgende Werthe an:

$$d_6' = d_6 + \mathfrak{v}_6 = +(30{,}0005 - 0{,}0033) = +\,\overset{m}{29{,}9972}$$
$$d_7' = d_7 + \mathfrak{v}_7 = -\,(38{,}6644 + 0{,}0042) = -\,38{,}6686$$
$$d_9' = d_9 + \mathfrak{v}_9 = +\,(57{,}4440 - 0{,}0027) = +\,57{,}4413.$$

Auch hier schliesst das Polygon, indem $d_6' + d_7' + d_8' + d_9' = 0$ ist.

In der Schleife Nr II ist $S_{II} = 482{,}993$ und die Strecke, mit der sie an Nr III grenzt, $s_6 = \overset{Km}{101{,}083}$, folglich beträgt die Länge, auf welche der nunmehrige Schlussfehler $\Delta'' = \Delta_2 + \mathfrak{v}_6 = 0{,}0394 + 0{,}0033 = \overset{m}{0{,}0426}$ zu vertheilen ist, $S'' = 482{,}993 - 101{,}083 = \overset{Km}{381{,}910}$. Die Vertheilung geschieht nach der Formel

$$\mathfrak{v} = \frac{\Delta''}{S''}\,s = \frac{\Delta_2 + \mathfrak{v}_6}{S_{II} - s_6}\,s = \frac{0{,}0426}{381{,}91}\,s = 0{,}000111\,.\,s$$

und man findet hieraus durch Einsetzung der entsprechenden Werthe von s und mit Rücksicht auf die Vorzeichen von d_3, d_4, d_5

$$\mathfrak{v}_3 = -\,\overset{m}{0{,}01635} = -\,\overset{cm}{1{,}64} \qquad \mathfrak{v}_3^2 = \overset{\square cm}{2{,}6896}$$
$$\mathfrak{v}_4 = -\,0{,}00673 = -\,0{,}68 \qquad \mathfrak{v}_4^2 = 0{,}4624$$
$$\mathfrak{v}_5 = -\,0{,}01934 = -\,1{,}94 \qquad \mathfrak{v}_5^2 = 3{,}7636.$$

Hiermit erhält man die verbesserten Höhenunterschiede:

$$d_3' = d_3 + \mathfrak{v}_3 = -\,(181{,}6541 + 0{,}0164) = -\,181\overset{\mathrm{m}}{,}6705$$
$$d_4' = d_4 + \mathfrak{v}_4 = +\,(\ 32{,}0958 - 0{,}0068) = +\ \ 32{,}0890$$
$$d_5' = d_5 + \mathfrak{v}_5 = +\,(179{,}5981 - 0{,}0194) = +\,179{,}5981$$

und wenn man zu diesen Unterschieden noch $d_6' = +\,29\overset{\mathrm{m}}{,}9972$ addirt, so wird die Summe wiederum = 0, d. h. das Polygon II schliesst sich wie die vorhergehenden.

In der Schleife Nr I ist der neue Schlussfehler $\varDelta' = \varDelta_{\mathrm{I}} + \mathfrak{v}_3 = 0{,}0202 + 0{,}0164 = 0\overset{\mathrm{m}}{,}0366$ auf die Länge $S' = S_{\mathrm{I}} - s_3 = 452{,}062 - 147{,}266 = 304\overset{\mathrm{Km}}{,}796$ nach der Formel zu vertheilen:

$$\mathfrak{v} = \frac{\varDelta'}{S^1}\, s = \frac{\varDelta_1 + \mathfrak{v}_3}{S_{\mathrm{I}} - s_3}\, s = \frac{0{,}0366}{304{,}796}\, s = 0{,}00012\ s.$$

Setzt man nach einander die Werthe von s ein und berücksichtigt die Vorzeichen von d_{I} und d_2, so werden die Verbesserungen:

$$\mathfrak{v}_1 = -\,0{,}01509 = -\,1{,}51 \qquad \mathfrak{v}_1^2 = 2{,}2801$$
$$\mathfrak{v}_2 = -\,0{,}02148 = -\,2{,}15 \qquad \mathfrak{v}_2^2 = 4{,}6225$$

und hiemit die Höhenunterschiede:

$$d_1' = d_1 + \mathfrak{v}_1 = +\,(\ 35{,}8723 - 0{,}0151) = +\ \ 35\overset{\mathrm{m}}{,}8572$$
$$d_2' = d_2 + \mathfrak{v}_2 = -\,(217{,}5062 + 0{,}0215) = -\,217{,}5277.$$

Auch hier ist $d_1' + d_2' + d_3' = 0$, d. h. das Polygon I schliesst sich. Dasselbe ist der Fall sowohl mit dem ganzen Umfange Regensburg-Passau-München-Augsburg-Nürnberg-Neuenmarkt-Franzensbad-Weiden-Regensburg, als auch mit jeder anderen Zusammensetzung von zwei oder drei Schleifen, z. B. die Regensburg-Passau-München-Augsburg-Neuenmarkt-Weiden-Regensburg. Man überzeugt sich hievon, indem man die algebraischen Summen der verbesserten Höhenunterschiede d' herstellt. Es ist nämlich in dem ersten Falle:

$d_1' = +\ \ 35{,}8572$	$d_3' = -\,217{,}5277$
$d_4' = +\ \ 32{,}0890$	
$d_5' = +\,179{,}5787$	$d_7' = -\ \ 38{,}6686$
$d_9' = +\ \ 57{,}4413$	
$d_{11}' = +\ \ 51{,}4357$	$d_{10}' = -\,100{,}2046$
$+\,356{,}4009$	$-\,356{,}4009$

und in dem zweiten Falle:

$$d'_3 = -181,6705 \qquad d'_4 = +32,0890$$
$$d'_7 = -38,6686 \qquad d'_5 = +179,5787$$
$$d'_8 = -48,7699 \qquad d'_9 = +57,4413$$
$$-269,1090 \qquad +269,1090.$$

Stellt man die neuen Verbesserungen der 11 Strecken und ihre Quadrate wie früher in einer Tafel zusammen, so gestaltet sich dieselbe wie folgt:

m	□cm
$\mathfrak{v}_1 = -0,0151$	$\mathfrak{v}_1^2 = 2,2801$
$\mathfrak{v}_2 = -0,0215$	$\mathfrak{v}_2^2 = 4,6225$
$\mathfrak{v}_3 = -0,0164$	$\mathfrak{v}_3^2 = 2,6896$
$\mathfrak{v}_4 = -0,0068$	$\mathfrak{v}_4^2 = 0,4624$
$\mathfrak{v}_5 = -0,0194$	$\mathfrak{v}_5^2 = 3,7636$
$\mathfrak{v}_6 = -0,0033$	$\mathfrak{v}_6^2 = 0,1089$
$\mathfrak{v}_7 = -0,0042$	$\mathfrak{v}_7^2 = 0,1764$
$\mathfrak{v}_8 = -0,0354$	$\mathfrak{v}_8^2 = 12,5316$
$\mathfrak{v}_9 = -0,0027$	$\mathfrak{v}_9^2 = 0,0729$
$\mathfrak{v}_{10} = -0,0427$	$\mathfrak{v}_{10}^2 = 18,2329$
$\mathfrak{v}_{11} = -0,0299$	$\mathfrak{v}_{11}^2 = 8,9401$
	$[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 53,8810.$

Es ist also in dem Falle, wo man mit der Ausgleichung in der Schleife beginnt, welche den grössten Schlussfehler hat, hier der Fichtelgebirgsschleife, die Quadratsumme der Verbesserungen kleiner als in dem ersten Falle, wo sie 66,8372 beträgt, und wiederum kleiner als in dem Falle der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate und dem Verfahren von Jordan, welches nach Seite 120 $[v'v'] = 58,9872$ ergibt, während die hiesige Quadratsumme (53,8810) allerdings etwas grösser ist als auf Seite 123 nach dem von mir verbesserten Baeyerschen Verfahren gefundene Summe von (49,6504).

Ich bin zur Zeit noch nicht im Stande genau zu sagen, woher es kommt, dass die nach meinem Verfahren gefundene Quadratsumme kleiner ist als die nach Jordan erhaltene, falls nicht die Gewichte der Beobachtungen, welche bei mir alle gleich sind, die Schuld tragen; dass der obwaltende Unterschied aber nicht von einem Rechnungsfehler herrühre, möchte ich um so sicherer annehmen, als mir mein Assistent,

Herr Privatdocent Dr. Schmidt, welcher die Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate durchführte, alle Proberechnungen vorlegte, welche mit den ersten Rechnungen vollständig stimmen, und als ich die vorstehende erste Ausgleichung nach meiner Näherungs-Methode selbst controlirte und die darauf folgende zweite selbst doppelt durchführte.

Der Umstand, dass hier die Verbesserungen ohne Ausnahme negativ werden, rührt von dem auffallend grossen Anschlussfehler $\Delta_4 = + 0{,}1080$ der Fichtelgebirgsschleife (Polygon IV) her und beweist eigentlich die Berechtigung zum vorläufigen Ausschlusse der Schleife aus dem der Ausgleichung unterliegenden Netze; denn die Verbesserung $\mathfrak{v}_8 = - 0^m{,}0354$, welche an der Strecke s_8 anzubringen ist, überwiegt jede der Strecken s_1 bis s_7. Ich will jedoch diesen Ausschluss nicht vornehmen, ohne noch einmal untersucht zu haben, ob nicht doch in einer der Strecken s_8, s_{10}, s_{11}, namentlich in der mittleren s_{10} — trotz der bereits ausgeführten Controlmessung — ein Ablesungsfehler von 1 Decimeter steckt, und ich kann mit diesem Ausschlusse umsomehr warten, als ich nicht vorhabe, die Ergebnisse der vorstehenden Ausgleichungsrechnungen sofort zur endgiltigen Cotenbestimmung zu benützen. Diese behalte ich dem fünften und letzten Hefte meiner Mittheilungen über das Bayerische Präcisionsnivellement, welches im Jahre 1878 erscheinen soll, um so mehr vor, als bis dahin wohl auch ein definitiver Nullpunkt des Europäischen Höhennetzes festgestellt und mein Vorschlag zur einfacheren Ausgleichung der Präcisionsnivellements, den ich hier gemacht habe und in den Sitzungsberichten der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften begründen und erweitern werde, von Berufenen geprüft sein wird. Hier kam es mir nur darauf an zu zeigen, dass die Ausgleichung der unvermeidlichen Nivellirungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate noch Manches zu wünschen übrig lässt und mit annäherd gleichem Erfolge auch ohne diese Methode für jedes beliebig grosse Höhennetz ohne Schwierigkeit vollzogen werden kann.

Bericht

über

Anlage des Herbariums

während der Reisen

nebst

Erläuterung der topographischen Angaben.

Von

Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski.

Vorgelegt in der Classensitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften am 6. Mai 1876.

I.

Das botanische Material.

Einleitende Bemerkungen. Beobachtungen. Manuscripte und landschaftliche Ansichten — Das Sammeln. Wahl der Gebiete. Eingeborne als Gehülfen; indisches Papier. — Transscription und Betonung bei lokalen Angaben. Art der Anwendung im Herbarium. Vereinfachte Form. Bezeichnung der Höhenangaben. Wahl des Maasses. — Die directen Höhenbestimmungen und hypsometrische Angaben im Herbarium.

Das Rubriciren und die Bearbeitung des Herbariums. Gruppiren nach Landesregionen, Provinzen und Lokalitäten. Laufende Nummern und Doubletten. Zeit des Einsammelns. — Systematische Untersuchung. Allgemeine Bearbeitung durch Dr. Schultes. Einzelnarbeiten und Publikationen.

Einleitende Bemerkungen.

Die Beobachtungen über Vegetations-Verhältnisse während unserer Reisen und die Ergebnisse systematischer Untersuchung der gesammelten Pflanzen werde ich in einem der später folgenden Bände der „Results of a scientific Mission to India and High Asia“ [1]) vergleichend zusammenstellen.

Die botanischen Aufzeichnungen wurden nach Rückkehr nach Europa topographisch, und innerhalb der Gebiete nach der Zeit des

---

1) Es wird diess Vol. VII der „Results“ sein, enthaltend A. Botanik; B. Zoologie.

Bis jetzt sind erschienen Vol. I: Astronomische Ortsbestimmungen und magnetische Beobachtungen. Vol. II: Hypsometrie. Vol. III: Topographie des westlichen und nördlichen Hochasien; philologisches Glossarium geographischer Namen. Vol. IV: Meteorologie 1. Theil. Zu folgen haben, nebst dem oben erwähnten Bande, Vol. V: Meteorologie 2. Theil. Vol. VI: Geologie. Vol. VIII: Ethnographie. Vol. IX: Geographische Schilderungen.

Leipzig, F. A. Brockhaus, London, Trübner u. Com.

Vom Atlas, zu 120 Tafeln, meist landschaftlicher Ansichten, berechnet, sind bis jetzt 43 publizirt.

Aufenthaltes geordnet und zusammengestellt, und bilden jetzt 2 Bände unserer „Beobachtungs-Manuscripte“[2]); der eine, Band 41 der ganzen Reihe, enthält: „Pflanzengeographie. — Periodische Erscheinungen der Pflanzen. — Schneegrenzen;“ Band 42: „Baum-Durchschnitte. — Baum- und Pflanzen-Namen (der Eingebornen), auch Nutz-Pflanzen. — Pflanzen-Sammlungen, allgemeines.“

An diese beiden Bände reihen sich noch einige Angaben auch über botanische Beobachtungen und über Sammlungsmaterial in den Papieren aus dem Nachlasse unseres Bruders Adolph. Es folgte innerhalb der nächsten 3 Jahre, bis 1860, das Material für Band 44 und 45, 1862 für Band 46, bestehend aus Manuscripten Adolph's, sowie aus einigen Daten der wissenschaftlichen Correspondenz und der meteorologischen Beobachtungen an zurückgelassenen Instrumenten. Die letzte Gruppe von Adolph's Aufschreibungen, die ich erst 1867 bei wiederholtem Besuche London's in einer verspäteten Nachsendung von Gegenständen seines Nachlasses auffinden konnte — Band 47 der Reihe[3]) — reicht vom 14. Juni bis 11. August 1857, bis 15 Tage vor dessen Ermordung zu Káshgar[4]).

Aufnahme landschaftlicher Ansichten, von denen ich viele auch in den bis jetzt erschienenen systematischen Bearbeitungen einzelner Familien zu citiren Gelegenheit hatte zur Charakterisirung der Vegetationsformen im Grossen, war von meinem Bruder Adolph und von mir all' unseren Routen entlang durchgeführt worden; mit den Aquarellen aus Adolph's Nachlass liegen jetzt 751 Blätter vor. Geordnet habe ich nun auch die Landschafts-Studien in objektiver Weise wie die Manuscripte. Die bei Citaten genannten General-Nummern sind Bezeichnung innerhalb der ganzen Reihe[5]); diese konnten in gleicher

2) Die Art der Buch-Führung während der Reise und das angewandte Verfahren der Repartition des Aufgeschriebenen nach Gegenständen habe ich erläutert, Band I. Seite 232, in meiner descriptiven deutschen Publikation „Reisen in Indien und Hochasien“. 4 Bände. Jena, H. Costenoble, 1869—1876

3) Die drei bis 1862 eingetroffenen Bände sind gleichfalls noch unter sich objektiv geordnet; Band 47 ist nicht mehr umgelegt worden.

4) Als Bericht darüber legte ich vor „Neue Daten über den Todestag“, in Sitzung der math.-phys. Classe der k. b. Akad., 6. Februar 1869.

5) Gruppe IX. des „Cataloges der Handzeichnungen“, Nr. 201 bis 249 sind ausschliesslich Baumstudien und Vegetations-Gruppen.

Weise auch auf den Tafeln des Atlas der „Results“ sowie auf den Holzschnitts-Objekten der „Reisen“ beibehalten werden.

Ein Herbarium anzulegen war uns vor allem wichtig in Hochasien[6]), welches von den Ketten des Himálaya, das Karakorúm und des Künlún in stetigem gegenseitigen Anschlusse gebildet ist, und dessen Erhebungen in seinen Kämmen und Hochthälern sowie in seinen Gipfeln nirgend sonst auf der Erde von den entsprechenden Formen der Terraingestaltung erreicht sind.

Konnte auch bei weitem nicht das ganze grosse Gebirgsland in allen Theilen von uns begangen werden, für welche etwa Modificationen der Flora sich annehmen lassen, so boten sich doch längs vieler unserer Routen grosse überhaupt noch gar nicht von Europäern bereiste Strecken, sowie mehr noch solcher, für welche wenigstens keine speziellen botanischen Beobachtungen vorgelegen haben. Dabei zeigten sich wegen der Grösse der Horizontal-Dimensionen ebensowohl bedeutende Verschiedenheiten im Charakter des Klimas im Allgemeinen, als auch, der grossen Höhen wegen, vielfache und sehr bestimmte pflanzengeographische Daten zur Beurtheilung des direkten Einflusses der Höhe.

In Indien waren von uns für das Herbarium[7]) zur Bestimmung der Pflanzen-Begrenzung gegen Süden verschiedene Strecken längs dem südlichen Fusse des Himálaya, sowie zum Vergleiche mit den Vorstufen des Hochgebirges indische Bergregionen, soweit die Umstände es erlaubten, berücksichtigt worden; in mehr vereinzelten Fällen hatte Vegetationsentwicklung bei ungewöhnlicher Bodenbeschaffenheit, in Umgebungen von Salzquellen u. s. w. zu beobachten sich geboten. Stetiges

---

6) Vergleichende Zusammenstellung der allgemeinen Verhältnisse der Bodengestaltung enthält Bd. II. der „Reisen“, 1872, wie folgt:

Topographische Definition Hochasiens. Richtung der drei Hauptketten. — Passhöhe der Kämme. — Die Ränder des Gebirgsstockes. — Landschaftliche Formen der Hauptkette im Innern. — Massenerhebung und Flächenausdehnung (S. 3—18) Vorausgehend hatte ich in den „Sitzungsberichten“ der k. b. Akad. der Wissensch. gegeben: „Erläuterung der Gebiete Hochasiens“ 5. November 1870.

7) Für Baumdurchschnitte jedoch war von uns in den übrigen Theilen der indischen Halbinsel, weil mehr des Neuen in dieser Art auch für Indien selbst sich bot, das Sammeln in gleicher Weise wie in Hochasien vorgenommen worden; es hat sich dabei sehr verschiedenartiges Material gefunden, worüber ich später gleichfalls zu berichten versuchen werde.

Fortsetzen des Sammelns, wie in den Gebirgsregionen Hochasiens nördlich von Indien, war in der indischen Halbinsel nicht durchzuführen gewesen; bei der Grösse der Dimensionen und bei dem für Europäer meist so ungünstigen Charakter des Klimas war in Indien auch eine ganz andere Art des Reisens nothwendig geworden.

Systematisch neuen Materiales hätte sich in diesen Regionen überhaupt verhältnissmässig nur wenig von uns erwarten lassen, nachdem für die Flora Indiens von berühmten Männern des Faches und meist unter Umständen permanenten oder nur wenig veränderten Aufenthaltes ohnehin seit langer Zeit so vielseitig und so eifrig schon gearbeitet worden ist.

Für die Vervollständigung des „Herbariums" während der Reisen, sowie für die meisten Theile unserer Sammlungen, waren uns Eingeborene als Gehülfen vorherrschend sehr nothwendig. Für den Reisenden selbst häuft sich so viel der eigenen Arbeit, besonders wenn physikalische und geologische Untersuchungen mit den Beobachtungen der Terrainverhältnisse und mit der Darstellung derselben in Karte oder in landschaftlichem Bilde sich verbinden sollen. In hohen Gebirgen wirken nur zu oft auch ungünstige und überdies neue Wege noch erschwerend oder, periodisch, unerwartete Störungen des Klima. Wenigstens liess es sich durchführen, bei unmittelbarem Besprechen mit den Sammlern bei der Signatur der eingelegten Pflanzen auch für das von diesen gelieferte Material die nöthigen Angaben zu erhalten.

Unter den Indiern war, auch im Himálaya, die Wahl von Sammlern nicht selten durch Kastenvorurtheile, wenn auch nur fingirter Art, erschwert; Strebsamkeit und eigenes Interessefinden an der Sache blieb unter allen Umständen zu wünschen übrig. Doch gelang es nach und nach, für die letzten Jahre eine verhältnissmässig gute Auswahl zu treffen [8]), und bei den Pflanzensammlern Sinn zu wecken für einen gewissen Grad der Vollständigkeit des zu Bietenden.

Unvollkommen waren die Leistungen der Eingebornen als Sammler immer darin, dass sie sich zum Einschlagen eines ihnen neuen Weges, auch wenn mehrere derselben zusammen gehen konnten und wenn keine

---

8) Personal-Notiz über die „Collectors" ist in den „Results" vol. I p. 40/41 gegeben.

ungewöhnlichen Terrainschwierigkeiten zu erwarten gewesen wären, nicht leicht entschlossen. Selbst die Tibeter waren nur arbeitskräftig und ausdauernd aber nicht unternehmend im Sinne guter Führer. Zum gründlichen Durchsuchen isolirter Felsenriffe auf vereinzeltes hohes Auftreten von Vegetation nahe ihrer oberen Grenze kam es meist erst dann, wenn wir selbst den Weg hinan aufsuchen halfen, mochte für uns die Zeit auch noch so sehr beschränkt sein.

Vortheilhaft war es, wo Indier sich engagiren liessen, dass sowohl unter den Hindús als unter den Mussalmáns meist solche sich fanden, die lesen und schreiben konnten und das Material, das sie vorlegten und besprachen, schon ein wenig signirt und registrirt hatten. Auch dazu konnte man sie dann benützen, dass sie bei deutlichem Auftreten von Grenzen grosser Gewächse, wie Bäume und Sträucher, sowie bei den letzten Weidestellen u. s. w. die Zeit der Ankunft bezeichneten. Bei ihrer im übrigen, mit europäischen Zuständen verglichen, so niederen Bildungsstufe, ist dies sehr zu schätzen, da ja in vielen Ländern Europas gerade das Schreiben erst in ziemlich neuer Zeit ganz allgemein geworden ist.

In Tíbet, sowie auf meinen Routen im Süden der Himálaya-Kette innerhalb der östlichen von tibetischer Raçe bewohnten Theile, waren die Verhältnisse wieder ganz andere. Einige recht brauchbare Sammler liessen auch dort sich finden; diese waren dann robuster sowie im Klima grosser Höhen ausdauernder, als die Indier, die uns in die Gebirge noch begleiteten, und an sich kluge Tibeter zeigten auch, unmittelbar durch ihre Lebensweise bedingt, vielmehr Sinn für organische Formen als die Indier „Sogar Petrefacte hatten in manchen Theilen von Tíbet, zu unserer Ueberraschung, schon die Aufmerksamkeit der Eingeborenen erregt, und einige ungewöhnlich hübsche Stücke (von Wirbelthieren) waren von ihnen schon als Curiosa aufbewahrt, was für uns im Vervollständigen der Sammlung sehr günstig war“ [9]).

---

9) Aus „Reisen“, Bd. II: „Das obere Sátlej-Gebiet“, S. 61. —
Felsarten aber sind schon ungleich schwerer zu beurtheilen; Eingeborne konnten für solche nie mit genügendem Erfolge als Sammler benützt werden. Ueberdies ist für Felsarten die Bedeutung der Exemplare auch so wesentlich von einer richtigen Beurtheilung der Art des Anstehens der Gesteine während des Sammelns selbst bedingt.

Bei der tibetischen Raçe jedoch war es sehr selten, dass ausser den höheren Lámas ein Eingeborener schreiben konnte; nur bei den Lépchas in Síkkim war das Verhältniss darin etwas besser

Von den Pflanzensammlern, ebenso wie von unseren Shikáris (oder „Jägern") für zoologisches Material, hatten sich einige meist unseren eigenen Zügen anzuschliessen; nur da, wo wir gegen Norden verkleidet vordringen mussten, in verschiedenen Theilen von Tíbet und in Turkistán, waren wir auch im Sammeln ganz auf uns selbst beschränkt. Bei vielen Gelegenheiten dagegen war es möglich, in dieser Art das Gebiet der Sammler auszudehnen, dass einige derselben auf Seitenwegen ausgesandt wurden, oder auch dass man Strecken, die man selbst sehr günstig gefunden hatte, ohne lang genug sich aufhalten zu können, nochmal beschicken konnte[10]). Letzteres kam bei mir in Síkkim, bei Adolph mehrmals in Bálti vor.

Papier zum Einlegen der Pflanzen hätte in den Gebirgsregionen häufig ohne besondere Vorsicht gänzlich gefehlt. In Indien dagegen war an ordinären Papiersorten von mittlerer und von geringer Stärke, so ziemlich nach europäischer Weise gefertigt[11]), kein Mangel. In den grösseren Städten bis hinauf zum Pănjáb sind überall Papiermühlen, deren Produkte — Handpapier, aber oft verhältnissmässig grossen Formates — meist auch in den kleinen isolirt gelegenen Bazárs, entfernt von den gewöhnlichen Verkehrsrouten zu haben sind. Die Preise waren von Europäern beurtheilt nicht zu hoch zu nennen, wenn auch noch immer sehr bedeutend für die stets so sehr beschränkten Vermögensverhältnisse

---

10) Uebersicht des „Itinerars", nach den einzelnen Routen und nach der Zeit der Märsche, auch getrennte Routen unserer Begleiter einschliessend, ist für Indien und für Hochasien in den „Results", vol. I p. 11—35 gegeben mit Nachträgen, über Adolph's letzte Routen, in vol. II, p. 526—546.

11) Die chinesische Erfindung der Papierfabrication aus Gewebe-Stückchen ist über Indien durch die Araber nach Europa gekommen: nach Spanien wahrscheinlich im 9 oder 10 Jahrhundert. Für Deutschland gilt 1470 als die Zeit der Einführung der Fabrication.

Der alte Papyrus, wie Herr Prof. Lauth mir mittheilte, ist ausschliesslich aus Fasern des Cyperus Papyrus L. gefertigt. Die Fasern zeigen sich in diesem Papiere sich kreuzend übereinander gelegt, und ihre Cohäsion ist durch Klebestoffe unter Anwendung starken Druckes hervorgebracht. Es war diess demnach ein Verfahren einfacher noch als die so gleich zu erwähnende Papieranfertigung im Hochasien: dagegen konnte in Aegypten auch nur die eine Pflanze ausschliesslich dazu benützt werden.

der Eingebornen. Die besseren Sorten Schreibpapieres für unsere Manuscript-Bücher hatten wir direkt aus den officiellen Stores beziehen dürfen, ebenso das Zeichnungspapier. Es war uns dies um so schätzenswerther, weil damals wenigstens solche Qualitäten nicht einmal für Geld in nöthiger Auswahl und Menge zu finden gewesen wären.

Auf der indischen Seite des Himálaya, besonders in Népal, wird Papier als unmittelbares Pflanzenprodukt aus der Rindenfaser verschiedener Daphne-Species[12]) gemacht, und diese Papiersorten sind es auch, die meist als Waare ihre Verbreitung nach Tíbet finden, vorzugsweise von Nepál aus. Doch gibt es in Tíbet, in einzelnen der wenigen grossen Städte, gleichfalls eine ähnliche Papierfabrikation; die dort benützten Pflanzen sind Astragalus-Species, die nicht geschält werden, sondern unmittelbar nach dem Ausreissen nur die Blätter etwas abgestreift erhalten, ehe sie zerkleinert werden. Die Farbe dieser Faserpapiere ist gelblichgrau, oft ziemlich dunkel und die Fläche ist meistens etwas rauh; günstig aber ist die bedeutende Consistenz, die Zähigkeit, bei stets geringer Härte. Zum Einlegen von Pflanzen waren die noch etwas porösen Sorten sehr gut zu verwenden; dagegen war es nöthig, sobald man aus dem Gebiete der Fabrikation auf einige Zeit sich entfernte, sehr vorsichtig mit Vorrath sich zu versehen.

Transscription und Betonung.

Bei der Wiedergabe von Worten aus den Sprachen in den betreffenden Gebieten ist die Transscription hier dieselbe wie in meinen früheren akademischen Mittheilungen, auch in den deutschen und englischen Bänden über unsere Reisen. Auf den Folien des Herbariums jedoch zeigt sich in einigen Theilen etwas Abweichung davon weil das Ordnen dieses Materiales, wegen der zur Conservirung nothwendigen Vorsicht, als eine der frühesten Arbeiten nach der Rückkehr vorge-

---

12) „Am häufigsten wird zur Papierfabrikation Daphne cannabina Lourd. benützt. In den tropischen Gebieten Indiens hat man vergebens versucht, Daphne-Arten zu kultiviren; die Faser der Banane, die man in neuester Zeit ausser zur Seilfabrikation auch als Papiermaterial zu verwenden suchte, bietet kein entsprechend gutes Material."
„Reisen", Bd. II. S. 249.

nommen wurde, früher als die definitive Entscheidung über alle Einzelheiten des später zu wählenden Alphabetes getroffen war.

Als erster Führer dienten uns dabei die trefflichen Publikationen von Lepsius über die Principien eines „Standard-Alphabet", und es ist auch in der gegenwärtigen Form die gewählte Transscription wesentlich nur darin verschieden, dass, den gewöhnlichen Verhältnissen nichtphilologischer Publikationen entsprechend, die Menge des zu Unterscheidenden möglichst reduzirt und in der Form vereinfacht wird. Letzterer Umstand ist es auch, der unter anderem uns veranlasste, „j" und „ch", im Sinne der phonetischen Deutung im Englischen, zu schreiben statt der von Lepsius gewählten Zeichen „dž" und „tš", obwohl letztere Art der Darstellung im Prinzipe die berechtigte ist.

Diese und ähnliche kleine Abweichungen auf den Folien des Herbariums durften, wie ich glaubte, hier nicht ganz unerwähnt bleiben, weil in einigen bis jetzt erschienenen Publikationen systematischen Details für die Standort-Bezeichnungen die gleiche Schreibweise wie im Herbarium beibehalten ist, und weil demnach dort die hiemit motivirten Differenzen sich bemerkbar machen.

Da Folien des Herbariums mit gleichen Standort-Bezeichnungen meist ziemlich zahlreich sind, und da überdies bei der Rückkehr von den Reisen, als das gewünchte Material noch in unveränderter Reihenfolge vorlag, auch die Anzahl der Folien für jeden Standort sich gut übersehen liess, sind die Standort-Bezeichnungen auf gedruckten Folien hergestellt worden, sehr sorgfältig ausgeführt ungeachtet des ungewöhnlichen Details in der Unger'schen Druckerei zu Berlin [13]).

Angabe der Betonung [14]) hatte sich bei den topographischen Namen, die sich boten, als sehr gut charakterisirend erwiesen, und ist auf den Folien des Herbariums sowie in unseren direct gegebenen akademischen und selbstständigen Publikationen stets beibehalten werden.

---

13) Es war diess auch desshalb von Vortheil, weil bei den asiatischen Formen localer Bezeichnungen beim Drucke der Bearbeitungen sonst besonders häufig Inconsequenzen in der Wiedergabe der Ortsnamen vorgekommen wären, welche, wo Revision mir nicht vorlag, schon jetzt nicht ganz sich hatten vermeiden lassen.

14) Es konnten sowohl Haupt- als Nebenaccente uuterschieden werden; in den Publikationen sowie im Herbarium sind nur erstere angebracht.

Bei Abhandlungen, die in wissenschaftlichen botanischen Zeitschriften erscheinen, lässt sich — wegen der etwas ungewöhnlichen Combinationen der dabei nothwendigen Typen — Anwendung der Accente nicht durchführen.

Da gerade als Pflanzen-Standorte so viele Worte der Eingebornen anzuführen waren, sind hier nochmals in Kürze die Einzelheiten der dabei befolgten Methode[15]) zusammengestellt.

Das angewandte Alphabet.

a (ā ă ȧ ã), ä; b (bh); ch (chh); d (dh); e (ē ĕ ẽ); f; g (gh); h; i (ī); j (jh); k (kh), k̲h̲; l (lh); m; n; o (ō ŏ), ö; p (ph); r (rh); s; sh; t (th); u (ū), ü; v̄; y; z.

Die Aussprache.

Vocale:

1) a, e, i, o, u, wie im Deutschen.
2) ä, ö, ü, wie im Deutschen.
3) Diphthongen geben den Ton der beiden nebeneinandergestellten Vocale (was z. B. im Deutschen nicht immer so ist; deutsch lautet = daütsch, frei = frai, etc.). Diärese eines Diphthongen tritt stets ein und ist dann auch so bezeichnet, wenn der Accent des Wortes auf den zweiten der beiden Vocale fällt; in den seltenen Fällen, wo Diärese in anderen Silben vorkommt, ist sie hier nicht bezeichnet.
4) ¯ über einem Vocale zeigt an, dass er lang ist. (Nur speciell angegeben, wo Unterscheidung nöthig).

Consonanten:

1) b, d, f, g, h, k, l, m, n, p, r, s, t werden ausgesprochen wie im Deutschen.
2) h nach einem Consonanten lautet als hörbare Aspiration, mit Ausnahme der Combinationen ch, sh und k̲h̲.
3) ch ist gleich dem deutschen tsch.
4) j gleich dem deutschen dsch.
5) sh gleich dem deutschen sch.
6) k̲h̲ gleich dem deutschen ch.
7) v̄ gleich dem deutschen w.
8) y gleich dem deutschen j.
9) z ist weiches s, wie im englischen Worte „zero“.

Accente.

Bei jedem mehrsilbigen Worte ist der Vocal, auf welchen der

15) Erläuterung über Transscription und Betonung ist gegeben in „Results“ vol. III p. 137—160.

(Vocale:)

Kurze Vocale sind als solche nicht speciell unterschieden.

5) ͝, das gewöhnliche Kürzezeichen, ist über solchen Vocalen „a“ und „e“ angebracht, welche unvollkommen tönend ausgesprochen werden (wie im Englischen u in „but“, e in „herd“).

6) _ unter dem Vocale „a“ bezeichnet einen tiefen Laut desselben gleich a im englischen „wall“.

(Accente:)

Accent fällt, durch solchen, in der Form des Acuts, ´, bezeichnet; der Accent kann auch auf kurze, selbst unvollkommen gebildete Vocale fallen. Gerade bei ungewohnten geographischen Namen lässt sich der Accent sehr schwer errathen und ist zugleich für die richtige Aussprache, auch für das im Gedächtnisse Behalten des Wortes, von grosser Wichtigkeit.

Bezeichnung der Höhenangaben.

Das für die Höhenzahlen gewählte Maass ist das englische, wie gewöhnlich in geographischen Mittheilungen über jene Gebiete.

1000 engl. Fuss = 304·79 Meter = 938·29 par Fuss.

Eine Stelle für Angabe der Höhe, signirt „Height“, ist im Herbarium auf jeder Folie neben dem Standort-Namen markirt, und alle Daten dafür waren auch schon während des Einsammelns berücksichtigt worden. Es konnten für das ganze Material schon in der ersten Periode des Ordnens in Europa etwa $^1/_6$ der Höhenzahlen auf die Folien eingetragen werden, dabei verhältnissmässig mehr derselben für die ziemlich flachen oder wenigstens gleichmässig ansteigenden Regionen als für die steil und unregelmässig gestalteten.

Die definitiven vervollständigten Angaben, wie sie in den hier folgenden Tabellen vorliegen, sind basirt auf Band II. des „Results“, wo sich bei Zusammenstellung sämmtlichen vorhergehenden Materiales und unserer eigenen Bestimmungen, bis November 1861, schon 1880 hypsometrisch bekannte Punkte für Hochasien im Norden von Indien, und 1615 Höhenpunkte für Indien geboten haben[16]. Diese Daten haben sich jetzt

16) „Results“ Vol. II p. IX. Die Höhenpunkte, die Indien angehören, sind verhältnissmässig im Herbarium wenig vertreten. — In einzelnen Fällen, für welche jetzt die Höhenangabe etwas ver-

noch vermehrt durch die fortgesetzten Arbeiten der indischen Generalstabs-Vermessung, vorzüglich in Details für die Kämme und Gipfel in den britischen Gebieten; und nachdem — seit Johnson, 1866 — das Vordringen gegen Nordwesten nach Turkistán wieder begonnen hatte, sind auch von dort neue Höhendaten gegeben worden, wenn auch, was die angewandten Instrumente und die Wahl der korrespondirenden Stationen betrifft, noch nicht mit Schärfe bestimmt[17]).

Wie von der Verbreitung der Pflanzen im Allgemeinen zu erwarten ist, war für die Mehrzahl der begangenen Strecken die Begrenzung derselben mit oberer und unterer Höhenzahl zu bezeichnen, und überall, wo längs unserer eigenen Routen gesammelt wurde, sind grosse Höhendifferenzen als solche nur da angegeben, wo keine Annahme vorlag, dass der Charakter der Vegetation sie nicht ausfüllte. Orte ungewöhnlich hohen Auftretens einzelner Pflanzen, ebenso wie Orte, die in Feuchtigkeit und Bodenbeschaffenheit sich unterschieden, sind dabei sorgfältig getrennt gehalten und speciell bezeichnet worden.

Wo Sammler seitlich von uns, auf Routen, die nicht wir selbst begingen, allein arbeiteten, sind die begrenzenden Zahlen bisweilen etwas weiter abstehend als sie von uns wohl gewählt worden wären. Doch sind auch hier die Höhenangaben nicht ohne positive Anhaltspunkte geschätzt; es liegen zu Grunde die Zeitdaten der Märsche verbunden mit der Neigung längs analog gestalteten Terrainlinien der Nachbarschaft, wobei die der Marschzeit entsprechende Höhendifferenz für Ansteigen und für Absteigen, für Thalsohlen und für Bergabhänge, verschieden gewerthet wurde. Die klimatischen Verhältnisse, soweit sie von der Höhe direkt bedingt waren, konnten von uns nach den Angaben der Sammler gleichfalls recht gut beurtheilt werden.

---

schieden von den beim ersten Ordnen angenommenen Werthen ergeben hatte, ist die Aenderung auf der entsprechenden Herbarium-Folie als „altered“ (oder „alt.“) markirt; doch sind solcher nur wenige. Für mehrere der an sich niederen Punkte, die anfangs nur als „L. ab. S. L.“, nemlich „Little above Sea Level“, bezeichnet wurden, konnten jetzt gleichfalls genauere Angaben gemacht werden. Veranlassung dies speciell hier zu erwähnen, ist mir der Umstand, dass in den früheren Publikationen über Bearbeitung einzelner Familien noch nicht all diese Details berücksichtiget werden konnten.

17) „Die Pässe über die Kammlinien des Karakorúm und des Künlún“. Abhandl. der k. b. Akad. d. Wiss. XII, S. 9.

Da in Uebereinstimmung mit der beigefügten Zeit des Sammelns längs Strecken, wo nur Durchmarsch und nicht längerer Aufenthalt stattfand, die Grenzorte so gereiht sind, wie sie bei der Anlage des Herbariums sich geboten haben, werden in einzelnen Fällen die unteren, im anderen die oberen Punkte als die ersten genannt.

Ferner war es nothwendig auch diess zu berücksichtigen, dass die seitlichen Fluren eines Ortes von der einen oder der anderen Gruppe der Sammler, welche sie durchzogen, nicht immer in der gleichen Weise als begrenzt betrachtet worden waren. So kömmt es z. B., dass in der Strecke „von Káltse nach Dánkhar 9900 F. bis 8000 F.“ und in der Strecke von „Le nach Káltse 11000 bis 9600 F.“ nicht die gleiche Höhe für die bei Káltse noch mit eingeschlossenen Flächen anzugeben war. Doch sind solche Fälle ohnehin verhältnissmässig selten, und liegen nur da vor, wo es, ähnlich wie bei geringem Thalgefälle, leicht möglich ist, dass eine nicht unbedeutende Aenderung der Horizontal-Dimensionen mit einem Grenzpunkte von anderer Höhe sich verbindet ohne aufzufallen.

Verhältnissmässig geringe Höhenverschiedenheit kommt innerhalb jener Strecken vor, die als „Umgebungen“, (als „Environs“) bezeichnet wird. Für solche ist dann in einigen Fällen nur eine Angabe in runder Zahl beifügt, mit horizontalem Striche zu beiden Seiten als Zeichen ihrer centralen Lage markirt [18]). Meistens war aber auch für die „Umgebungen“ der Abstand zwischen den obersten und den untersten Punkten der Umgrenzung zu 600 bis 1000 Fuss zu fixiren. Nur wo die Lokalität zugleich Charakter wohl markirten breiten Thales oder trockenen Seebeckens hat, ist auch in den Gebirgen die entsprechende Höhendifferenz eine relativ geringe; Hochplateaux haben selbst bei grosser Ausdehnung gewöhnlich etwas mehr Modulation der Bodengestaltung.

Das Mittel der oberen und der unteren Höhengrenze der als „Umgebungen“ vereinten Strecken kann mit geringen exceptionellen Differenzen zugleich als das Mittel der ganzen Fläche betrachtet werden, während der Hauptort, der als Basis für die „Umgebungen“ genannt ist, nach Grösse und politischer Bedeutung zu wählen war und dem-

---

18) Auf den englisch signirten Folien des Herbariums sind sie mit „ab.“, = about, bezeichnet.

nach in einzelnen Fällen nahe dem oberen, in anderen nahe dem unteren Rande gelegen sein kann.

Bei den Pässen ist die Uebergangsstelle, als direct bestimmter Punkt, mit dem Resultate der Messung selbst beigefügt. Gleiches geschah an einzelnen anderen gut markirten Stellen, so bei Gipfeln, die noch innerhalb der Vegetationsgrenzen liegen, bei localen Flussniveaux, bei Quellen, auch bei Höhen - Extremen im Auftreten von Pflanzenformen; mittlere Grenzen derselben lassen sich nur in genäherten Werthen geben, da für solche der seitlichen Verbreitung entlang noch immer ziemlich viel Veränderlichkeit sich zeigt.

Das Rubriciren und die Bearbeitung des Herbariums.

Angabe des Auftretens wurde für die Pflanzen-Exemplare in Verbindung mit dem Sammeln stets sorgfältig notirt, doch war passende Bezeichnung für die örtlich verschiedenen Verhältnisse bisweilen nicht leicht zu wählen.

Günstig war es, dass wir, wenigstens in den Gebirgsregionen, auch innerhalb weiter Strecken unbewohnter und neuer oder nur ganz sporadisch besuchter Gebiete, öfter als zu erwarten schien, recht gute, die Form, die Bodenbeschaffenheit, das Klima u. s. w. andeutende Namen erhielten; solche liessen sich dann als in ihrer Art objektive und richtige Auffassung dadurch erkennen, dass sie von mehreren der Begleiter, wenn einzeln befragt, in übereinstimmender Weise gegeben wurden.

Erschwert aber war gerade dort, in jenen central gelegenen fernern Gebieten, das Befragen dadurch, dass wir mit den Bewohnern nördlich vom Himálaya-Kamme nicht direkt uns besprechen konnten und dass dabei überdiess mit unseren indischen Dolmetschern von uns hindostáni gesprochen werden musste.

In Europa wurde bei dem Umlegen der Exemplare des Herbariums Zusammenstellung als Ganzes durchführt, und es wurden, basirt auf die ursprünglich notirten Fundstellen, auf jeder Folie „Landesregion", „Provinz" und „Localität mit Höhe" rubricirt. Ausserdem gleich-

falls in allgemeiner Form, sind Catalog-Nummern angegeben, und nebst diesen auch die „Tage des Einsammelns“[19]).

Besprechung der Landesregionen und Provinzen, in der nöthigen Ausführlichkeit gegeben, bildet Gegenstand für sich in der vorliegenden Mittheilung; ebenso die Erläuterung der Localitäten, die in tabellarischer Zusammenstellung folgen wird.

Die Angaben auf den Folien des Herbariums betreffend ist zu bemerken, dass Provinzen und Landesregionen dort möglichst gekürzt angebracht sind. Wenn eine als „Localität“ zusammengefasste Reihe von Fundstellen von einer Provinz noch in eine zweite sich erstreckte, wie zum Beispiel bei gleichartig gestalteten Abhängen zu beiden Seiten eines Kammes, oder einem grossen Thale entlang, sich bieten konnte, ist auf den Folien bei ungleicher Ausdehnung der beiden Theile gewöhnlich nur die eine Provinz genannt, in welcher die betreffende Fläche die grössere ist. In den hier gegebenen topographischen Bezeichnungen der Localitäten sind aber auch Provinzen und Landesregionen in entsprechender Vollständigkeit der Namen beigefügt. (Der Abkürzungen habe ich nur zu erwähnen, weil dieselben bei einigen Angaben in den systematischen Publikationen bis jetzt noch unberücksichtigt gelassen wurden.)

Die Nummern sind in der Generalreihe des Herbariums durchlaufende, und in der Wahl derselben wurde auch in ihrer Combination mit den Standorten consequent nach bestimmtem Principe verfahren. Gleiches konnte nun auch bei den Publikationen über die einzelnen Theile des Herbariums stets beibehalten werden. Es sind nemlich für je 1 Species oder Varietät die Exemplare von Süd nach Nord und von Ost nach West gereiht[20]); Anschluss dieser Art war leicht durchzuführen, und bietet so unmittelbar Uebersicht der pflanzengeographischen Vertheilung[21]). Ausser der Generalreihe wurden noch Gruppen „1. und

---

19) „Province“, „Locality“, „Height“ und die betreffenden Details sind auf den Folien des Herbariums in Verbindung mit unseren officiellen Berichten an das India Office während der Reisen, und mit dem schon erwähnten Bande VII der „Results“, englisch eingetragen.

20) Es bilden demnach die indischen Formen, die zugleich das Bekanntere boten, den Anfang.

21) Nur in der Angabe der „Zeit des Sammelns“ bleiben dabei, wegen der so vielfach gewechselten Routen, unregelmässige Abstände.

2. Doubletten" sortirt, aus jenen Exemplaren, die sich als identische Pflanzenformen erkennen liessen und für welche auch die Entwicklung in Blüthe-, Saamen- und Blatt-Bildung in der Hauptreihe schon vertreten war.

Wo bei der systematischen Bearbeitung mehr als eine Catalog-Nummer gleicher Lokalität für identische Exemplare sich ergibt, bezeichnet dies nun solche, die wegen Verschiedenheit im Stadium ihrer Entwicklung oder wegen anfänglicher Schwierigkeit der Definition in die Generalreihe des Herbariums aufgenommen und nicht als Doubletten sortirt sind; diese bleiben jetzt auch eingereiht. Mehrere Catalog-Nummern gleicher Localität-Angabe sind desshalb für die Häufigkeit des Vorkommens ohne Bedeutung.

Die Zeit des Einsammelns ist auf jedem Exemplare angegeben, um die Perioden der Entwicklung der Pflanzen bei der Untersuchung derselben beurtheilen zu können. Es wurden desshalb auch bei wiederholtem Besuche der gleichen Localität die entsprechenden Daten einzeln angegeben, wenn der dazwischen liegende Zeitabstand diess veranlasste.

Systematische Untersuchung. Der Beginn derselben ist sogleich nach meiner Vollendung des Umlegens und des pflanzengeographischen Gruppirens von Herrn Dr. Jul. Herm. Schultes im königlichen Herbarium zu München gefälligst unternommen worden und es ist von ihm bis jetzt für bedeutende Theile in verschiedenen Familien auch Bestimmung und Namenangabe für jene Exemplare durchgeführt worden, die sich in bereits definirten Formen sowie in ihrer Beschaffenheit als bekannte Species ergeben.

Als Einzelarbeiten von Systematikern nebst Daten über die Vertheilung und die begleitenden Umstände des Auftretens, die ich damit zu verbinden hatte, sind bis jetzt folgende Abhandlungen erschienen:

Ueber die Gramineen Hochasiens. Von A. Griesebach. Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Febr. 1868. Nr. 3. (Im Anschlusse an das von Dr. Hooker aus Kew gebotene Material).

Notice sur les Polygonées, les Thymelées et les Laurinées. Par C. F. Meissner. Paris, Annales des sciences naturelles. 1868. 5. série. T. VI. 6. cah.

Enumeration of the Primulaceae, Pittosporeae, and Irideae. By F. W. Klatt. London, Seemanns Journal of Botany. 1868. T. VIII.

Notice sur les Peupliers. Par Alfred Wesmaël. Société Roy. de Botanique de Belgique. 1868. T. VII.

Enumeration of the Labiatae and Scrophularineae. By T. A. Schmidt. London, Seemanns Journal of Botany. 1869. T. VIII.

Uebersicht der Butomaceen, Alismaceen, Juncagineen und Juncaceen. Von Fr. Buchenau. Nachr. der K. Ges. des Wiss. zu Göttingen. 1869. No. 13.

(Enumeratio Salicum. Auctore N. J. Anderson. Mit Mscr. Christiania, 1869. Noch nicht gedruckt).

Ohne Beigabe besonderer Abhandlung darüber habe ich zurückerhalten:

Die Leguminosen und Malvaceen. Von Prof. Ahlefeldt. 1867.

Die Urticaceen. Von Prof. Weddel. 1876.

Die Tiliaceen, Sterculiaceen und Büttneraceen. Von Prof. Garcke. 1868.

Die Crassulaceen und Saxifrageen, sowie die (kleine) Gruppe der Aroideen[22]), bearbeitet von Prof. Engler, erstere 1871 in Breslau, letztere jüngst in München.

Die Euphorbiaceen nebst Apocinaceen und Asclepiadeen. Von Dr. Müller in Genf 1872.

Das Genus Rosa. Von Jules Crépin in Brüssel. 1874.

(Die Untersuchung der Rosen wird für unsere Exemplare in Crépin's „Primitiae Monographiae Rosarum", III. Fascicule, 1875/76, enthalten sein; seine systematischen Daten sind im Manuscript auch den zurückgesandten Exemplaren beigefügt.

Dies hatte mir ermöglicht, schon jetzt die pflanzengeographische Vertheilung, sowie die für den Orient so charakteristische industrielle Verwendung der Rose zu besprechen, in meiner Mittheilung

Ueber das Genus Rosa in Hochasien, und über Rosenwasser und Rosenöl. Sitzungsberichte der k. b. Akademie der Wiss. 7. November 1875.)

---

22) Beschränkt, wie es scheint, auf die feuchtwarmen Gebiete der Südseite des Himálaya, und nicht sehr hoch ansteigend.

Die Filices. Von Dr. Baker in London. 1876.

In Druck befindet sich, als jüngst vollendet:

Die Familie der Compositae. Mit 18 Tafeln neuer Species. Von Dr. F. W. Klatt. 1875/76.

Die Bearbeitung derselben war von ihm als zweiter Gegenstand aus unserem Herbarium sorgfältigst durchgeführt worden.

Die Compositen waren schon während des Sammelns durch grosse Anzahl sowie durch weite Verbreitung unter sehr ungleichen Bedingungen ihrer Entwicklung aufgefallen, und hatten so vielfach Gelegenheit zu Beobachtungen über den localen Charakter der Standorte geboten; auch hatte sich dabei eine verhältnissmässig grosse Menge von Formen unterscheiden lassen. Die systematische Bearbeitung hat dies bestätigt, indem sich ausser den neuen Species auch neue Varietäten zahlreich ergaben.

Zusendung dieser Familie hatte mir schon im Jahre 1865 Dr. C. H. Schultz-Bipontinus (den die Wissenschaft am 17. Dezember 1867 verloren hat) gestattet, und es schien die Bearbeitung derselben, wie die ersten Nachrichten aus Zweibrücken nach dem Ableben des eifrigen Forschers es erwarten liessen, ziemlich vorgeschritten; allein später, als dieser Gegenstand an mich wieder zurückgesandt war, hat sich ergeben, dass derselbe, weil er erst während der letzten Periode der botanischen Untersuchungen des Verstorbenen eintraf, noch nicht vorgenommen war.

Als neues in Aussicht stehendes Material systematischer Bearbeitung kann ich noch jene der Chenopodien, Cruciferen, Amaranthaceen und Umbelliferen anführen, sowie, getrennt davon, der Cyperaceen; die erstere Reihe hatte Direktor E. Fenzl in Wien die Güte zu übernehmen, die letztere Familie durfte ich wieder Herrn Dr. Klatt in Hamburg anbieten.

II.

Die Begrenzung und Eintheilung der Landesregionen und der Provinzen.

A. Gebiete in Indien. Landesregion I. Nordöstliche Stromgebiete Indiens. 1ste Gruppe, sign. „Eastern Bengál“, Prov.: Assám — Khássia-Gebirge. 2te Gruppe, sign. „Gangetic Delta“, Prov.: Unteres Bengálen. — Unteres Bahár. 3te Gruppe, sign. „Bengál“, Prov.: Bengálen. 4te Gruppe, sign. „Hindostán“, Prov.: Gánges-Jåmna-Gebiet. — Landesregion II. Mittelstufen der indischen Halbinsel, sign. „Central-India“, Prov.: Băndelkánd — Málva. — Landesregion III. Nordwestliche Stromgebiete, sign. „Northwestern India“, Prov.: Pănjáb. — Landesregion IV. Das westliche indische Tiefland, sign. „Western India“, Prov.: Sindh — Kăch — Gujrát. —

B. Gebiete Hochasiens. Landesregion I. Der Himálaya-Südabhang. 1ste Gruppe, sign. „Eastern Himálaya“, Prov.: (Bhután) — Síkkim. 2te Gruppe, sign. „Central-Himálaya“, Prov.: Nepál. 3te Gruppe, sign. „Western Himálaya“ Prov, südl.: Kămáon — Gărhvál — Símla — (Bisáhir) — Kănáur — Kúlu; nördl.: Jåmu — Chámba — Lahól — Kishtvár — Rajáuri — Kashmír — Mårri. — Landesregion II. Das westliche Stromgebiet in Tíbet, sign. „Tíbet“, Prov.: Gnári Khórsum — Spíti — Rúpchu — Tsånskar oder Zánkhar — Pangkóng — Ladák — Dras — Núbra — Bálti — Hazóra — (Ghílghit). — Landesregion III. Hochland Ost-Turkistáns vom Karakorúm-Kamme gegen Norden und das Künlün-Gebirge. 1ste Gruppe, sign. „Karakorúm“ Prov.: Yárkand. 2te Gruppe, sign. „Künlün“, Prov.: Yárkand — Khótan. —

A. Gebiete in Indien.

Bei der topographischen Eintheilung unseres botanischen Materiales sind die „Landesregionen“ so gestaltet worden, dass dieselben auch klimatisch möglichst bestimmt sich begrenzen. Für die „Provinzen“ musste zwar, den schon bestehenden Eintheilungen entsprechend, die politisch-ethnographischen Verhältnisse zu Grunde gelegt werden, aber es konnten dessenungeachtet, indem sie zahlreich genug unterschieden

wurden, auch geologische Bedingungen sowie die damit sich verbindenden Verschiedenheiten der Bodengestaltung als Elemente der Trennung eingeführt werden.

Aus der indischen Halbinsel konnte im Sammeln für das Herbarium, wie Eingangs erläutert, nur Vereinzeltes zu unmittelbarem Vergleiche gewählt werden. Günstig war, dass die Gebiete, welche an die Gebirgsregionen sich anschliessen, zugleich jene gewesen sind, durch welche uns am öftesten unsere Routen führten, und wo auch, für das Gefolge besonders, gelegentlich Aufenthalt veranlasst war.

Ohne auf die Einzelheiten unserer Märsche hier einzugehen, die im „Itinerary" gegeben sind, sei nur erwähnt, dass die meisten der hier folgenden Provinzen auch in verschiedenen Jahreszeiten durchzogen wurden; unter den mehr seitlich gelegenen Provinzen waren Assám und das Khássia-Gebirge 1855/56 von mir, Málva 1855/56 und Sindh bis Gujrát 1857 von Robert bereist worden.

Bei der so grossen Flächenausdehnung der Provinzen musste ungeachtet der geringen Menge gesammelten Materiales pflanzen-geographisch im Herbarium Trennung ebenso wie für Hochasien durchgeführt werden. Die im Herbarium nicht vertretenen Provinzen sind genannt, aber zugleich in Klammern gesetzt. Die Erläuterung der Gebiete lässt sich in Kürze zusammenfassen, da die Unterschiede der Bodengestaltung, die dort sich bieten, verhältnissmässig nicht sehr bedeutende sind.

Landesregion I. „Nordöstliche Stromgebiete Indiens".

In der Vertheilung sind 4 Gruppen unterschieden, „das östliche Indien, das Ganges-Delta, Bengalen und Hindostán".

I. 1. Gruppe, signirt „Eastern Bengál" (als Präsidentschaft) oder „Oestliches Indien",

mit den Provinzen: Assám — Khássia-Gebirge.

Assám, zu beiden Seiten des Brahmapútra sich hinziehend, beginnt etwas oberhalb der Vereinigung mehrerer der bedeutendsten Zuflüsse mit dem Brahmapútra oder Lohít. Diese sind auf der rechten Thalseite der Dibóng und, wenig nur südwestlich davon, der Dihóng oder Tsangbochú, der das östliche Tíbet durchzieht. Der Zufluss auf der

linken Thalseite ist der Dihíng, welcher aus dem östlichen Nága-Gebirge abfliesst und im Thalbecken Assám's selbst (den Trennungen in Flussdeltas ähnlich) sich gabelt, wobei der südliche, längere Theil als der „alte" oder Bóri Dihíng, der nördliche als der „neue" oder Noh Dihíng von den Eingebornen bezeichnet wird, eine Unterscheidung, welche auch bei der Untersuchung der Geröllablagerungen und der Erosionsverhältnisse sich bestätigte; ich hatte während meines Aufenthaltes längs der Ufer des Hauptstromes und meines Seitenmarsches nach Bhután in das Dihíng-Gebiet meinen Assistenten Lieutenant Adams mit dem Draftsman 'Abdul abgeschickt.

Als unteres Ende dieser Provinz, wie sie hier für das Herbarium begrenzt ist, sind die Umgebungen von Gohátti angenommen, weil dort, unter anderem, die Meereshöhe des Brahmapútra-Flusses nur 70 engl. Fuss noch beträgt; Assám aber als ethnographische und gegenwärtig auch als administrativ begrenzte Provinz reicht noch weiter thalabwärts, bis Goalpára. Zwischen Gohátti und Goalpára bot sich keine Gelegenheit mehr in Verbindung mit längerem Aufenthalte auch zu sammeln.

Das Khássia-Gebirge bildet einen Theil der Terrainerhebung, welche am linken Thalrande Assáms in nordöstlicher Richtung sich fortzieht; diese beginnt mit dem Gáro-Gebirge im Südwesten und endet, nur wenig die Quellen des Dihíng überschreitend, mit dem Nága-Gebirge. Hydrographisch gehören diese Gebirgsländer nicht nur auf ihrer ganzen nördlichen Seite unmittelbar zum Flussgebiete des Brahmapútra, sondern auch der grössere Theil der südlich abfallenden Thäler steht durch den Súrma-Fluss, der die Gebirgswasser aufnimmt, mit den östlichen Deltaverzweigungen des Brahmapútra in Verbindung. Verhältnissmässig wenig des Gebirgswassers aus dem östlichen Nága-Gebiete kommend wird theils vom Kyendvén theils vom Nam-Kyu aufgenommen, und durch diese in die Irávadi geführt [23]).

I. 2. Gruppe, signirt „Gangetic-Delta",

mit den Provinzen: Unteres Bengálen — Unteres Bahár.

Gegenstände zum Vergleichen mit der Flora Hochasiens haben dabei vorzüglich die östlichen Ausläufer des Bahár-Gebirgslandes geboten,

---

23) Erläuterung der hydrographischen Verhältnisse habe ich gegeben in „Reisen", Bd. I, S. 458—479 nebst einer Tafel „Skizze der Fluss-Systeme des Brahmapútra und der Irávadi".

während unsere Beobachtungen im unteren Bengalen Culturverhältnisse, Auftreten und Beschaffenheit holzbildender Gewächse, u. s. w., betrafen, und für unser Herbarium Vereinzeltes nur gesammelt wurde.

I. 3. Gruppe, signirt „Bengál",

mit der Provinz: Bengalen oder Gangesebene;

und I. 4. Gruppe, signirt „Hindostán",

mit der Provinz: Ganges-Jămna-Gebiet oder obere Gangesebene.

Diese beiden Gruppen, die in unmittelbarem Anschlusse von Südosten gegen Nordwesten sich folgen, sind im Herbarium, mit verhältnissmässig wenig Exemplaren, auf das beschränkt, was unmittelbar als Material des Vergleichens mit den höheren Flussgebieten beigefügt wurde; in den Monaten der kühlen Jahreszeit traten dort an manchen Stellen längs der Flussränder und in den periodisch ganz trockenen Betten kleiner Seitenzuflüsse, signirt „Dry river beds", vereinzelt Formen auf, welche von dem allgemeinen Typus indischer Flora sehr verschieden waren.

Landesregion II. „Mittelstufen der indischen Halbinsel," signirt im Herbarium „Central India",

mit den Provinzen: Băndelkánd — Málva.

Băndelkánd, das noch in seiner ganzen Fläche zum Flussgebiete des Ganges gehört, reiht sich gegen Norden an Hindostán gegen, Osten an Bahár.

Málva, südlicher gelegen und noch gegen Westen sich ausdehnend, bietet gleichfalls in seinem Nordgefälle, welches bei weitem den grösseren Theil seiner basischen Fläche deckt, Zufluss zum Ganges. Aber am Südrande zieht sich in der Richtung gegen Westen das Längenthal des Nărbắda-Flusses hin, eine Depression zwischen der Víndhya-Kette der Provinz Málva im Norden und der Satpúra-Kette der Provinzen Berár und Khandésh im Süden. Die Nărbắda, welche ungefähr 30 engl. Meilen unterhalb Brŏch in den Meerbusen von Kambay mündet, nimmt längs dem Víndhya-Kamme die nach Süden gerichteten Seitenflüsse, die von demselben kommen, auf. Diese markirte Form eines Hauptthales reicht aber längs des Nărbắda-Flusses nicht bis zum Quellengebiete hinauf. Dort ist in ziemlich weitem Umkreise das Terrain ganz verschieden gestaltet und bildet ausschliesslich ein Mittelgebirge mit Plateauform, ohne Vorherrschen bestimmter Richtung der Thalgefälle. Obwohl die Lage eine centrale und die Breite der indischen Halbinsel

hier noch sehr bedeutend ist, zeigte sich die Erhebung des Bodens nicht sehr gross. Die Höhe der Quelle der Nărbăda ist 3504 engl. F.

Landesregion III. „Nordwestliche Stromgebiete", signirt „Northwestern India",

mit der Provinz: Pănjáb.

Längs der zahlreichen Routen, welche uns durch das Pănjáb führten, hatte sich in einzelnen Pflanzenformen unerwartet häufig Aehnlichkeit mit der Flora der Hochgebirge gezeigt. Es ist dies direkt beeinflusst sowohl von der bedeutenden Ausdehnung gegen Norden als auch von der häufig zu 800 bis 1000 engl. Fuss ansteigenden Höhe selbst der Thallinien und ihrer nächsten Umgebungen.

Landesregion IV.: „Das westliche indische Tiefland", signirt „Western India",

mit den Provinzen: Sindh — Kăchh — Gujrát.

In dieser Gruppe bietet Sindh den Anschluss an das Pănjáb im Norden, und setzt sich gegen Süden bis zum Meeresufer fort. Kăchh und der halbinselförmige Theil von Gujrát folgen, als Uferlandschaften mit geringen Erhebungen, gegen Südosten. Es reicht Kăchh bei Mándevi bis 22° 51′, die Gujrát-Halbinsel gegenüber der den Portugiesen gehörenden kleinen Insel Diú bis 20° 43′ nördl. Breite; jener Theil von Gujrát, der weiter östlich liegend an Khandésh und an Málva sich anschliesst, hat auch einen kleinen Höhenzug, ähnlich den westlichen Ghāts. Wüstensand und trockene, salzhaltige Küstenstrecken — mit bedeutender Veränderung der Bodentemperatur in der Jahresperiode — haben, ungeachtet des tropischen Charakters der Landschaft, in der Vegetation auch hier an einzelnen Stellen manches geboten, was, sehr verschieden von gleicher Breite in den östlichen Theilen Indiens, an die Formen aus den Hochregionen erinnert; Cultur beschränkt sich meist auf die von periodischen Ueberfluthungen befruchteten Flächen des Industhales und auf die Umgebungen von Küstenflüssen.

B. Die Gebiete Hochasiens.

Im Himálaya sind südlich vom Kamme Bergzüge und Thäler beinahe seiner ganzen Längenausdehnung nach mit Pflanzensammeln von uns begangen worden, aber die nördliche, tibetische Seite des Himálaya

sowie die beiden anderen Hauptketten, der Karakorúm und der Künlün, wurden nur in ihren westlichen Theilen durchzogen.

Entsprechend dem bedeutenden Ansteigen der Hebungen in diesen Gebirgsländern, in welchen, ziemlich gleichmässig in den Hauptkämmen vertheilt, die höchsten Pässe und Gipfel der Erde gelegen sind, ist auch die basische Fläche, den Graden der Länge sowie auch der Breite nach, eine sehr grosse. Der Längenunterschied von den östlichen Theilen, die am Brahmapútra-Thale Assáms auslaufen, bis zu den nordwestlichen Grenzen des Pănjáb beträgt etwas über 25 Grade, (96^0 bis 71^0 O. von Green.). Der Breitenunterschied unmittelbar dem Meridian des centralen Theiles entlang erreicht über $8^1/_2$ Grade mit bedeutender Zunahme seitlich im Westen und theilweise auch im Osten.

Als Punkte bezeichnend für die begrenzenden Thäler und für die mittlere Richtung der Gebirgszüge, welche von der Ostseite als Ausgangsstelle anfangs eine westliche, dann vorherrschend eine nordwestliche ist, können angeführt werden: Sădia, in Assám, Breite 27^0 49′ N., Länge 95^0 38′ O. von Gr., Höhe 210 engl. F.; Yárkand, in Turkistán, Breite 38^0 22′ N., Länge 77^0 29′ O. von Gr., Höhe 4384 engl. F.

Die untersuchten Gebiete Hochasiens sind im Herbarium in 3 Landesregionen gruppirt worden: I. Der Himálaya-Südabhang vom mittleren Bhután bis Mărri. II. Das westliche Stromgebiet von Tíbet zwischen dem Himálaya-Kamme und dem Karakorúm-Kamme. III. Hochland Ost-Turkistáns vom Karakorúm-Kamme gegen Norden, und Künlün-Gebirge.

Für Hochasien sind gleichfalls in den Landesregionen jene ihrer Provinzen angeführt, welche im Herbarium wegen der Lage unserer Routen nur wenig oder gar nicht vertreten sind; in den Aufzählungen sind sie auch hier in Klammern gesetzt. Ueber die Bereisung als solche sind nur dann einzelne Angaben ebenfalls noch beigefügt, wenn sie die Flora, die sich bot, charakterisiren. So wie die Zusammenstellung der Landesregionen und der Provinzen gegenwärtig sich zeigt, wird die ganze Reihe derselben wohl als genügend zu betrachten sein, auch für die Beurtheilung der Vertheilung und ihrer Bedingungen in anderen Herbarien aus jenen Gebirgsländern.

Landesregion I: „Der Himálaya-Südabhang."

Längs desselben sind drei Gruppen getrennt gehalten, bezeichnet „Oestlicher Himálaya, Central-Himálaya und Westlicher Himálaya."

I. 1. Gruppe, signirt im Herbarium „Eastern Himálaya," mit den Provinzen: (Bhután) — Síkkim.

In Bhután, wo ich nur von Assám aus bis Narigún vordringen konnte, war überdies die Zeit des Marsches in die Mitte des Winters gefallen, und zwar in einem Gebirge, dessen Erhebung ungeachtet subtropischer Lager das Auftreten einer besonderen der kühlen Jahreszeit angehörenden Vegetationsgruppe, wie solches in den entsprechenden Tiefländern vorkömmt, beinahe gänzlich ausgeschlossen hatte. In Bhután hatte ich zwar Gelegenheit, meine Beobachtungen über Vegetation und Cultur zu vervollständigen, selbst Holzarten, als praktisch wichtige Gegenstände gedeutet, mir zu verschaffen; für das Herbarium konnte nur an wenigen Stellen gesammelt werden. Ich habe desshalb den Namen dieser Provinz in Klammern gesetzt.

In Síkkim konnte ich die englischen Besitzungen der Tarái und des Mittelgebirges auf mehreren Routen untersuchen. Doch über das britische Síkkim hinaus, gegen Norden vorzudringen, wurde mir nur längs der Singhalíla-Kette möglich. Schon Dr. J. D. Hooker und Dr. A. Campbell hatten bei ihrer wichtigen Bereisung Síkkim's 1849 [24]) Gefangennahme und rohe Misshandlung erfahren, obwohl ihnen beim Beginne ihrer Reise vom Rája keine Hindernisse geboten wurden. Nachdem dieser nun, kurze Zeit darauf, wegen solchen Auftretens gegen britische Unterthanen, von denen überdiess Dr. Campbell schon damals der oberste Beamte in British-Síkkim war, die Jahresrente verlor, welche ihm als Entschädigung bei Errichtung des Sanitariums zu Darjíling gewährt worden war, und zugleich all seine Besitzungen in der Tarái nebst den dazu gehörigen Vorbergen hatte abtreten müssen, hat er sich bei jeder Gelegenheit mehr als je Europäern feindlich gesinnt gezeigt.

---

24) Sein Werk über diese Reise ist: Himalayan Journals, or notes of a naturalist in Bengal, the Sikkim and Nepal Himalayas, the Khasia Mountains, etc. 2. Vols. London, John Murray, 1854.

Auch etwaiges Vordringen längs der Singhalíla-Kette war nur in der Art zu versuchen, dass ich meist sehr nahe oben an der Kammlinie blieb und bewohnte Orte ganz vermied. Diese Kette bildet zwar, was unter andern Umständen politisch günstig hätte sein können, die Grenze zwischen Síkkim und Nepál, aber in jenem Jahre, 1855, war es nothwendig, solange als möglich sowohl von der einen als von der anderen Seite unbemerkt zu bleiben. Vortheilhaft war in dieser Beziehung, dass vom Tónglo-Berge an gegen Norden die Höhe dieses Kammes in der Nähe des Gipfels nur bis 9643 engl. F., und an einer zweiten relativ tiefen Stelle weiter im Innern bis 9800 engl. F. sich einsenkt, und dass dessenungeachtet eine sehr üppige Vegetation bis zur vollen Höhe desselben hinaufreicht. Es fanden sich sogar Rhododendron-Species in Baumform bis zu 9500 engl. F. Höhe, wenigstens an den Abhängen des Tónglo, welcher der südlichste grosse Gipfel dort ist; Bambus-Gesträuche mit 14 F. langen Stämmchen zeigten sich noch bei 10,293 engl. Fuss[25]). Aber es verzögerte sich dabei durch dichte Unterholz-Vegetation vielen Strecken entlang das Vorwärtskommen sehr bedeutend, und die Wahl der einzuschlagenden Richtung war sehr beschränkt, da einzelne bewohnte Orte gleichfalls sehr hoch hier hinanreichen.

Im Gebiete des Rája von Síkkim ist das Sammeln weiter landeinwärts selbst für die von mir benützten Lépchas, die Eingeborne des Landes und zum Theil auch Unterthanen des Rája waren, sehr erschwert worden. Dessenungeachtet hat sich dort sehr reiches botanisches Material ergeben. Unter anderem hatten sich dabei mehrmals auch Marschlinien geboten, welche grosse Verschiedenheit der Vegetation zwischen ihren hohen und niederen Stufen zeigten, das Sammeln konnte von Mai bis Ende August fortgesetzt werden.

Mr. Monteiro, einen Indo-Portugiesen, den ich schon in Calcutta bei meinem ersten Aufbruche nach dem Himálaya als Sammler und technischen Präparator engagirt hatte, musste ich in Darjíling für British Síkkim zurücklassen. Er hatte auch dort Gelegenheit in der Vervollständigung der Sammlungen, besonders zoologische Präparate

25) Die Einzelheiten der Höhen-Bestimmungen sind gegeben in den „Results", vol. II, p. 289.

betreffend, schon damals sehr gute Dienste zu leisten. Als Beitrag zum Pflanzenmateriale konnte sich dieser vorzüglich die Producte der Kulturen und zahlreiche der Eingangs erwähnten Baumdurchschnitte verschaffen.

I. 2. Gruppe, signirt im Herbarium „Central-Himálaya", mit der Provinz: Nepál.

Nepál, das grösste Himálaya-Gebiet unter eingebornem Herrscher, wurde mir erst im letzten Jahre meines Aufenthaltes, im Februar und März 1857 zugänglich. Das botanische Material ist für mich, von Kathmándu ausgehend, ziemlich zahlreich geworden und ich konnte auch Pflanzensammler ungehindert entsenden. So schwierig es gewesen war, nach lange währenden offiziellen Unterhandlungen, die Erlaubniss für mich zu erhalten, Nepál und zwar dessen politisch wichtigen Theile mit der Hauptstadt zu besuchen, so hatte ich doch in den Umgebungen Kathmándus nicht über Beschränkung zu klagen, als ich einmal zugelassen war.

Charakteristisch ist von Kathmándu bis gegen die indische Grenze herab an vielen Stellen üppige subtropische Waldvegetation. Ueber die Höhengrenzen von Obstkultur hatte ich Gelegenheit, ebenfalls an mehreren Stellen direkte Messungen auszuführen; aber weiter in das Innere gegen Norden, an das Gebiet der Vegetation längs der Schneelinie, war mir dennoch nicht vorzudringen gestattet. Ueber die Grenzen der Getreidekultur konnte ich noch Beobachtungen machen, auch erhielt ich über den periodischen Wechsel der Vegetationserscheinungen in Verbindung mit jenem der Jahreszeiten vielseitig sich ergänzende und gut im Allgemeinen übereinstimmende Angaben von den Eingeboren in den Bazárs.

Hooker hatte die östlichen an Síkkim grenzenden Theile Nepáls bereist; in Kathmándu selbst hatte früher Dr. Wallich einige Zeit verweilt, ein Däne im Medical Department der East India Company angestellt, dessen Name mit so vielen Bestimmungen in der Indischen und der Himálaya-Flora sich verbindet[26]).

---

26) Zur Zeit meines Besuches zu Kathmándu fand ich noch 1857 einen alten Górkha im Hause Col. Ramsay's, des Residenten, dem dort ein Asyl für seine letzten Tage geboten war; er hatte mir „von dem Heere von Wallich's Pflanzensammlern, zu denen auch er gehörte", noch lebhaft zu erzählen gewusst. — Wallich, geboren zu Kopenhagen 1787, gestorben zu London 28. April

I. 3. Gruppe, signirt im Herbarium „Western Himálaya“,
mit den südlich gelegenen Provinzen: Kămáon — Gărhvál — Símla — (Bisáhir) — Kănáur — Kúlu;
und mit den nördlich gelegenen Provinzen: Jămu — Chámba — Lahól — Kishtvár — Rajáuri — Kashmír — Mărri.

Diese von Südost gegen Nordwest sich folgenden Provinzen beginnen mit Kămáon da, wo die Richtung des Himálaya-Kammes eine stark gegen Norden ansteigende ist.

Kashmír ist seit dem Sturze des Sikh-Reiches im Jahre 1846 ein Königreich für sich unter englischem Protektorate, und es gehört zu demselben nördlich vom Himálaya-Kamme noch ein sehr ausgedehnter aber sehr schwach bevölkerter Besitz im westlichen Tíbet.

In den übrigen Gebieten dieser Gruppe, wo seit langer Zeit schon kleine Reiche, unter sich getrennt, entstanden waren, haben sich diese auch jetzt noch zum grössten Theile in gleicher Weise erhalten, und zwar in nahezu selbstständigen Formen unter eingebornen Herrschern, deren Auftreten aber jetzt in irgend wichtigen Fragen von der indischen Regierung ganz abhängig ist. Verhältnissmässig kleine Theile gehören gegenwärtig unmittelbar zu Britisch-Indien; ihre Annexion war vor allem mit der Errichtung von Gesundheitsstationen in Verbindung gebracht worden.

Einfluss der Breite auf die Vertheilung der Pflanzen ergibt sich als ein geringer, wenn nur solche Provinzen unter sich verglichen werden, die unmittelbar sich berühren; aber für dieses westliche Himálaya-Gebiet in seiner ganzen Ausdehnung liegen Breitenunterschiede zwischen den südlichsten und den nördlichsten Theilen vor, die mehr als $5\frac{1}{2}$ Grad betragen.

Als Beispiel entsprechender Positionen seien angeführt[27]), für das südliche Kămáon:

1854 wurde als Arzt einer dänischen Colonie nach Abtretung derselben an England schon 1815 in den Dienst der East India Company übernommen und war viele Jahre hindurch Director des botanischen Gartens zu Calcutta. Sein „Tentamen Florae Nepalensis“ publicirte er 1824—1826 zu Calcutta.

27) Aus „Results“, vol. II, p. 326 und p. 399; es tritt bei obiger Zusammenstellung auch diess sogleich entgegen, dass der Längenunterschied, hier 4^0 52′ betragend, nur wenig vom Breiten-

Kállaga, am Gebirgsrande in der Bhábar Tarái,

29° 6′ nördl. Br., 79° 38′ östl. L. von Green., 877 engl. F. Höhe;

für das nördliche Kashmír:

Dávar im Gurés-Thale, am linken Ufer des Kishengánga-Flusses,

34° 34′·1 nörd. Br., 74° 46′·0 östl. L. von Green., 7718 engl. F. Höhe.

Bei so bedeutender gegenseitiger Entfernung werden für das Gebiet im Ganzen in den Wärmeverhältnissen sowie in der Vegetation grosse Verschiedenheiten erkennbar, und zwar in ihrer Abhängigkeit auch von der Breite als einer der bedingenden Ursachen.

In der Gruppirung der Provinzen auf der indischen Seite des westlichen Himálaya habe ich demnach topographisch, und als Grundlage auch für spätere vergleichende Analyse eine südliche und eine nördliche Hälfte unterschieden. Auch diess ist dabei für die Charakteristik der Verhältnisse wie sie unmittelbar zur Beobachtung sich geboten haben von Wichtigkeit, dass hier die ganze nördliche Hälfte dem Haupt-Kamme des Himálaya näher liegt als die südliche.

Bereist wurden diese Gebiete von uns und unserem Gefolge auf zahlreichen Routen 1855 und 1856, und im Durchmarsche einmal noch 1857.

Kămáon und Gărhvál waren im ersteren Jahre von meinen Brüdern Adolph und Robert untersucht worden: Ankunft in Nainitál am 16. April, Aufenthalt im Distrikte Mílum vom 31. Mai bis 4. Juli, Abmarsch von Măssúri (nach Rückkehr aus Tíbet) am 8. November.

Von Símla westlich und nördlich zogen wir im folgenden Jahre, 1856, und es war dabei möglich, an mehreren Stationen — besonders lange und erfolgreich in Kashmír — Eingeborne als Sammler aufzustellen. Ende April waren wir in Símla zusammengetroffen und von dort gingen wir wieder, getrennt, gegen den Haupt-Kamm des Himálaya; es war dabei von unsern eigenen Routen meine die östlichste, Adolph's die nordwestlichste. Am Rückwege von Tíbet nach dem Pănjáb, auf Märschen, die bis Mitte November währten, hatten wir uns nach dem Westrande des Gebirges gewandt, über Mărri nach Raulpíndi, nachdem

---

unterschiede abweicht, was sehr gut mit der allgemeinen nordwestlichen Richtung innerhalb jener Grenzen übereinstimmt.

wir in Srinágar, der Hauptstadt Kashmír's, ein zweites Zusammentreffen in jenem Jahre möglich gemacht hatten.

Adolph's letzte Himálaya-Märsche, von Anfangs April bis Ende Mai 1857, führten ihn nochmals in diese Gebiete, von Kángra durch Kúlu nach dem Bára Lácha-Passe.

Die Provinzen in der oben gegebenen Zusammenstellung wurden mit Ausnahme Rajáuris, das von einer Nebenroute des Sammlers Monteiro durchzogen war, alle von uns selbst besucht. Bisáhir habe ich dessenungeachtet in der Tabelle in Klammern gesetzt, weil mir die Standorte in diesem Terrain, der gegenwärtig gebräuchlichen Bezeichnung entsprechend, bei meinem Durchmarsche Anfangs Juni 1856 in dem südlicheren Theile als zu Símla, in den übrigen Theilen als zu Kănáur gehörend angegeben wurden. Der Sătlej, der dieses Land durchfliesst, hat hier eine ost-westliche Richtung und bildet dabei die trennende Linie zwischen den beiden hier erwähnten Theilen. „Bisáhir" als Bezeichnung für das Ganze in der früheren Weise scheint gar nicht mehr gebraucht; vereinzelt hörte ich noch den südlichen Theil allein Bisáhir nennen; auch einen nominellen Rája von Bisáhir gibt es dort noch, der aber jetzt eine sehr abhängige Stellung hat.

Als grösste Höhen des Himálaya hatten wir von solchen, die 26,000 Fuss erreichen oder übertreffen, 8 unter sich gut isolirte und von den Eingebornen durch besondere Namen unterschiedene Hauptgipfel anzuführen. Sie liegen in verhältnissmässig geringer Entfernung von der Kammlinie, und zwar all diese 8 auf der indischen Seite des Himálaya[29]).

Dass der Boden bis nahe gegen das Niveau des Meeres sich senke, kömmt längs des Himálaya-Fusses auch in seinen niedersten Theilen, an dem Tarái-Rande zwischen Bhután und Nepál, nirgend vor; dort ist aber die Erhebung, selbst grossen Strecken entlang, eine unbedeutende zu nennen, 400 bis 500 Fuss nur betragend.

Thalformen mit geringem Gefälle reichen weit noch in das Innere hinein. Dabei ist es nicht nur die Art der Gebirgshebung, welche dieses bedingt, sondern auch, mit bedeutendem Antheile, das allgemeine Tiefer-

---

29) Zusammenstellung sämmtlicher einzeln dominirender Himálaya-Gipfel über 25,000 Fuss, die bekannt, 12 an der Zahl, ist gegeben in „Results" vol. II. p. 495.

legen der Thalsohlen durch Erosion; diese Modification der Bodengestaltung ist auch als eine der Bedingungen der in den Thälern absteigenden Luftcirculation von sehr grossem Einflusse.

Landesregion II.: „Das westliche Stromgebiet von Tíbet“, signirt im Herbarium „Tíbet“,

mit den Provinzen: Gnári-Khórsum — Spíti — Rúpchu — Tsánskar oder Zánkhar — Pangkóng — Ladák — Dras — Núbra — Bálti — Hazóra — (Ghílghit).

Die Reihe der hier angeführten, im botanischen Materiale vertretenen Provinzen Tíbets bildet zusammen die westliche Hälfte jenes mächtigen Hochlandes, das sich in seiner allgemeinen Gestaltung als ein grosses in der Mitte gehobenes Längenthal dargeboten hat, mit dem Stromgebiete des Dihóng im Osten, und mit jenen des Indus und Sátlej im Westen. Die Grenze Tíbets im Norden, die Kammlinie der Karakorúm-Kette, bildet zugleich der ganzen nördlichen Seite Tíbets entlang, ohne Unterbrechung, die Wasserscheide und ist so die trennende Linie zwischen den Stromgebieten Indiens im Süden und jenen der Mongolei und Ost-Turkistáns im Norden. In der Himálaya-Kette dagegen finden sich, ungeachtet ihrer bedeutenden mittleren Höhe und ihres, vorzüglich auf der Südseite, ungleich steileren Ansteigens, zahlreiche Depressionen, verbunden mit Veränderung der Thalrichtung und Wendung der Flüsse gegen Süden; diess herrscht vor im westlichen Tíbet und bietet sich selbst längs des Sátlej- und längs des Indus-Thales, während der Hauptfluss Dihóng im Osten den Himálaya-Kamm nicht durchschneidet, sondern an dessen östlichem Ende gegen Assám umströmt.

In ihrer politischen Stellung sind die einzelnen Theile des westlichen Tíbet unter sich sehr verschieden; aber das östliche Tíbet, Bodyúl, ist seiner ganzen Ausdehnung nach eine einzige von China abhängige Provinz, nur unter getrennter Regierung und Administration[30]); das central gelegene Gnári Khórsum ist unmittelbar Provinz von China, und es war

30) Die Hauptgewalt der localen Beherrschung befindet sich für das östliche Tíbet in den Händen des Dálai Láma zu Lása, der den höchsten Rang unter den tibetischen Priestern einnimmt; aber auch der Pánchen Rinpoché, der hohe Priester zu Tassilhúnpo, westlich von Lása, hat eine Macht, die sich in mancher Richtung bis zu seiner Unabhängigkeit von Lása steigert“. „Reisen“, Band II S. 22.

desshalb ungeachtet grosser Vorsicht sehr schwer gewesen, in diesen Theil von Tíbet vorzudringen.

Ueber die Terrainverhältnisse des östlichen Tíbet sind neuerdings, erst seit Vorlage dieses Berichtes, gleichfalls Daten directer Entfernungs- und Höhen-Messungen durch einen Mann unseres früheren Gefolges, Nain Singh aus Mílum, nach Indien gelangt. Er war schon von uns mehrmals zu correspondirenden Beobachtungen an einzelnen Stationen und dann längs Routen verwendet worden, und hatte selbst, obwohl er nur hindostáni und tibetisch sprach, eine Zeit lang den Wunsch geäussert, nach Europa mit uns zu gehen, („Results" I. p. 39); später wurde er durch Oberst Montgomery als entsprechender Gehülfe der Great Trigonometrical Survey übernommen. (Was das Flusssystem betrifft, scheint er den Hauptfluss Ost-Tíbets, der nach den unmittelbaren Angaben, die ich in Bhután von Tibetern erhielt, in seinem oberen Theile Tsangbochú und im untern Dihóng genannt wird, ähnlich wie meist die Europäer in Indien vom eigentlichen Brahmapútra Assáms in der Benennung nicht getrennt zu halten. An der Vereinigungsstelle selbst bilden aber die beiden Flussrichtungen nahezu rechten Winkel und der Brahmapútra — oder „Lohít" bei den nordöstlich von Assám folgenden Aboriginern — ist in seiner Wassermenge der grössere. Eigene vergleichende Prüfung der zu bietenden Namen ist überhaupt von Eingebornen als Beobachtern, wenn auch practisch ganz gut vorbereitet, nicht zu erwarten).

Die Provinz Spíti ist seit 1849 in Besitz des indischen Reiches, aber als Dependenz mit besonderer Verwaltung. In der letzten Periode des Sikh-Reiches hatte Spíti zu diesem gehört; nach dem Friedensschlusse von 1846 war es als Lehen gegen Tribut dem damals selbstständigen Rája von Bisáhir verliehen worden, bei dem es aber nur drei Jahre belassen wurde.

Ladák war früher die Hauptprovinz eines tibetischen Königreiches, das erst von Guláb Singh erobert und seinem Kashmír-Reiche annektirt wurde. Mit den Provinzen von Rúpchu bis Núbra bildete es das Reich Ladák oder Mittel-Tíbet.

Bálti, mit Hazóra und Ghílghit zusammen als das Reich Bálti oder Klein-Tíbet bezeichnet und früher ebenfalls unabhängig, gehört jetzt

auch zu Kashmír. Nur Ghílghit ist noch jetzt nicht ganz von den Kashmíris bewältigt; zur Zeit unserer Reisen waren unter der Bevölkerung viele Unruhen und es konnten selbst die Sammler Ghílghit nicht besuchen. Gleiches hatten wir zum Theil von den ganz westlichen und nordwestlichen Gauen der Provinz Bálti, an Ghílghit grenzend, gehört, und es ergab sich auch, dass es dort allerdings für das Sammlen grosser Vorsicht bedurfte, aber mehr wegen Unsicherheit des Verkehres durch Plünderungen als wegen der politischen Zustände. —

Die Vertheilung unserer Bereisungen war die folgende:

Gnári Khórsum wurde 1855 von meinen Brüdern zuerst vom 9. Juli bis 22. August besucht, wobei sie bis Gártok, der Hauptstadt der Provinz, gelangten, jedoch unter grossen Schwierigkeiten mit den chinesischen Behörden sogleich an der Grenze schon; vom 5. bis 19. September hatte Adolph mit besserem Erfolge der Verkleidung ein zweitesmal neue Routen über den Himálayakamm in diesen Theil von Tíbet eingeschlagen [31]).

Im folgenden Jahre führten unsere Routen in das westliche Tíbet. Von Robert und von mir wurden von Mitte Juni bis 9. August, und dann — nach Rückkehr aus Turkistán — nochmals vom 4. September bis 11. und bis 14. October die Provinzen des Reiches Ladák bereist, wobei sogleich bei Beginn der Untersuchung jener Gebiete die Salzseen [32]) der Provinz Pangkóng für mich besonders viel des Neuen boten, selbst in der quantitativ spärlichen Flora, die ich dort zu beobachten und zu

---

31) Seit dem Vordringen nach Gnári Khórsum durch Colonel Henry und Major Richard Strachey, 1846 und 1849, war dort das chinesische Tíbet für Europäer um so schwerer zugänglich geworden; und nach der Reise meiner Brüder im Sommer 1855 blieben Europäer meist auf Jagdexcursionen unmittelbar an der Grenze von Gărhvál beschränkt. Jene von Capitain Bennett, im August 1865, dehnte sich wenigstens bis Dába aus. Erl. „Reisen“ Band III S. 56 u. 76.

Speciell botanisches Material, zum Vergleiche mit unserem, ist mir aus Gnári-Khórsum nicht bekannt geworden.

Andrew Wilson, in dem neuen Werke „The Abode of Snow“, Edinburgh & London 1875, erwähnt, dass die Verhältnisse auch jetzt noch sehr ungünstige sind, und dass es ihm nicht möglich wurde, Besuch Gnári Khórsums in Verbindung mit seinen Reisen nach den westlichen Gebieten Hochasiens auszuführen.

32) Besprochen in „Untersuchungen über die Salzseen im westlichen Tíbet und in Turkistán. I. Theil: Rúpchu und Pangkóng, das Gebiet der Salzseen im westlichen Tíbet.“ 4°. Abhandlungen der II. Cl. der Akad. der Wiss. Bd. XI. Abth. I. S. 115—190. München 1871.

sammeln Gelegenheit hatte; nördlich von diesen war Núbra wegen des unerwarteten Auftretens der wasserscheidenden Kammlinie [33]) für die Bedingungen der Pflanzenverbreitung von specieller Bedeutung geworden.

Adolph's Routen waren in Tsánskar oder Zánkhar [34]), und dann in Bálti und in Hazóra gelegen, vom 9. Juni bis Anfangs Oktober. Am nördlichsten, und auch am höchsten dort, war er in den Umgebungen des Mustágh-Gletschers gekommen.

Unsere Sammler konnten hier im westlichen Tíbet, nebst einzelnen an sich neuen Nebenrouten, für mehrere Lagen verlängerten Aufenthalt an Standquartieren des Trains zu fleissigem Begehen der Umgebungen benützen. So war es zu Le, der Hauptstadt von Ladák, und zu Skárdo, der Hauptstadt von Bálti; einmal bot sich ihnen auch eine Woche zu Táshing, einem Dorfe Hazóras, wo man nach Angabe der Eingebornen eine der mehr als mittelgut bewachsenen Stellen für solche Höhen zu erwarten hatte, was sich auch bewährte.

Im Jahre 1857 hatten Adolph's Wege nochmals durch Tíbet geführt, wobei er in Tsánskar eintrat, aber dann durch Rúpchu und Pangkóng nordwestlich sich wandte und Le nicht berührte, um unbeachtet nördlich von Tíbet vordringen zu können. Dabei hatte er nur wenig Zeit zu Aufenthalt; über den Bára Lácha-Pass der Himálaya-Kette kam er am 31. Mai, über den Chang Lang-Pass der Karakorúm-Kette am 18. Juni [35]); Herbarium-Material von dieser Route Adolph's, die er so rasch durchziehen musste, liegt mir nicht vor.

---

33) Nach Núbra war auch Dr. Thompson schon gekommen, 1848; „Western Himalaya and Tibet", London 1852, ist von ihm über seine Reisen erschienen. Er hatte dabei die Kammhöhe des Karakorúm erreicht, hatte aber den Karakorúm-Pass nicht überschritten und betrachtete diesen Pass „als eine Vorstufe zum Künlün, der als die wasserscheidende Kette noch folge". Erl. in „Die Pässe" u. s. w. Abh. d. k. b. Akad. Bd. XII. S. 14.

34) Des Vorkommens beider Benennungen dieser Provinz habe ich schon in Band III. der „Reisen" S 244 erläuternd erwähnt. Aus philologischer Analyse der in der Provinz selbst gesammelten Angaben hatte sich nemlich unserem Bruder Emil Zánkhar als die der angewandten Schreibweise entsprechende Form ergeben (bedeutend„ Kupfer-Veste"). Im Herbarium ist, der während der Reise gewählten Form entsprechend, „Tsánskar" beibehalten worden.

35) So nach seinen letzten Manuscripten, und dem Briefe, den ich 1869 von Abdúllah aus Káshmir, einem seiner Begleiter erhalten habe. In unserem Itinerary in den „Results", vol. I. 1861, p. 33, war nach dem ersten etwas unbestimmten Berichte der 9. Juli angenommen worden.

Die Bodengestaltung in Tíbet ist als jene eines „Hochgebirges" zu bezeichnen. Ungeachtet der bedeutenden Höhe über dem Meere auch der Thäler haben doch bei weitem die meisten Theile Tíbets sehr bestimmte Thalformen mit Unterschieden relativer Höhe zwischen den Thallinien und ihren Umgebungen, die in jedem andern Gebirge, von geringerer Gesammterhebung, noch immer an sich als sehr grosse auffallen würden.

Das Ansteigen zu Pässen, auch zu solchen, die in sekundären Kämmen zwischen den Thälern liegen, beträgt im Mittel der beiden Abdachungen meist 2500 bis 3000 engl. Fuss; doch sind selbst entsprechende Höhendifferenzen von 6000 und von 7000 Fuss nicht selten. Als Beispiele, wie deren viele noch vorliegen, nenne ich aus Gnári Khórsum den Chomoráng-Pass, aus Ladák und aus Núbra den Laóche-Pass und den Sássar-Pass [36]). Eigentlicher Plateaux werde ich nördlich vom Karakorúm-Kamme, auf der Seite seiner Abdachung gegen den Künlün, zu erwähnen haben. Es ist von Bedeutung, diese topographischen Formen und ihre Verschiedenheit von den Annahmen, die früher und meist in der letzten Zeit noch gemacht worden sind, bei der Beurtheilung des Auftretens und der Verbreitung der Flora dieser Gebiete ebenfalls im Auge zu behalten. Es folgt daraus unmittelbar für die Wärmeverhältnisse, wie sich oft genug in unerwarteten Extremen während der Reisen gezeigt hat, grössere Verschiedenheit, und grössere Veränderlichkeit innerhalb der Grenzen der Maxima und Minima der Temperatur der Luft und des Bodens, als eine mehr gleichmässige Erhebung solches bedingen würde. Dabei ist auch auf die mechanische Verbreitung vieler Theile der Flora die Bodengestaltung an sich, — ob so, wie hier sie vorliegt, oder ob Plateauform mit relativ geringen

---

36) Chomoráng-Pass, zwischen dem Industhale und dem Hochlande Sárthol, Höhe des Passes 18,760 F.; Industhal, südwestlich vom Passe bei der Zeltstadt Giachurúff, 15,730 F.; Thok Jálung, Zeltstadt im Goldfelde, 16,330 F.

Laóche-Pass, zwischen Ladák und Núbra, Höhe des Passes 17,911 F.; Höhe des Indus-Thales am Südfusse, bei Le, 10,723 F.; Höhe von Kárdong auf der ersten nördlichen Vorstufe 12,878 F.; Höhe von Dískit am Shayók-Flusse, 13 engl. M. nordwestlich davon, 9,968 F.

Sássar-Pass in Núbra, für die Sommerroute (von Ladák nach Yárkand) im Shayók-Thale benützt, Höhe des Passes 17,735 F; Haltestelle Pantángsa am Südfusse des Passes 14,644 F.; Haltestelle Sássar am Nordfusse des Passes 15,339 F.

Höhenverschiedenheiten — von wichtiger Einwirkung; es ändert sich mit ihr sowohl der Effect der Winde als jener des abströmenden Wassers.

Ganz den Verhältnissen der Kämme entsprechend zeigte sich die Gestaltung der einzelnen der grossen Schneegipfel in Tíbet. Die drei höchsten bis jetzt bekannten Gipfel dieses Gebietes liegen in der Karakorúm-Kette; es sind diese der Dápsang[37]), mit 28,278 F., der Diámar mit 26,629 F., der Macheribrúm mit 25,626 F. Höhe.

Der untere Rand des Karakorúm schliesst sich gegen Norden, in der Mongolei und im östlichen Turkistán, fast seiner ganzen Ausdehnung entlang den Abhängen des gegenüber liegenden Künlún-Gebirges an; die mittlere Höhe längs der Berührungslinie zwischen diesen beiden Gebirgen ist zu 12,000 bis 13,000 Fuss anzunehmen.

Nur an einer verhältnissmässig schmalen Stelle jenseits des westlichen Endes des Künlún schieben sich nordöstlich gerichtete Ausläufer des Karakorúm-Kammes, jenen des Bólor Tāgh sich anschliessend, zwischen dem Yárkand-Flusse und dem Tashkurgán-Flusse weiter vor, geringere Höhe an ihrer unteren Grenze erreichend.

Positive Daten der Beobachtung liegen für den betreffenden Theil nicht vor.

Am Südrande von Tibet sind die niedersten Punkte die Austrittsstellen des Indus und des Sắtlej.

Der Indus senkt sich bei Búnji in Bálti zu 4870 F. Bei Skárdo, der Hauptstadt von Bálti, in der verhältnissmässig geringen Entfernung von 75 engl. M. Stromlänge hat das Niveau des Indus noch 7255 F. Höhe. Aber unmittelbar ober dieser Austrittsstelle, gegen Norden und viel weiter noch gegen Nordwesten längs dem Yássin-Seitenflusse über Ghílghit sich hinziehend, bietet sich eine breite durch Erosion entleerte Thalmulde, die einst als See gefüllt war; so hat Ghílghit, obwohl 25 engl. Meilen noch von der Einmündung des Yássin in den Indus bei Búnji entfernt und auf einer Alluvial-Stufe des rechten Ufers gelegen, erst 5025 F. Höhe.

---

37) Ungeachtet seiner mehr als 900 engl. Meilen weit, gegen Nordwesten, entfernten Lage, bei 35° 53′ nördl. Breite, 76° 34′ östl. Länge von Green., ist die Höhe des Dápsang nur von jener des Gaurisánkar übertroffen; die geographischen Coordinaten des letzteren sind 27° 59·3′ nördl. Breite, 86° 54·7′ östl. Länge von Green., 29,002 F. (8839·5 Meter) Höhe.

Der Sâtlej hat bei Brúang, dem ersten grösseren Dorfe nahe seiner Austrittsstelle aber schon ausserhalb der Kammlinie, auf der Kanáur-Seite gelegen, eine Höhe von 5946 Fuss.

Diese und ähnliche für Tíbet tief herabreichende Thalgebiete waren ungeachtet ihres vereinzelten Vorkommens doch in pflanzengeographischer Beziehung nicht unbeachtet zu lassen, insofern sich dort bei dem Auftreten einzelner indischer Formen für diese wenigstens über die „Möglichkeit räumlicher Verbreitung" und über die „Widerstandsfähigkeit gegen Trockenheit, sowie gegen ziemlich kühle Lufttemperatur bei intensiver Besonnung" Entscheidung bietet.

Landesregion III. „Hochland Ost-Turkistáns vom Karakorúm-Kamme gegen Norden, und Künlün-Gebirge".

In der Zusammenstellung der Pflanzen sind zwei Gruppen unterschieden,

1. Gruppe, signirt „Karakorúm"
   mit der Provinz: Yárkand;
2. Gruppe, signirt „Künlün"
   mit den Provinzen: Yárkand — Khótan.

Diese hier sich bietenden nördlichen Theile Hochasiens sind es, innerhalb welcher, verschieden von der so prägnirten Thalbildung in Tíbet, grosse Strecken als „Hochland-Wüsten" in der Form schneefreier aber steriler Gebirgsplateaux zu bezeichnen sind. Solches gilt vorherrschend für die oberen Terrainstufen von der Karokorúm-Kammlinie gegen Norden, theilweise auch für das gegenüber sich erhebende Südgehänge des Künlün; nördlich von der Kammlinie des Künlün sind die gewöhnlichen Gebirgsformen das Vorherrschende, nämlich gut markirte Kamm- und Thal-Bildung. In den grossen Höhen ist im Künlün-Gebirge die Nordseite die steilere; in den Mittelstufen der Nordseite aber schieben sich die Kämme und Thäler, verhältnissmässig langsam ihre Höhe ändernd, weit gegen Norden vor und die Abdachung ist bedeutend flacher. Auch die seitlichen Gefälle sind in entsprechender Weise gestaltet.

Das Gebiet zwischen dem Karakorúm und dem Künlün ist hier ganz unbewohnt, und zeigte sich sehr arm an Vegetation, wegen grosser Erhebung bei grosser Trockenheit. Am Nordgehänge des Künlün haben die Verhältnisse des Klimas und der Vegetation sehr deut-

lich anderen Charakter. In Folge vermehrter Feuchtigkeit und grösserer Regenmenge findet sich dort gut entwickelte Grasvegetation noch oberhalb der Strauchgrenze, während in den Hochwüsten holzbildende Gewächse die letzten Formen sind, welche den Wirkungen nächtlicher Strahlung und heftiger Stürme Widerstand bieten können. Bewohnte Orte reichen auf der Nordseite des Künlűn, bei einer Breite von $36-36^1/_2{}^0$ Norden, bis zu 9000 und 9500 Fuss Höhe; Weideplätze sahen wir mit Schafherden bis zu 13,000 F. bezogen. Verhältnissmässig noch günstiger ist das Klima in den Vorbergen des Nordrandes und in den ersten Stufen des Flachlandes von Turkistán. Doch schon in geringer Entfernung vom Gebirge, zeigt sich der bei weitem grössere Theil Turkistáns durch die Wüste Góbi bedeckt, in welche nur an den Ufern der Flüsse landschaftlich bemerkbares Auftreten von Vegetation etwas weiter noch sich vorschiebt; zum grössten Theile wäre dasselbe auch in solchen Lagen noch weniger häufig und, besonders in seiner Breite, viel enger begrenzt, wenn nicht mit den Culturen der Bewohner die Bodenbewässerung ziemlich weit sich ausdehnte.

Die Dichtigkeit der Bevölkerung ist hier, wie dem ganzen Nordrande Hochasiens entlang, eine sehr geringe. In den östlichen Theilen sind die Bewohner Turkistáns Mongolen mit vereinzelten türkischen Karavanen-Kaufleuten; die westlichen Theile sind ausschliesslich von Túrkis (arischer Raçe) bewohnt. Das Gebiet dieser letztern dehnt sich noch weiter gegen Westen aus als die Karakorúm-Kette und zieht sich dem Hindukúsh entlang noch fort; doch zerfällt es in zwei durch das sekundäre und langsam ansteigende aber wasserscheidende Gebirge des Bolor Tāgh getrennte Reiche, in Ost-Turkistán, das hier vertretene längs des Karakorúm- und Künlűn-Gebirges, und in West-Turkistán [38]) längs des Hindukúsh-Gebirges.

---

28) West-Turkistán ist seit einigen Jahren Provinz Russlands geworden, dessen Macht auch in den südlichen Theilen des centralen Asien stetig sich ausdehnt. — Durch dieses Gebiet und, nördlich von den Erhebungen des Karakorúm und Künlűn, über den Bólor Tāgh, hatte Marco Polo's erste Europäer-Route nach Yárkand im 13. Jahrhundert geführt. Zu vergl. neue Abb. von J. B. Paquier „Itinéraire de Marco Polo", mit Karte, Bull. Soc. de Géogr. de Paris, Aug. 1876.

Ost-Turkistán, in das wir über die Karakorúm- und über die Künlün-Kette als die ersten Europäer vordringen konnten, erreichten wir 1856 und 1857. Die Provinzen dieser Landesregion und die Zeit des Sammelns betreffend sind noch die folgenden Daten beizufügen.

Im Sommer 1856 kamen wir — Hermann und Robert — am 9. August über den Karakorúm, wobei der gleichnamige Pass gewählt wurde, in das obere Yárkand. Am 23. August gelangten wir mit Ueberschreiten des Élchi-Passes des Künlün nach Khótan; Rückkehr nach Núbra über den Karakorúm-Pass am 4. September.

Von diesen beiden im Herbarium vertretenen Provinzen liegt Khótan mit der Hauptstadt Élchi im südöstlichen Theile Turkistáns, ist aber im Süden von der Kammlinie der Künlün-Kette, nicht von der Karakorúm-Kette begrenzt. Die Provinz Yárkand dagegen zieht sich bei Khótan eine Strecke weit von Südosten nach Nordwesten herab und liegt noch zwischen den beiden Kämmen; dann wendet sie sich, die westlichen Ausläufer des Künlün einschliessend, gegen Norden und bald darauf weit gegen Osten.

Für den Karakorúm auf der Yarkánd-Seite liegen bei unsern Pflanzen nur solche aus den obersten Terrainstufen und aus den mittleren Erhebungen vor, und auf den Folien der Exemplare aus Turkistán waren sie anfangs nicht als Gruppe von jenen des Künlün getrennt, sondern nur durch die Provinz- und Lokalitäts-Benennung unterschieden. Bei der definitiven Gruppirung hat sich genug des Materiales für Trennung gezeigt.

Westlich und nördlich von Yárkand folgen in Ost-Turkistán die Provinzen Tashkurgán und Káshgar[39]. Die erstere, von geringer Breite gegen Norden, ist im Westen vom Bólor Tāgh-Gebirge begrenzt, im Norden von Káshgar. Die Provinz Káshgar erstreckt sich im Westen gleichfalls an die Kammlinie des Bólor Tāgh, gegen Norden an jene der

39) Die topographischen Daten über diese Theile Turkistáns habe ich allgemein zusammengestellt in dem Berichte „Die Pässe über die Kammlinie des Karakorúm und des Künlün in Bálti, in Ladák und im östlichen Turkistán. Nach unseren Beobachtungen von 1856 und 1857 und den neueren Expeditionen.“ Abhandlungen der II. Cl. der k. b. Akad. der Wiss. Bd. XII. Abth. I. S. 1 bis 116. München 1874. (Im Auszuge in Ausland, Mai 1875.)

Thianshán-Kette, gegen Osten und zum grössten Theile gegen Süden ist sie durch die Provinz Yárkand begrenzt. In unserem Herbarium sind diese beiden Provinzen nicht vertreten. Die erstere wurde überhaupt von keiner unserer Routen berührt.

Nach Turkistán gelangte Adolph im Juni 1857, aber unter Umständen, die schon seit längerer Zeit Sammeln jeder Art unmöglich gemacht hatten.

Die Wälle Yárkands erreichte er am 16. August; sein letztes Lager war am 25. und 26. August zu Káshgar, 2 engl. Meilen südlich von der Stadt, aufgeschlagen.

Im Jahre 1856 gehörte ganz Ost-Turkistán zum Chinesischen Reiche, und Europäern, die als solche sich dort hätten zeigen wollen, wäre der Eintritt absolut verweigert worden. Im Frühling 1857 hatte Aufstand gegen China begonnen, und gegenwärtig ist Ost-Turkistán selbstständig geworden unter einem mussălmánischen Herrscher, dem Amír Mohámmad Yákub Khan, der seinen Sitz in Káshgar hat.

Ueber die Maxima der Erhebung im Künlǘn-Gebirge ist zur Zeit mit Bestimmtheit noch nicht zu urtheilen; doch lassen sich Höhen bis gegen 22,000 F. annehmen, da schon jetzt Gipfel bis an 21,000 F. ziemlich zahlreich bekannt sind und da wenigstens in den mittleren Theilen, und in Turkistán auch noch bis ganz nahe heran an das Ende, die Kammhöhe eine sehr bedeutende ist.

Für den Südrand des Künlǘn ist, wie ich schon im Karakorúm-Gebiete zu erwähnen hatte, 12,000 bis 13,000 F. die mittlere Höhe wohl längs des grössten Theiles desselben; hier ist beizufügen, dass am West-Künlǘn, südlich noch — aber schon ziemlich nahe der Stelle, wo der Yárkand-Fluss das Ende desselben umströmt — etwas raschere Depression des basischen Randes beginnt; dessenungeachtet wird am Fusse des letzten, nordwestlich gestellten Theiles des Kammes, mit Ausschluss der secundären kleinen Vorberge, die Höhe kaum unter 8000 Fuss sich senken.

Die Thalhöhe in jener Unterbrechung des Kammes, durch welche der Karakásh-Fluss, Ost- und West-Künlǘn trennend, austritt, kann nirgend niedrer als 11,400 F. sein; am Halteplatze Pilartakásh, schon ein wenig nördlich und thalabwärts davon, ist sie 11,396 Fuss. Aehn-

lich scheint auch die östicher gelegene Austrittsstelle des Kéria-Flusses gestaltet zu sein.

Als Höhe des oberen Randes des Steppenlandes von Ost-Turkistán, das nördlich vom Künlün-Gebirge folgt, hat sich längs der Linie, welche die Hauptorte Élchi, Kárghalik, Yárkand und Káshgar verbindet, zwischen 5000 und 4000 F. ergeben. (Der mehr als 12 Längengrade östlich von Káshgar gelegene See Lop ist noch bedeutend niedrer; für diesen wird die Höhe zu 2500 F. (?) angenommen.)

III.

Die Localitäten und ihre Höhen in allgemeiner Zusammenstellung.

Das Unterscheiden der Localitäten. — Ausdehnung und Höhenbegrenzung. — Anlage der alphabetischen Liste. — Angaben über Schneegrenze. — Tabellarische Uebersicht.

Die Bezeichnung als Localität ist in ihrer topographischen Bedeutung nach den Ortsnamen [40]) und den damit verbundenen Höhenzahlen zu beurtheilen. „Localität" bezieht sich entweder auf Gruppen von Fundstellen unter gleichen Verhältnissen der Bodengestaltung, die relativ breiten zusammenhängenden Flächen angehören, oder auf Fundstellen in Aufeinanderfolge längs der verschiedenen Märsche, mit Angabe der beiden begrenzenden Punkte sowie, bei stark undulirtem Terrain, auch zwischenliegender Orte. Es sind jedoch in diesen letzteren Gruppen ebenfalls nur Fundstellen zusammengefasst worden, welche gleichen Charakter des Klimas haben, abgesehen vom direkten Einflusse der Höhe, und gleiche geologische Beschaffenheit.

Diejenigen Orte, deren Umgebungen in verhältnissmässig grossem Umkreise und dessenungeachtet mit Sorgfalt durchsucht werden konnten, waren meist jene, wo zu correspondirenden meteorologischen Beobachtungen, und weiter im Innern zur Regulirung der Möglichkeit des Verkehres und zur Sicherung unserer Proviante, Gefolge und Vorrath zeitweise zurückgelassen werden musste; dort bot sich dann auch Ge-

---

40) Orte, die unbewohnt waren, sind als „Déras oder „Halteplätze", mit △ als Signatur, unterschieden.

legenheit zu längerem Aufenthalte für einige der Sammler. Als Haltestationen dieser Art sind zu nennen Darjíling, Kathmándu, Srinágar, Le, Skárdo, u. s. w.

Als ziemlich enge begrenzt dagegen, auch in ihrer Flächenausdehnung, sind jene Localitäten zu verstehen, bei welchen für ihre Höhenverhältnisse nur eine Zahl gegeben ist („zwischen 2 Strichen", erl. S. 14), ohne dass das Wort „Umgebungen" noch besonders beigefügt ist.

Ist bei Pässen Abhang nach einer Seite hin als Localität getrennt gehalten, so ist diess besonders bezeichnet. Gewöhnlich liegen Orte oder Halteplätze diesseits und jenseits des Passes vor, und es ist dann die Passhöhe zwischen denselben, für welche die Zahl gleichfalls separat angegeben ist, mitinbegriffen, wenn sie nicht durch Klammern als „nicht vertreten im betreffenden Pflanzenmateriale" markirt ist.

Letztere Fälle waren meist Passübergänge, welche wegen grosser Höhe permanent oder temporär firn- und schnee-bedeckt sich zeigten, oder jene in wüstenartiger Lage bei grosser Trockenheit.

In der alphabetisch geordneten Liste, die ich hier vorlege, sind jetzt fast alle der wiederholt sich bietenden Localitäten mit ihren Höhen zusammengestellt. Die Gesammtzahl der Namenangaben, welche theils für die Flächen speciell anzuführen waren, theils für Pässe und Stationen im Innern derselben, wird für das ganze Herbarium gegen 500 sein.

Unerwähnt bleiben hier, um zu kürzen, jene Localitäten, die bei ganz isolirten Pflanzenformen, meist aus subtropischen Gebieten, vorkommen, und die dann bei den betreffenden Pflanzen selbst besprochen werden. Einige andere Daten werden in geringer Zahl noch aus dem Materiale, was gegenwärtig zu systematischer Untersuchung fortgesandt ist, nachzutragen sein[41]).

In der „tabellarischen Uebersicht" sind allen Localitäten die betreffenden Landesregionen und Provinzen beigefügt. Es war dies nöthig um, mit

---

41) In „Results", vol. VII, werde ich später noch die Höhengrenzen von Culturen und von solchen Pflanzen, deren Auftreten ohne eingelegte Exemplare verzeichnet wurde, in das Register aufnehmen; ferner wird dort, um den Vergleich mit dem Materiale anderer Sammlungen zu erleichtern, für jede der Localitäten ausser dem Ausgangspunkte selbst eine kurze Hinweisung auf diesen für die Endpunkte und für die mit Namen erwähnten zwischenliegenden Orte, Halteplätze und Pässe im Register gegeben.

gleichzeitiger Berücksichtigung der betreffenden Höhen, aus den später folgenden klimatischen Angaben die meteorologischen Verhältnisse nach Lage und Bodengestaltung für die Standorte beurtheilen zu können. Zugleich lässt die hier gegebene Uebersicht hervortreten, wo topographische Grenzen zwischen Provinzen, auch zwischen Landesregionen, innerhalb einer in ihrem pflanzengeographischen Charakter nicht getrennt zu haltenden Localität gelegen sind.

Da bei der geringen Zahl der Landesregionen die Namen derselben oft sich wiederholen müssen, sind die Bezeichnungen für diese möglichst kurz gewählt[42].

Die Angabe der Landesregionen und der Provinzen in Verbindung mit den Höhen lässt beurtheilen, welche Localitäten die subnivalen und die nivalen Regionen erreichen, wenn die Lage der Schneegrenze damit verglichen wird. Letztere ist bei der Ausdehnung des Gebirges in den einzelnen Theilen sehr verschieden.

Die Höhen, die sich uns als Mittel für die Schneegrenze ergeben hatten, sind die folgenden.

1) Himálaya-Kette:

In der Breite von Bhután bis Kashmír, von $27^1/_2{}^0$ bis $34^1/_2{}^0$ N.
Südliche oder indische Seite . . . . : . 16,200 F.
Nördliche oder tibetische Seite . . . . 18,600 F.

Bedingt ist die grosse Höhe auf der Nordseite durch die ungleich geringere Menge des Niederschlages, der dort zum Schmelzen sich bietet. In Hazóra, norwestlich von Kashmír, tritt, mit Ausdehnung grösseren Schneefalles auch auf die Nordseite, die der Breite entsprechende Senkung der Schneelinie wieder ein; Schneegrenze in Hazóra, Mittel . . . . 15,600 F.

2) Karakorúm-Kette:

Breite von 28^0 N. im östlichen Tíbet bis über 36^0 N. in (Ost-)Turkistán.
Mittel beider Seiten . . . . 19,000 F.

Der Unterschied zwischen den beiden Seiten ist, bei der vorherrschend nordwestlichen Richtung der Kammlinie und

42) Sie sind identisch mit dem S. 20 englisch gegebenen „Signaturen“, welche dort direct auf die Folien des Herbariums bezogen sind.

bei den im oberen Ost-Turkistán sowie in Tíbet nur geringen Niederschlagsmengen, nirgend bedeutend.

Die Exposition aber an den einzelnen Lagen zeigte grossen Einfluss. In Tíbet, meist auch in Turkistán, ist

Mittel für Nordexposition . . . . 18,600 F.
Mittel für Südexposition . . . . 19,600 F.

In einiger Entfernung vom Kamme gegen Norden macht sich in Turkistán Depression durch etwas vermehrten Schneefall bemerkbar[43]).

3) Künlün-Kette:

Die Strecke zwischen 36⁰ und 36½⁰ N., bei vorherrschend west-östlicher Richtung.

Südseite, gegenüber der Karakorúm-Kette . . . . 15,800 F.
Nordseite, gegen die Turkistán-Senkung gewendet[44]) . . . 15,100 F.

In diesem Theile des Künlün, wo von uns gesammelt wurde, liegt die Schneegrenze im Mittel bei etwas wärmerer Temperatur als im Karakorúm, ist aber noch immer für diese Breite ausnahmsweise hoch; an einzelnen, durch Exposition begünstigten Stellen und, allgemein, weiter gegen Osten coïncidirt die Schneegrenze im Künlün sogar mit Höhenisothermen kühler noch als jene an der Schneegrenze im Karakorúm.

Im Hindukúsh wird die Schneegrenze — gegen Westen rasch sich ändernd — bedeutend niedrer, und lässt deutlich auf vermehrte Niederschlagsmenge schliessen, ebenso wie der bis jetzt bekannte Vegetationscharacter jener Gebiete. —

Wenn für Localitäten unterhalb der Schneegrenze örtlich beschränkende Bedingungen der Wärme vorhanden waren, wie Gletscher und Tieffirne und andere Eisreste, oder im entgegengesetzten Sinne wirkend, warme Quellen u. s. w., so ist diess mit der Bezeichnung des Standortes selbst verbunden.

---

43) Wie die Zusammenstellung mit den entsprechenden Höhenisothermen mir ergab, ist nicht die Schneegrenze auf der Himálaya-Südseite für diese Breiten das Exceptionelle, sondern ihre bedeutende Höhe in den centralen Lagen. „Results“ Vol. IV. S. 566—572.

44) In den Alpen erhielten wir in mittlerer Breite von 46½⁰ N.
Schneegrenze auf Südseite 9,200 engl. F.;
„ auf Nordseite 8900 engl. F.
„Phys. Geogr. der Alpen.“ Bd. II. 1854, S. 596, 597; dort für 9 Gebiete getrennt gegeben.

Tabellarische Uebersicht.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
A.		
Amarkántak-Plateau, Abhänge bei der Nărbádda-Quelle	3200′—3600′	Central-Indien; Málva.
Amarkántak-Plateau, unter der Paidéra- und der Johílla-Quelle	2000′—2900′	Central-Indien; Málva.
(Höhe der Johílla-Quelle	3435′)	,, ,,
B.		
Badrináth und Umgebungen, rechte Seite des Vishnugánga-Flusses	10,000′—10,600′	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Bágesar viâ Káthi und Namŭ́k nach Munshári	5000′—7800′	Westl. Himálaya; Kămáon.
Bagmaharál und Umgebungen, nordöstlich von Skárdo und Shígar	15,300′—11,000′	Tíbet; Bálti.
Von △ Báltal nach Nunér	9300′—5200′	Westl. Himálaya; Kashmír.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Am Bámsuru-Passe zwischen dem Bhagiráthi- und dem Jămna-Thale	15,300'—15,600'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Höhe des Bámsuru-Passes	15,460'	,, ,,
Ufer des Bandáni-Flusses, in der Nähe von Pesháur	—1200'—	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Am Bára Lácha-Passe, auf beiden Abhängen	16,000'—16,200'	Westl. Himál.-Tibet; Lahól-Tsánskar.
Höhe des Bára Lácha Passes	16,186'	,, ,,
Von Baramúla nach Méra im Jhílum-Thale	5500'—4800'	Westl Himálaya; Kashmír.
Von Birkót nach Mandrássi	4000'—8000'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Béla nach Mággar Pir im Indus-Delta	—50'—	Westl. Indien; Sindh.
Bhábeh, und südliche Abhänge des Tári-Passes	8000'—10,000'	Westl. Himálaya; Kănáur.
Von Bhadrár nach Kishtvár	4500'—5500'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Bhága-Fluss, rechtes Ufer, bei Kólang, gegenüber Kárdong	10,000'—15,000'	Westl. Himálaya; Lahól.
Brahmapútra-Thal und Ganges-Delta, von Gohátti nach Calcutta	120'—10'	Oestl. Indien-Gangesdelta; Assám-unteres Bengalen.
Am Búbang- oder Súru-Passe, zunächst der Uebergangsstelle	—15,500'—	Tíbet-Westl. Himálaya; Dras-Kashmír.
Höhe des Búbang-Passes	15,481'	,, ,,

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
C.		
Von Chadrár nach Kishtvár	6000′—4000′	Westl. Himálaya; Kishtvár.
Von △ Chála nach △ Tákenak	15,000′—14,000′	Tíbet; Tsánskar.
Chámba und südliche Abhänge des Pádri-Passes	5000′—8000′	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Cherrapúnji und Umgebungen gegen Máirong	2800′—4500′	Oestl. Indien; Khássia-Gebirge.
Vom Chorbád La-Passe nach △ Chungáki, Nordabhang des Passes	17,000′—15,000′	Tíbet; Bálti.
Höhe des Chorbád La-Passes	16976′	„ „
D.		
Da und Umgebungen, rechtes Indus-Ufer	9500′—9700′	Tíbet; Ladák.
Dárche und Umgebungen, am Bhága-Flusse	—11,700′—	Westl. Himálaya; Lahól.
Darjíling, Hauptstation von Britisch Síkkim, und Umgebungen	6000′—8000′	Oestl. Himálaya; Síkkim.
Von Das viâ Góltere (oder Naugáũ) über den Góltere-Seitenpass	10,900′—7100′	Tíbet; Hazóra.
Von Das viâ Naugáũ (oder Góltere) nach Hazóra, Thalweg	10,900′—7100′	Tíbet; Hazóra.
Von Dáulat Beg Úlde an den Süd-fuss des Karakorúm-Passes	16,500′—17,000′	Tíbet; Núbra.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Dĕra Ismăel Khan und Umgebungen, am rechten Indus-Ufer	—480'—	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Dĕra Ismăel Khan nach Sháhpur, viâ Sindh-Ságar-Duáb	480'—680'	Nordwstl. Indien; Pănjab.
Vom Dorikón-Passe gegen Gurés, Südabhang des Passes	13,800'—7500'	Westl. Himálaya; Kashmír.
Höhe des Dorikón-Passes.	13,780'	Kashmír-Hazóra.
Vom Dorikón-Passe gegen Táshing, Nordabhang des Passes	13,800'—10,800'	Tíbet; Hazóra.
Von Dras nach Matáĭ	10,400'—9900'	Tíbet; Dras.
Von Dúrguk an den Chang La-Pass, mittlere Abhänge des Passes („Dz", nach Schreibweise auf den Folien des Herbariums, ist jetzt rubricirt als geschrieben mit „J")	—15,000'—	Tíbet; Ladák.
G.		
Im Gándak-Flusse, an periodisch trocknen Stellen des Flussbettes; bei Pátna	—170'—	Ganges-Delta; Unteres Bahár.
Von Gaurikúnd viâ Trijúgi Naráin und Másar Tal nach Bhíllung	6400'—7600'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Ghástali über den Mána-Pass nach dem Déo Tal-See	13,400'—17,600'	Tíbet-Westlicher Himálaya; Gnári Khórsum-Gărhvál.
(Höhe des Mána-Passes	18,406')	„ „

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Von Góbesar nach Ókimath, über Seitenkamm	5000'—6800'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Gúe nach Páttere Brok	8000'—10,000'	Tíbet; Hazóra.
Gurés und Umgebungen, nördlich von Srinăgar	7000'—8000'	Westl. Himálaya; Kashmír.
Von Gurés viâ Úlli-Plain und zwei kleine Pässe nach Bándipur	12,000'—13,500'	Westl. Himálaya; Kashmír.
Gya und Umgebungen, mit Lámagärten	13,000'—14,000'	Tíbet; Ladák.
Garten des Klosters	13,548'	
H.		
Hímis und Umgebungen, mit Láma-Culturen	12,100'—12,500'	Tíbet; Ladák.
Garten des Klosters	12,324'	
Von Húshe nach △ Brámi Ráma, längs des Ausflusses des Sóspor-Gletschers	10,000'—13,000'	Tíbet; Bálti.
Von Húshe viâ Háldi nach Chorkónda	8500'—11,200'	Tíbet; Bálti.
J.		
Von Jăblpur an den Fuss des Amarkántak-Plateau	1800'—2500'	Central Indien; Málva.
Jámrud und Umgebungen, bei Peshâur	1100'—1500'	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Ufer des Jhílum-Flusses bei Islamabád	—5800'—	Westl. Himálaya; Kashmír.
Von Jhósimāth nach Góbesar, im Alaknánda-Thale	6200'—4500'	Westl. Himálaya; Gărhvál.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
K.		
Von Kalabágh viâ Lăkki im WSW. nach Dēra Ismāel Khan, rechte Seite des Indus	790′—480′	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Kalabágh den Indus abwärts, auf linker Thalseite	790′—550′	Nordwstl. Indien; Panjáb.
Vom Káli-Passe, nordöstlich von Chámba, gegen Chámba	—10,500′—	Westl. Himálaya; Chámba.
Von Kálka viâ Kassáuli nach Sabáthu	2000′—4600′	Westl. Himálaya; Símla.
Von Káltse nach Dámkar, rechte Seite des Indus-Thales	9700′—8000′	Tíbet; Ladák.
Von Kándala-Passe viâ △ Shíngo nach Márka	14,000′—10,000′	Tíbet; Ladák.
Von Kánhpur (vulgo Cawnpore) viâ Ágra nach Ambála	400′—900′	Hindostán (nordwestlich von Bengalen).
Am Karakorúm-Plateau, nordöstlich vom Passe	—17,000′—	Karakorúm; Yárkand.
(Höhe des Karakorúm-Passes	18,345′)	Núbra-Yárkand.
Von Kárchas nach Khársand	—12,000′—	Tíbet; Núbra.
Kárdong und Umgebungen, am linken Ufer des Bhága-, später Chináb-Flusses	—10,240′—	Westl. Himálaya; Lahól.
Von Kárdong an die Baumgrenze, linke Seite des Bhága-Thales	10,200′—11,800′	Westl. Himálaya; Lahól
Von Kárdong nach Dárche, Dorf an der Getreidegrenze, rechte Seite des Bhága-Thales	10,200′—11,750′	Westl. Himálaya; Lahól.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Von Kárdong nach Dískit, linke Seite des Shayók-Flusses	13,000'—9900'	Tíbet; Núbra.
Von Kárgil viâ Súru nach △ Tsríngma	8800'—13,500'	Tíbet; Dras.
Kărráchi und Umgebungen, im Indus-Delta	10'—80'	Westl. Indien; Sindh.
Von Kărráchi bis Títta, am rechten Indus-Ufer	10'—120'	Westl. Indien; Sindh.
Kashmír-Thalbecken, durch Erosion entleert; Umgebungen von Srinăgar, 8 engl. M. im Umkreise	5000'—5300'	Westl. Himálaya; Kashmír.
Kathmándu-Thalbecken, Hauptstadt und Umgebungen	5000'—7000'	Central-Himálaya; Nepál.
Khánpur und Umgebungen, im unteren Indus-Thale	250'—400'	Westl. Indien; Sindh.
Khápalu und Umgebungen, linke Seite des Shayók-Flusses	—8300'—	Tíbet; Bálti.
Von Khárbu Kóma und Umgebungen, südwestl. von Da, gegen Sháksi;	[illegible]—10,500'	Tíbet; Dras.
Von Khărsáli viâ Rána nach Kutnór, im Jămna-Thale	8900'—6100'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Khărsáli am Jămna-Flusse nach Súkhi am Bhagiráthi-Flusse	8900'—7600'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
△ Kinnibári und Umgebungen, Abhänge des Kinnibári-Peak	11,000'—13,000'	Tíbet; Hazóra.
(Gipfel des Kinnibári-Peak	15,718')	" "
Kishtvár-Thalbecken, Stadt und Umgebungen	5000'—7000'	Westl. Himálaya; Kishtvár.
Von Kishtvár zum Pir Păcháski- oder Kishtvár-Passe	5500'—15,500'	Westl. Himálaya; Kishtvár.

Bezeichnung der Lokalitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Vom Kishtvár-Passe gegen Islamabád	15,500'—5900'	Westl. Himálaya; Kashmír.
Am Kiúk Kiöl-See; trocknes Ausfluss-Bett, Uferrand des Sees und Terrassen	15,200'—15,500'	Künlün; Yárkand.
Vom Kiúk Kiöl-See nach △ Sikăndar Mokám	15,500'—13,800'	Künlün; Yárkand.
Kohát und Umgebungen, südlich von Pesháur	—1700'—	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Kohát nach Kalabágh, am westlichen Ufer des Indus	1700'—790'	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Kóksar nach Kárdong	10,400'—10,200'	Westl. Himálaya; Lahól.
Kólung und Umgebungen, am rechten Ufer des Bhága-Fl. gegenüber Kárdong; bis an die Baumgrenze reichend	—11,600'—	Westl. Himalaya; Lahól.
Kōt und Umgebungen, Südabhang des Chellóri-Passes	7500'—7090'	Westl. Himálaya; Kúlu.
Von Kráni nach Bhuj	600'—270'	Westl. Indien; Kăchh.
Von Kunés, rechte Seite des Shayók-Thales, viâ Kíris nach Néru, rechte Seite des Indus-Thales	—9000'—	Tíbet; Bálti.
L.		
Vom Lácha Lung-Passe nach △ Phang, am NO.-Abhange	16,800'—15,800'	Tíbet; Rúpchu.
Höhe des Lácha Lung-Passes	16,750'	„ „
Lahór und Umgebungen, im Bári Duáb	—840'—	Nordwstl. Indien; Pánjab.

Bezeichnung der Lokalitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss	Landesregionen und Provinzen.
Vom Laóche-Passe nach Kárdong, Nordabhang	18,000'—10,200'	Tíbet; Núbra.
Höhe des Laóche-Passes	17,911'	Ladak-Núbra.
Von △ Laptél nach △ Sélchell und △ Háti	13,900'—16,200'	Tíbet; Gnári-Khórsum.
Le und Umgebungen der Hauptstadt, mit den Culturen und den Gärten	10,750'—12,500'	Tíbet; Ladák.
Höhe des Indus bei Le	10,723'	„ „
Höhe der Stadt, am unteren Theile	11,527'	„ „
Le, Uferränder des Indus, linke Thalseite	10,800'—10,600'	Tíbet; Ladák.
Le, Uferränder des Indus, rechte Thalseite	10,800'—10,600'	Tíbet; Ladák.
Von Le nach Da, am Indus; Wasserpflanzen	10,700'—9500'	Tíbet; Ladák.
Von Le nach Káltse, rechts im Industhale	11,500'—9600'	Tíbet; Ladák.
Von Le nach △ Kurumpúlu, am Südfusse des Laóche-Passes	11,500'—15,470'	Tíbet; Ladák.
Von Le nach Núrla, links im Industhale	11,500'—9700'	Tíbet; Ladák.
Von Le nach südwestlichen Dörfern, 20 engl. Meilen vom Indus	11,500'—12,200'	Tíbet; Ladák.
Von Liágchung nach Panamík, links im Núbra-Thale.	10,300'—10,800'	Tíbet; Núbra.
M.		
Von Mangaldái an die Bhután-Tarái	100'—300'	Oestl. Indien; Assám.
Von Matáĭ an den Tsóji-Pass, Nordwest-Seite des Kammes	10,400'—11,400'	Tíbet; Dras.

Bezeichnung der Lokalitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Höhe des Tsóji-Passes (mit kleinem Tso oder „See")	11,376′	Tíbet-Westlicher Himálaya; Dras-Kashmír.
△ Matsóri, Lagerstelle am linken Rande des Chorkónda-Gletschers	13,500′—13,700′	Tíbet; Bálti.
Von Méra nach Mărri, mittelhohes Randgebirge	4000′—7000′	Westl. Himálaya; Mărri.
Mílum und Umgebungen; Thalbecken und Seitenkämme	11,200′—12,100′	Westl. Himálaya; Kămáon.
Múlbe, Vegetation an den heissen Quellen	10,480′	Tíbet; Dras.
Von Múlbe nach Dras	10,500′—9900′	Tíbet; Dras.
Von Músa Khēl, im Süden von Kalabágh am Indus, gegen Osten viâ Várcha und Chóia dem Salzgebirge entlang nach Gujrát im Jech Duáb	1000′—2500′	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
N.		
Vom Nagkánda-Passe an den Sătlej-Fluss	8400′—4500′	Westl. Himálaya; Símla.
Von Nahán viâ Dágshai nach Sólen	2800′—6500′	Westl. Himálaya; Símla.
Naugáũ und Umgebungen, vorherrschend Thalterrassen	8900′—9300′	Tíbet; Hazóra.
Am Néa-Passe, in südlichem Seitenkamme am Industhale	—15,800′—	Tíbet; Ladák.
Von Nélong viâ Múkba auf den Dámdar-Pass; dann nach Usílla	11,200′–17,500′; 17,500′—8500′	Westl. Himálaya; Gărhvál.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Höhe des Damdár- oder Hat ka Záũra-Passes	17,479′	Gărhvál.
Von Nirt an die Vángtu-Brücke, linke Seite des Sătlej-Thales	2700′—4950′	Westl. Himálaya; Símla.
Bei Núrput, Vegetation der Vorberge-Kämme	4000′—5500′	Westl. Himálaya; Chámba.
O.		
Von △ Oitásh an das untere Ende des Búshia-Gletschers, Nordseite der Künlün-Kette	15,000′—16,000′	Künlün; Khótan.
(Höhe des Élchi Daván-Passes im östlichen Künlün	17,379′)	Yárkand-Khótan.
P.		
Das Pắche- (oder Păch Chúli-) Seitenthal, Umgebungen von Mílum	—15,600′—	Westl. Himálaya; Kămáon.
Von △ Pádar nach Súlle am Nordost-Fusse des Shínku La-Passes	14,100′—12,200′	Tíbet; Tsánskar.
Vom Pádri-Passe nach Bhadrár oder Bhudravár	15,000′—5000′	Westl. Himálaya; Jămu.
Pádri-Pass, Abhänge nordwestlich von Chámba	10,000′—6000′	Westl. Himálaya; Chámba
Von Pádun viâ Ábrang nach △ Bok, SW.-Seite des Péntse-La	11,600′—14,700′	Tíbet; Tsánskar.
Höhe des Pséntse La-Passes	14,697′	Tsánskar-Dras.
Von Panamík nach △ Janglúng westlich vom Sássar-Passe	10,800′—12,000′	Tíbet; Núbra.
(Höhe des Sássar-Passes	17,753′)	„ „

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Von △ Panamík nach △ Dúrguk im Salzsee-Gebiete	14,000′—15,000′	Tíbet; Pangkóng.
Von △ Pátseo nach △ Chingchingbár, SW.-Seite des Bára Lácha-Passes	12,300′—13,500′	Westl. Himálaya; Lahól.
Abhänge des Páttere- oder Naháke-Passes, SW.-Seite	12,000′—12,600′	Tíbet; Hazóra.
Von Péndere viâ Sohágpur nach Ramnăgar	2100′—1200′	Central Indien; Málva.
Pesháur und Umgebung, auf Seitenstufe westl. vom Indus-Thale	1500′—1300′	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Pesháur auf den Kohát-Pass; dann viâ Kalabágh nach Sháhpur am Salzgebirge	1300′—2950′; 2950′—680′	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
„Phanerogamengrenzen, höchste, isolirte“:		
a) Jánti-Pass, W.-Abhang	17,500′	Kămáon.
b) Íbi Gámin-Gipfel, NO.-Abh.	19,809′	Gnári Khórsum.
c) Gunshankăr-Gipfel, W.-Abh.	19,237′	Gnári Khórsum.
Von Pind Dádan Khan nach Sháhpur, dem Jhílum-Fl. entlang	1300′—850′	Nordwstl. Indien; Panjáb.
Póën und Umgebungen, linke Seite des Shayók-Thales	—8880′—	Tíbet; Bálti.
Póti viâ Lamórti nach Púling	17,200′—14,000′	Tíbet; Gnári Khórsum.
Von Pŭch viâ Kótli nach Islamabád, Vorberge und Ausläufer	4000′—2000′	Westl. Himálaya; Rajáuri.
Von Púling nach △ Búllu La, Nordabhang des Nélong-Passes	14,000′—16,000′	Tíbet; Gnári Khórsum.
(Höhe des Nélong- oder Sangkiók-Passes	18,312′)	Gărhvál-Gnári Khórsum.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss	Landesregionen und Provinzen.
Von △ Púllak nach △ Chóngil Dáne Áksu, nordöstl. vom Sássar-Passe	15,000′—16,000′	Tíbet; Núbra.
R.		
△ Ráldang und Umgebungen, rechte Seite des Indus-Thales	13,700′—14,000′	Tíbet; Ladák.
Von △ Rálha an den Rótang-Pass, Südabhänge	8700′—13,100′	Westl. Himálaya; Kúlu.
Von Rámbak zum Kánda La-Passe, südw. von Le	11,500′—13,500′	Tíbet; Ladák.
Raulpíndi, seitliche Terrainstufen der Umgebungen	1900′—2600′	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Raulpíndi nach Pind Dádan Khan	1300′—2100′	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Von Ríma nach Sohági, südl. von Allahabád	1100′—500′	Central-Indien; Băndelkhănd.
Von △ Roghás nach △ Bitarguár, den Milúm-Gletscher hinan	14,000′—14,600′	Westl. Himálaya; Kămáon.
Vom Rótang-Passe gegen Kóksar, Nordabhang	13,100′—10,340′	Westl. Himálaya; Lahól.
Höhe des Rótang-Passes, in starker Depression des Kammes.	13,061	Kúlu-Lahól.
S.		
Sákhi-Thermen und Umgebungen; zahlreiche heisse Quellen am westlichen rechten Ufer des Indus	150′—180′	Westl. Indien; Sindh.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Von Sáling am Shayók-Flusse nach Húshe am Chetánga-Flusse	8000'—10,500'	Tíbet; Bálti.
Bei △ Sángu Sar, auf der rechten Seite des Chúngar-Gletschers	10,000'—12,000'	Tíbet; Hazóra.
Am Sãtlej-Flusse in Central-Tíbet, von △ Tázang bis △ Dúlla	14,800'—15,500'	Tíbet; Gnári Khórsum.
Von Sháhpur nach Lahór, durch das Jech- und das Réchna-Duáb	600'—800'	Nordwstl. Indien; Pănjáb.
Shígar und Umgebungen, nordöstl. von Skárdo	7000'—8000'	Tíbet; Bálti.
Von Shígar nach Skárdo	7500'—7200'	Tíbet; Bálti.
△ Shingchákbi, unter See Tso Ka, linke Seite des Mustágh-Gletschers	13,900'—13,000'	Tíbet; Bálti.
Von der Síkkim Tárai am Tísta-Flusse gegen das Brahmapútra-Thal; Wasserpflanzen	350'—120'	Oestl. Himálaya-Oestl. Indien; Síkkim-Bengalen.
Símla und Umgebungen; Haupt-Sanitarium, 40 engl. Meilen vom Himálaya-Südrande	6000'—7300'	Westl. Himálaya; Símla.
Von Símla nach Kashmír, viâ Kángra-Thal und Jămu-Thal und über secundäre Kämme	3000'—9000'	Westl. Himálaya; Símla bis Kashmír.
Von Símla gegen Nagkánda viâ Fágu, dem Kamme entlang	7000'—8400'	Westl. Himálaya; Símla.
Skárdo und Umgebungen, am linken Ufer des Indus	6900'—7500'	Tíbet; Bálti.
Von Skárdo in das Sóspor-Gletscherthal, gegen Süden	7200'—13,000'	Tíbet; Bálti.
Unteres Ende des Sóspor-Gletschers	11,272'	„ „

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Von Súkhi über den Bamsúru- und den Cháia-Pass nach Khărsáli	9000'—15,400'	Westl. Himálaya; Gărhvál.
Von Súlle, im Shung-Thale nach Pádun, im Tsánskar-Haupt-Thale	12,900'—11,600'	Tíbet; Tsánskar.
Sultánpur und Umgebungen, rechte Seite des Biás-Thales	3800'—4100'	Westl. Himálaya; Kúlu.
Von △ Súmgal, am Südfusse des Élchi Daván-Passes, nach △ Gulbagashén, Haltestelle an den Yáshem-Steinbrüchen	13,200'—12,300'	Künlün; Khótan.
T.		
Von △ Tákenak nach △ Gyam, seitliche Abhänge des Chérpa-Thales	14,500'—13,500'	Tíbet; Rúpchu.
Von △ Tap nach △ Sólio Dúru am Masénno-Gletscher, und nach △ Áshursbott am Diámar Gletscher	11,500'—13,900'	Tíbet; Hazóra.
Höchste Lagerstelle auf der linken Masénno-Seitenmoräne	13,176'	,, ,,
Am Tári- oder Bhábe-Passe, südliche Abhänge	15,000'—12,000'	Westl. Himálaya; Kănáur.
(Höhe des Tári-Passes	15,942')	Kănáur-Spíti.
Von Tári-Pass-Nordfuss viâ Mūd an den Südfuss des Párang-Passes	12,300'—16,000'	Tíbet; Spíti.
(Höhe des Párang-Passes	18,500')	,, ,,
Táshing und Umgebungen, Abhänge am rechten Ufer des Hazóra-Thales	9500'—10,200'	Tíbet; Hazóra.
Von Táshing nach Hazóra, auch Astór oder Tsúnger-Fort	9500'—7200'	Tíbet; Hazóra.

Bezeichnung der Lokalitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss	Landesregionen und Provinzen.
Von △ Thále La nach Bagmaharál, nordöstl. von Skárdo	15,400′—8000′	Tíbet; Bálti.
Vom Tímti La-Passe viâ △ Tímti Do nach Khárbu Kóma	15,500′—10,500′	Tíbet; Dras.
Höhe des Tímti La-Passes	15,548′	Dras-Ladák.
Vom Tónglo-Gipfel zum Falút-Gipfel, dem Singhalíla-Kamme entlang	9000′—12,000′	Oestl. Himálaya; Síkkim.
Von Tiloknáth südwestlich, an den Abhängen des Káli-Passes	—7000′—	Westl. Himálaya; Kishtvár.
(„Tš", nach Schreibweise auf den Folien des Herbariums, ist jetzt rubricirt als geschrieben mit „Ch".)		
Von Tsarása nach Aráun, rechte Seite des Núbra Thales	12,000′—9500′	Tíbet; Núbra.
Am Tso Gósbang, Gletschersee ober △ Báral Brok, rechte Seite des Sóspor Gletschers	—15,300′—	Tíbet; Bálti.
Am Tsóji-Passe, Abhang ober See; dann oberste Abhänge gegen Matáï	11,380′–11,500′; 11,500′–11,400′	Tíbet; Dras.
Vom Tsóji-Passe nach dem Báltal-Dharamsála, Südostseite des Kammes	11,400′—9300′	Westl. Himálaya; Kashmír.
(Dras- oder NW.-Seite des Kammes s. o. Matáï)		
△ Tso Ka und nächste Gehänge, höchstes Lager am Chorkónda-Gletscher, rechte Thalseite	16,800′—16,900′	Tíbet; Bálti.
Aufstellungspunkt der Zelte	16,905′	„ „
Tsomognalarí, grösster Salzsee im westlichen Tíbet, Ufer und Umgebung	14,000′—14,500′	Tíbet; Pangkóng.

Bezeichnung der Localitäten.	Höhenangabe. Engl. Fuss.	Landesregionen und Provinzen.
Von △ Tsumgáki am Nordfusse des Chórbad La-Passes nach Pōën	14,500′—8800′	Tíbet; Bálti.
U.		
Am Úlli-Passe, nordwestlich von Srinăgar	—12,600′—	Westl. Himálaya; Kashmír.
Von Úpshi nach Gulabgărh (mit grossem Garten) SSO. von Le, am Indus	11,250′—10,590′	Tíbet; Ladák.
Von Úri an den Pũch-Pass; dann südlich nach Kahúta	3900′—9000′; 9000′—5000′	Westl. Himálaya; Kashmír-Rajáuri.
Höhe des Pũch-Passes	8500′	„ „
Vom Úta Dhúra-Pass-Nordfusse auf den Kiúngar-Pass; dann zu Lager auf Südabhang	15,900′-17,600′; 17,600′-16,200′	Tibet-Westl. Himál.; Gnári Khórsum-Kămáon.
Höhe des Kiúngar-Passes	17,331′	„ „
Vom Úta Dhúra-Pass-Nordfusse nach △ Kiúngar-Súmdo; dann Rückweg an die Grasgrenze am Nordabhange des Kiúngar-Passes	15,900′-14,550′; 14,550′-15,800′	Tíbet; Gnári Khórsum.
Y.		
Von Yúga nach Le, rechte Seite des Industhales	11,000′—12,000′	Tíbet; Ladák.
Von △ Yúru Kióm viâ Kánji den Tímti La-Pass hinan	12,800′—15,600′	Tíbet; Ladák.

Uebersicht.

Klimatischer Charakter

der

pflanzengeographischen Regionen

Hochasiens

mit vergleichenden Daten über die angrenzenden Gebiete.

Von

Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski.

Vorgelegt, nebst Bericht über das gesammelte Herbarium, in der Classensitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften am 6. Mai 1876.

I.

Die Zone der indischen Landesregionen unseres Herbariums.

Der subtropische Osten; feuchtwarme Gebiete. — Bengalen und Hindostán. — Tafelland in centraler Lage. — Die Gebiete grosser Trockenheit. Das Pänjáb. Die nördlichen Küstenländer des Westens. — (Bemerkungen über den südlichen Theil der Halbinsel.)

Die Trennung der mit Sammeln begangenen Gebiete [1]) in klimatisch zu unterscheidende Regionen hat sich, dem vorliegenden Materiale entsprechend, vorzüglich auf Hochasien zu beziehen, wo überdies mit den ausgedehnten Dimensionen der Basis so bedeutende Höhenunterschiede sich verbinden. Es ist jedoch analoge klimatische Erläuterung für die angrenzenden Gebiete ebenfalls zu geben, insoferne auch für die Erscheinungen im Hochgebirge häufig in überraschender Weise unmittelbarer Einfluss seiner Umgebungen auf weite Strecken noch sich erkennen liess; und es bieten sich ja mit den Daten über die Nachbarländer meteorologische Anhaltspunkte auch für andere Sammlungen sowie, allgemeiner, für Culturen und für pflanzengeographische Verhältnisse.

Die indischen Nachbargebiete längs des Südrandes des Gebirges sind dabei als Gegenstand für sich besprochen, zunächst wegen der

---

(Form von Orts- und Zahlen-Daten: In der Transscription, erl. in diesem Bande S. 141—144, lauten Vocale und Diphthongen alle wie im Deutschen; von den Consonanten aber ist ch = tsch; j = dsch; kh = ch; sh = sch; v = w. — Die Höhen sind in engl. Fuss gegeben, die Temperaturen in °C.)

1) Besprochen in der vorhergehenden Abhandlung: „Bericht über Anlage des Herbariums während der Reisen nebst Erläuterung der topographischen Angaben.“ Bd. XII S. 133—196.

Verschiedenheit im Charakter des Klimas zwischen den einzelnen Theilen. Was bis jetzt über die klimatischen Verhältnisse längs des Nordrandes am Fusse des Künlün bekannt ist, werde ich, wegen der noch immer bedeutenden Erhebung und wegen des nur schmalen Vegetationssaumes, in unmittelbarem Anschlusse an jene dritte der drei Hauptpunkte folgen lassen.

Unter den physikalischen Erscheinungen, von deren Coëxistenz als Klima das Auftreten organischer Entwicklung abhängig ist, sind für die Vegetation Wärme und Feuchtigkeit und der damit sich verbindende Wind vor allem zu prüfen; diese gehören auch zu den an den einzelnen Lagen am meisten verschiedenen. Die Dichtigkeit der Atmosphäre, gleichfalls sehr verschieden innerhalb der Verbreitungsgrenzen der Menschen, der Thiere und der Flora hat, sogar in den grossen tropischen und subtropischen Höhen, auf die letztere verhältnissmässig geringen Einfluss gezeigt, und selbst dieser, wie ich für Hochasien zu erläutern haben werde, ist ein indirecter zu nennen. Chemische Zusammensetzung der Luft, Wirkung des Lichtes, Luftelectricität — sind theils von nicht bedeutender Verschiedenheit und Veränderlichkeit in der freien Atmosphäre, theils ist deren directe Einwirkung nur als eine schwache zu betrachten.

Für die indischen Gebiete ist bestimmend, als unmittelbare Wirkung ihrer Breite, der hohe Stand der Sonne mit relativ geringer Veränderung desselben innerhalb der Jahresperiode; zugleich wird bei der intensiven Insolation auch der Einfluss der Vertheilung fester und wasserbedeckter Oberfläche um so grösser. Letzteres lässt sich nicht nur in der resultirenden Luft- und Boden-Wärme direct erkennen, sondern zeigt sich selbst überwiegend in der Richtung und Stärke periodischer Mansún-Winde sowie in der Quantität und in der Begrenzung nach Zeit und Raum des atmosphärischen Niederschlages. Auch die Temperaturabnahme mit der Höhe, welche bei gleichen Höhenunterschieden von der Form der Bodenerhebung bedingt ist, hat in den verschiedenen Theilen Indiens vielfache Modificationen erkennen lassen.

Der subtropische Osten. Die östlichen Tiefländer und deren

benachbarte Mittelgebirge haben vorherrschend Klima feuchtwarmen Characters.

Assám, der östlichste Theil von Britisch-Indien, liegt seiner ganzen Längenausdehnung nach schon jenseits der nördlichen Grenze der Tropen Das untere Assám erstreckt sich von Goalpára bis Gohátti, nahezu 80 engl. M. weit, west-östlich in 26° 8½' N. mittlere Breite; das obere Assám, von Gohátti bis Sădiya etwas nördlich ansteigend, hat 27° N. mittlere Breite, und die Differenz zwischen den höchsten und niedersten Temperaturen zeigte sich bedeutender, als es der geringen Entfernung vom Meere allein entspräche. Dessenungeachtet tritt in Assám nicht mehr jene heisse Jahreszeit Indiens ein, die mit unserem Frühling oder wenigstens mit der zweiten Hälfte desselben zusammenfällt. In Subtropen mehr continentaler Lage, so in Hindostán und zwar bis nahezu an das Pănjáb, kommen dagegen die Monate April, Mai und zum Theil auch Juni als Periode der heissen trockenen Jahreszeit Indiens noch in bedeutend höheren Breiten vor. In Assám ist es durch das frühe Eintreten der Regenzeit bedingt, dass die Monate der wärmsten Jahreszeit, sehr wohl markirt als solche, wieder die Monate unseres Sommers sind.

Die Lufttemperatur der Jahreszeiten und des Jahres kann für Assám am besten in Mittelwerthen gegeben werden, die sich auf die ganze Provinz von Goalpára bis Dibrugărh beziehen; die Daten habe ich von 11 Stationen zwischen 120 und 400 Fuss Höhe und die Zahlen sind auf das Meeresniveau reducirt [2]), um direct mit den nächsten etwas tiefer liegenden Flächen Bengalens vergleichbar zu sein. Es ergab sich dabei:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Octbr. Novbr.
16° C.	24° C.	28° C.	20° C.

Jahres-Mittel: 22° C.

Die Insolation ist auch in der kühlen Jahreszeit — ungeachtet der verhältnissmässig geringen Sonnenhöhe — eine sehr intensive, bedingt für Assám, bei Coïncidenz mit der Zeit der geringsten Entfernung

---

2) Die Werthe, so wie sie hier vorliegen, sind abgeleitet, mit Anwendung des mechanischen Planimeters von Weltli und Starke, aus den Formen der Isothermen. „Results of a scientific Mission to India and High Asia" vol. IV p. 40. —

Für die Construction der Isothermen war hier die Wärmeabnahme mit der Höhe zur Reduction so eingeführt worden, wie sich aus Assám—Khássia-Gebirge ergab, erl. S. 202.

der Erde von der Sonne[3]): a) durch seine thermischen Verhältnisse der Luft im Schatten, b) durch das Auftreten bedeutender Quantität atmosphärischer Feuchtigkeit in gasförmigem, nicht nebelförmigem Zustande.

Die Winde sind vorherrschend nordöstliche, demnach meist thalabwärts gerichtete; so fast das ganze Jahr hindurch an der Oberfläche. Südwest-Monsún lässt sich im Sommer beobachten; aber von Bishnâth an bildet er obere Gegenströmung, im Thale selbst nicht fühlbar.

Die Regenmenge beträgt im Mittel etwas über 80 Zoll, längs des Himálaya-Fusses ist sie zu mehr als 100 Zoll anzunehmen. Die Zahl der Regentage ist eine für indisches Klima sehr grosse; die Regenzeit beginnt schon im März und endet gegen October.

Die meteorologischen Beobachtungen im Khássia-Gebirge ergaben ungleich grössere Verschiedenheit von den nördlich davon gelegenen Stationen in Assám und von den südlich gelegenen in Bengálen, als nach der geringeren Entfernung und nach dem Höhenunterschiede sich hätte erwarten lassen. Was im Khássia-Gebirge von überwiegendem Einflusse ist, ist die Quantität und die Heftigkeit atmosphärischen Niederschlages.

Als Mittel der Lufttemperatur erhielt ich aus einer vierjährigen Beobachtungsreihe für

Cherrapúnji,

bei 25° 14′·2 nördl. Breite 91° 40′·5 östl. Länge von Greenw.

4125 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Septbr. Octbr. Novbr.
12·2° C	17·8° C	19·9° C	17·8° C.

Jahres-Mittel: 16·9° C.

Die Temperatur-Abnahme mit der Höhe, berechnet für 1° C nach „Gohátti, 134 Fuss ü. M. in Assám" und nach „Silhét, 25 Fuss ü. M. in Bengalen", hat die folgenden Werthe ergeben.

	Winter.	Frühling.	Sommer.	Herbst.	Jahresmittel.
Nach Gohátti	610 F.	540 F.	485 F.	540 F.	540 F.
Nach Silhét	540 F.	540 F.	520 F.	560 F.	540 F.

3) In gleichen Graden südlicher Breite, dort wo überdiess unser Winter mit der heissen Jahreszeit zusammenfällt, finden sich desshalb auch die absoluten Maxima der Insolation. —

Gasförmige Feuchtigkeit wirkt vorzüglich dadurch vermehrend, dass sie bei geringer absorbirender Einwirkung auf die directen Sonnenstrahlen die Strahlung dunkler Wärme bedeutend vermindert. Einzelheiten werde ich bei Hochasien anzuführen haben. (S. 218)

Das Jahresmittel der Lufttemperatur zu Cherrapúnji, mit europäischen Verhältnissen verglichen nähert sich jenen von Neapel [4]) und von Lissabon [5]); doch zeigt das Khássia-Gebirge ungeachtet seiner continentalen Lage „den Winter wärmer und auch den Sommer kühler" selbst als Lissabon, welches unmittelbar dem Einflusse des atlantischen Oceans, dort mit relativ kalter Strömung gegen die Küste, exponirt ist.

Die Regenmenge steigt in Cherrapúnji, am Süd-Rande dieses Gebirgslandes, zu 600 bis 612 engl. Zoll im Jahre, und die Dauer der Regen ist dessenungeachtet viel kürzer als in Assám; der Anfang nämlich tritt erst Mitte Mai ein, das Ende Ausgangs August oder Anfangs September. Es ist dies der regenreichste Punkt der Erde, was die Menge des Niederschlags betrifft. In anderen Gebieten ungewöhnlich grosser Niederschlagsmenge sind zwar die Regentage die zahlreicheren, so in Neu-Granada an der Westküste Südamerikas, am Nordrande der Insel Cuba nahe dem nördlichen Wendekreise, auch längs einiger Küstenstriche in hohen Breiten, aber die Mengen [6]) des Niederschlages wie sie für Cherrapúnji nebst Umgebungen und, nach diesen,

---

4) Neapel,

40° 51′ nördl. Breite 14° 16′ östl. Länge von Greenw. 180 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli August	Septbr. Octbr. Nobr.
9·9° C.	15·6° C	23·9° C	17·3° C.

Jahres-Mittel: 16·7° C

5) Lissabon,

38°·42′ nördl. Breite 9°8′ östl. Länge von Greenw. 236 engl. E. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Septbr. Octbr. Novbr.
11·3° C	15·5° C	21·7° C	17·0° C

Jahres-Mittel: 16·4° C.

6) Die Regenmenge in der Habanna ist nach Humboldt, Kosmos I. S. 359, im Mittel sechsjähriger Beobachtungen 128 engl. Zoll; im Jahre 1821 war das Maximum auf Cuba 142 engl. Zoll. Aus Matouba auf Guadeloupe ist 292·3 engl. Zoll bekannt. Pogg. Ann. Bd. 166, $18^{52}/_{53}$; S. 191.

In Mahabaléshvar am Rande der westlichen Ghàts in der indischen Halbinsel, bei 17° 54′·4 nördl. Breite 73° 38′·7 östl. Länge von Greenw. 4300 engl. F. Höhe, ist die Regenmenge, Mittel aus mehreren Jahren, 254 engl. Zoll. In geringer Entfernung von Mahabaléshvar sinkt dabei die Regenmenge in den westlichen Ghàts weit rascher als im Khássia-Gebirge. Es ist dies am meisten auffallend in Malcolm Pet, der nächst gelegenen, nur 4 engl. Meilen entfernten Beobachtungsstation. Die absolute Menge ist aber auch dort noch gross; sie beträgt 170 engl. Zoll. „Reisen in Indien und Hochasien", Bd. I. S. 105.

Auch Angaben über Maxima europäischer Bergländer folgen (S. 227) zum Vergleiche, bei der Besprechung Hochasiens.

für Matouba auf der Insel Guadeloupe und für einige der südindischen Stationen vorliegen, bleiben noch immer die bis jetzt bekannten Maxima.

Gegen das Innere des Khássia-Gebirges ändert sich die Regenmenge sehr bedeutend, sie mindert sich bald auf 200; in der Nähe des nördlichen Randes, welcher Assám begrenzt, wird sie 150 Zoll.

Die Vegetation, die so unmittelbar mit den Feuchtigkeitsverhältnissen sich verbindet, ist in den Thalsohlen, auch auf flachen Abhängen, die zugleich etwas tief liegen, sehr üppig; aber auf den Hochebenen und an hohen und steilen Abhängen ist der Effekt des Regens dieser, dass die Humusdecke fast überall fehlt, wo nicht lokale Vertiefungen sie schützen. Es treten desshalb viele Stellen mit wahrem Wüsten-Boden auf, nur ist ihre Ausdehnung gering, und sie wechseln mit schön gestalteten, häufig üppig bewachsenen Hügelreihen auch im Innern noch des Gebirges. Begünstigt durch die grosse Feuchtigkeit zeigt die Vegetation, woimmer Humusanhäufung sich bildet, ungewöhnlich mannigfaltige Entwicklung und sie lässt sich ungeachtet einer nördlichen Breite von $25^1/_2$ bis nahe 27^0 am besten der malayischen vergleichen, mit mehr als 20 Arten von Palmen und einer sehr grossen Anzahl immergrüner Dicotyle.

Es hat sich hier, wie auch die systematischen Listen in den meisten Familien sogleich zeigen, reiches Material mir geboten, unsere botanische Sammlung zu vervollständigen. —

Bengalen und Hindostán. Das erstere hat, auch im Westen noch, vorherrschend den Charakter feuchter Tropen, zeigt aber in einzelnen Perioden des Jahres, in Folge der bedeutenden Querdimension der indischen Halbinsel in ihrem nördlichen Theile, deutlich auch den Einfluss subtropischen Festlandes sowie der mächtigen Erhebung Hochasiens gegen Norden und Nordwesten.

Das Klima von Hindostán ist schon bedeutend trockner und hat unter anderem in der heissen Jahreszeit, die im März beginnt und im Juni endet, Auftreten des heissen Windes mit Staubstürmen.

Als Zahlenbasis folgen in Kürze Mittel der Lufttemperatur

a) für die Uferlandschaft des Meerbusens von Bengalen;
b) für eine Lage landeinwärts im westlichen Bengalen, bei welcher auch die Höhe schon kenntlichen Einfluss zeigt, sowie, zum Vergleiche mit dieser,

c) für eine Station Hindostáns nahe dem oberen Bengalen;
d) für eine Station Hindostáns in centraler Lage.

a) Calcutta, in Bengalen, 40 engl. Meilen vom Meeresufer, 22° 33'·0 nördl. Br. 88° 20'·6 östl. L. von Greenw. 18 engl. F.[7]) Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
20·1° C	27·9° C	28·5° C	26·5° C

Jahres-Mittel: 25·75° C.

b) Hazaribágh, in Bengalen, am Nordrande von Bahár, 24° 0'·0 nördl. Br. 85° 20'·9 östl. L. von Greenw. 1750 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
16·9° C	26·4° C	26·4° C	22·2° C

Jahres-Mittel: 23.0° C.

c) Benáres, in Hindostán, am linken Ufer des Ganges, 25° 18'·4 nördl. Br. 82° 59'·8 östl. L. von Greenw. 347 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
18·5° C	31·1° C	30·7° C	26·3° C.

Jahres-Mittel: 26·6° C.

d) Ágra, in Hindostán, am rechten Ufer der Jămna, 27°10'·2 nördl. Br. 78° 1'·7 östl. L. von Greenw. 657 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
16·3° C	29·7° C	31·3° C	25·1° C

Jahres-Mittel: 25·6° C.

Die wärmsten Monate des Jahres sind hier Mai und Juni; als Mittelwerthe derselben ergaben sich

	für Mai	für Juni
zu Calcutta	29·65 °C	28·99 °C
zu Hazaribágh	29·4 °C	27·0 °C
zu Benáres	35·2 °C	32·8 °C
zu Ágra	34·9 °C	34·4 °C

Dabei zeigt sich im Monate Juni, wenn die einzelnen Beobachtungstage untersucht werden, in der ersten Hälfte desselben ein stetiges Steigen, welches eben nur vom Eintreten der Regenzeit abgebrochen

7) Bezogen auf die Aufstellung der meteorologischen Instrumente, an welchen unter Leitung der Great Trigonometrical Survey die Beobachtungen gemacht werden.

wird, und zwar mit so bedeutender Veränderung der thermischen Verhältnisse, dass nun auch das Mittel für den Monat Juni das niedrigere wird.

Es ist dies der normale Gang der Temperatur in der Jahresperiode für das ganze indische Gebiet, in welchem die Sommer-Regenzeit deutlich auftritt. In einiger Entfernung von der Küste wird schon in Bengalen der Einfluss der Regenzeit auch im Mittelwerthe des Frühlings erkennbar, durch grössere Wärme des Mittels für den Frühling als für den Sommer. In Calcutta selbst wird das Mittel des Frühlings durch die niedrigere Temperatur des März etwas deprimirt. Aehnliches macht sich noch bis gegen Pátna heran, wegen der relativen Grösse des Wärmeverlustes durch nächtliche Strahlung, bemerkbar.

Die Wärmeabnahme mit der Höhe ist in ganz Bengalen und fast in ganz Bahár noch — wegen der nur geringen Erhebungen die sich bieten, sowie wegen des sehr allmähligen, plateauförmigen Ansteigens derselben — eine sehr langsame, mit sehr bedeutender Verschiedenheit zwischen den einzelnen zu vergleichenden Lagen.[8]) Aber für den 4469 engl. F. hohen Gipfel des Parisnáth nähert sich der Werth der Temperaturabnahme mit der Höhe, berechnet nach Ranigánj, das bei 319 F. Höhe nur wenig seitlich, ostsüdöstlich vom Gipfel, gelegen ist, den Verhältnissen in grösseren Gebirgen, und zwar in solchen mit rascher Abnahme in Folge isolirter Position ihrer Gipfel.

Es ergaben sich folgende Erhebungen für 1° C Abnahme:

Winter.	Frühling.	Sommer.	Herbst.	Jahresmittel.
450 F.	446 F.	461 F.	443 F.	450 F.

Diese Werthe sind zur Beurtheilung der Vegetationsverhältnisse auf ähnlichen vereinzelten Erhebungen, für welche direkte Beobachtungen nicht vorlagen, ebenfalls vielfach zu berücksichtigen gewesen.

Die Regenzeit tritt in den feuchteren, niedrigeren Gebieten meist schon Mitte Juni in voller Stärke ein und endet selten vor Anfang September; bisweilen währt sie noch den September und selbst den October hindurch. Grosse, regelmässige Ueberfluthungen, auch der in den andern Monaten cultivirten Gebiete, sind zahlreich während des Septembers im Tieflande.

---

8) Details der Beobachtungen „Results“ vol. IV. p. 226 u. p. 231.

Weiter landeinwärts gegen Nordwesten ist die ganze Dauer der Regenzeit nahezu die gleiche, aber dort sind bedeutende Unterbrechungen nicht selten.

Die Windesrichtung ist von October bis Februar meist eine östliche, am deutlichsten so etwas landeinwärts im oberen Bengalen; es verbindet sich damit sehr starker Thau, Regen ist selten. Während der heissen Jahreszeit sind Westwinde vorherrschend; die Regenwinde sind wieder Ost- und Südost-Winde, wobei gegen das Ende der Regenzeit die südlichere Richtung häufiger wird. —

Tafelland in centraler Lage. Hier unterscheidet sich, wie gewöhnlich bei mittelhohen Terrainstufen, das Klima von jenem in den tieferen Ebenen der Umgebung relativ wenig; auch die Temperaturabnahme mit der Höhe ist im Jahresmittel eine verhältnissmässig langsame. Eigenthümlich ist in der Veränderung der Temperaturabnahme innerhalb der Jahresperiode, dass sie hier im Winter am raschesten ist. Bei Häufigkeit klarer Nächte wird in den höheren Theilen die Abkühlung durch Strahlung von verhältnissmässig starkem Einflusse; Veränderlichkeit des Windes und Vorherrschen nördlicher Winde trägt ebenfalls dazu bei. Die bedeutende Kühle des Winters für diesen Theil von Indien zeigt sich besonders deutlich, wenn man die Temperatur der Umgebungen in ihren weiterem Umkreise in Rechnung zieht. Vereinzelt haben hier Strecken der niedrig aber unmittelbar am Fusse der Gebirgserhebung gelegenen Ebenen gleichfalls relativ kühle Winter, dadurch, dass absteigende Luftströme aus den Gebirgen kommen und dort sich anhäufen.

Für die Lufttemperatur wähle ich, häufig sich bietender Höhenlage entsprechend, die Daten für

Nărsínghpur in Málva,

bei 22⁰ 57′ nördl. Br. 79⁰ 8′ östl. L. von Greenw. 1305 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
16·9⁰ C	27·0⁰ C	28·1⁰ C	24·4⁰ C

Jahres-Mittel: 24·1⁰ C.

Die eigentliche Regenzeit, hier mit Eintreten des Südwest-Monsúns beginnt erst Ende Juni; (desshalb wird an den Stationen in centraler Lage meist das Mittel der Temperatur für den Sommer etwas

wärmer als für den Frühling.) In der letzten Woche des August ist die Regenzeit gewöhnlich vorüber. —

Die Gebiete grosser Trockenheit. Im Pănjáb zeigt sich, bei der so bedeutenden Flächenausdehnung in Verbindung mit seiner continentalen Lage, sehr grosse Verschiedenheit der klimatischen Verhältnisse von jenen in den meisten anderen Regionen Indiens. Vorzüglich überraschten in dieser Beziehung die grossen Differenzen der Temperatur, nicht nur zwischen einzelnen Extremen sondern auch zwischen den Mitteln der Jahreszeiten — also die Veränderung der Wärme in der Jahresperiode — und die grosse Verminderung atmosphärischer Feuchtigkeit. Es war mir desshalb gerade dortsehr günstig, dass es mir gelang, von 25 Stationen fortgesetzte Beobachtungen zu sammeln.

Als Zahlen-Basen für die Lufttemperatur folgen hier die Mittel von zwei unter sich sehr ungleich gelegenen Stationen, von denen die eine als Typus „der Lage im Tieflande" gelten kann; die zweite kann bezeichnet werden als „Lage auf freier, mittelhoher Terrainstufe in der Nähe der Himálaya-Vorberge".

a) Lahór, Regierungssitz, im südlichen Pănjáb:

31° 31'·1 nördl. Br. 74° 14'·6 östl. L. von Greenw. 839 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
13·8° C	25·6° C	31·5° C	24·7° C

Jahres-Mittel: 23·9° C.

b) Raulpíndi, grosse Militär-Station im Nordwesten:

33° 36'·5 nördl. Br. 72° 59'·8 östl L. von Greenw. 1737 engl. F. Höhe:

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
12·2° C	22·0° C	30·3° C	23·0° C

Jahres-Mittel: 21·9° C.

Wie sogleich entgegentritt ist an beiden Punkten, auch in Lahór ungeachtet der geringeren Breite, unser Sommer mit grosser Differenz vom Frühling und vom Herbste die wärmste Periode des Jahres; dabei sinkt die Temperatur sehr stark in der kühlen Jahreszeit.

Als Extreme der Kälte sind mir aus den Umgebungen von Pesháur, bei 33 bis 34° nördl. Breite, Temperaturen von — 5° C bis — 6° C bekannt, die „Minima indischer Wärme". Aus den Umgebungen von Multán bei 29½ bis 30½° nördl. Breite, ebenfalls aus dem Pănjáb,

liegen Maxima von 50 bis 52° C vor, und es ist dieser Theil des Pănjáb auch in den Monatsmitteln während der Sommerzeit eine der heissesten Regionen der Erde.

Das Eintreten solcher Extreme macht alles, was von Pflanzengrenzen sich bietet, um so mehr beachtenswerth.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe zwischen Lahór und Raulpíndi zeigt sich von der mehr südlichen Lage Lahórs nur wenig afficirt, dagegen ergibt sie sich, von der allgemeinen Terrainerhebung bedingt, als eine sogar für die indische Halbinsel ungemein langsame; für das Jahres-Mittel entspricht 1° C einer Höhendifferenz von 998 engl. Fuss.

Die Regenperiode, die sich noch erkennen lässt, fällt in die Zeit von Anfang Juli bis Ende August, doch hat sie hier den tropischen Charakter verloren. Vereinzelte aber stets noch heftige Gewitter sind es, welche vorherrschen. Flächen von grosser Ausdehnung, welche in einiger Entfernung von den Uferlandschaften der Hauptströme gelegen sind, zeigen wüstenartige Trockenheit des Bodens sowie der Luft. —

In den nördlichen Küstenländern des Westens, in Sindh, Kăchh und Gujrát zeigt die Lufttemperatur im allgemeinen, ungeachtet der litoralen Lage am nordöstlichen Theile des arabischen Meeres, grosse Variation in der Jahres- und in der Tages-Periode. Das Vorherrschen von Nord- und Nordost-Winden aus dem Thăr, der grossen Wüste Rajváras, verbreitet sogar noch bedeutende Trockenheit, bei Tag bis an die Küsten. Des Nachts sind Seebrisen häufig; schwach, aber dem Industhale entlang weit ansteigend. Starker Thaufall, der sich damit verbindet, ist während eines bedeutenden Theiles des Jahres der einzige Ersatz für Regen.

Als Stationen für die Temperatur der Jahreszeiten und des Jahres wähle ich Kărráchi, nordwestlich im Indusdelta gelegen, und Baróda, nahe der südöstlichen Grenze dieses Gebietes. Die Mittel sind die folgenden [9]).

---

9) Die Temperaturen von Kărráchi sind Mittel der Tagesextreme für 1847, von Col. Sykes publicirt in den Philos. Transactions von 1850: aus Baróda hatte ich für 1854/55 von Hofrath Georg von Liebig sehr sorgfältige Beobachtungen um 6^h, 10^h, 4^h, 10^h nebst einzelnen Reihen stündlicher Beobachtungen von 6^h a. m. bis 9^h p. m. im Manuscript mitgetheilt erhalten.

a) Kărráchi, in Sindh,

24° 45′·5 nördl. Br. 67°0′ östl. L. von Greenw. Höhe (=)[10])

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
18·9° C	26·7° C	30·0° C	26·1° C

Jahres-Mittel: 25·4° C.

b) Baróda, in Gujrát:

22° 16′ nörd. Br. 73° 14′ östl. L. Greenw. Höhe (=)

Dec. Jan. Febr.	März April Mai	Juni Juli Aug.	Sept. Oct. Nov.
21·75° C	31·67° C	28·61° C	25·78° C.

Jahres-Mittel: 26·95° C.

In Lagen wie jene von Kărráchi, ganz in der Nähe der Küste, beginnt die kühle Jahreszeit nicht viel vor December; etwas weiter landeinwärts ungefähr ein Monat früher.

Die absoluten Extreme an einzelnen Tagen nähern sich den Werthen im mittlern Pănjáb, doch erreichen sie dieselben nicht ganz. Zu Kăr-ráchi ist die niedrigste Temperatur, die mir bekannt wurde, 0·7° C. Vom März bis Mai steigt die Hitze sehr rasch und sehr bedeutend; Maxima im Schatten von 30 bis 40° C sind nicht selten, selbst an der Küste nicht.

Gegen Ende der heissen Jahreszeit treten Gewitter auf, aber mit wenig Niederschlag; häufiger sind Staubstürme, die sich bisweilen noch weit über die Küsten hinaus auf die Fläche des arabischen Meeres vorschieben.

Die Regenzeit vertretend folgt dann ein Südwest-Monsún, mit Bewölkung aber mit verhältnissmässig wenig Niederschlag. Der Indus tritt sehr stark aus; doch es sammelt sich in diesem auch so viel des bedeutenden Zuflusses aus dem Hochgebirge.

Mit dem Steigen des Indus beginnt der Răn sich zu füllen. Der Răn ist eine lagunen-ähnliche, grosse Fläche vulkanisch gehobenen Meeresbodens, nördlich von Kăchh gelegen, dessen Salze nur während der Regenzeit sich vollständig lösen; 6000 engl. Quadrat-Meilen werden verhältnissmässig kurze Zeit wasserbedeckt.

---

10) Die Signatur „(=)“ ist gewählt zur Bezeichnung „geringer Höhe über dem Meeresniveau“.

Ungeachtet der geringen Niederschlagsmenge — auch unmittelbar dem Meeresufer entlang — tritt doch im Süden ziemlich häufig, durch Bewölkung, Sinken des Temperatur-Mittels schon in der Regen-Periode ein,verschieden demnach von Pănjáb und analog dem in Indien gewöhnlicheren Charakter des Klimas. Kărráchi jedoch und die gegen Norden landeinwärts liegenden Stationen zeigten noch die Pănjáb-Variation in der Jahresperiode, mit „Juni bis August" als wärmster der Jahreszeiten.

Das Austrocknen des Răn beginnt im October, und es tritt vorherrschend sumpfiger weicher Schlammboden zu Tage, welcher nach und nach ganz erhärtet und dann wieder mit Salzincrustationen sich bedeckt. Es entwickeln sich dabei starke Miasmen, der Gesundheit höchst gefährlich im weiten Umkreise für die Eingebornen ebensowohl als für Europäer. Was von Vegetation in den verhältnissmässig kurzen feuchteren Perioden auftritt, verschwindet in der Zeit der Trockenheit wieder zum grössten Theile.

Ueber die südliche Hälfte Indiens, die im Herbarium nicht vertreten ist, sei noch in Kürze beigefügt, um die Besprechung des allgemeinen thermischen Charakters abzuschliessen, dass „für das Jahresmittel" in diesem Theile Indiens der thermische Aequator gelegen ist, welcher nahezu bei 18 Grad nördlicher Breite an der Westküste eintritt, die Mitte der Halbinsel durchzieht und über Ceylon in den indischen Archipel sich fortsetzt. Es bietet sich in diesen Breiten in Indien eine centrale Region grösster Wärme mit Jahresmittel im Süden von 29° C.

Innerhalb der 4 Jahreszeiten zeigt sich für die Vertheilung der Wärme auch in diesen Theilen der Halbinsel noch grosse Verschiedenheit. Als Zahlenwerthe nahe der Südspitze sind zu nennen: Mittel für Juni, Juli, August = 30·6° C, noch immer weniger warm, ungeachtet eines Breitenunterschiedes von 22 Graden, als jenes in den Wüsten des Pănjáb; Mittel für die kühle Jahreszeit, Dec. Jan. Febr. = 26·4° C.

Für die Temperatur in den Gebirgen Südindiens ist anzuführen, bezogen auf Jahresmittel: Erhebung bei 1° C Abahme im Dékhan = 738 bis 783 engl. Fuss; in den Nílgiris = 486 bis 558 engl. F.

II.

Die klimatischen Gebiete Hochasiens.

1. Allgemeine Verhältnisse. Vertheilung der Lufttemperatur, nach Breite und Länge sowie nach Höhe. Die basischen Isothermen; Einfluss der Flächenausdehnung. Die Höhenisothermen; Einfluss der Massenerhebung. — Die Bodenwärme. — Die Insolation. Besonnung und Strahlung. — Luftströmungen und Luftdruck. — Atmosphärische Feuchtigkeit. Gasförmige Feuchtigkeit; Bewölkung und Nebelbildung; Regenmenge.

2. Tabellen der Temperaturabnahme mit der Höhe im Jahresmittel. Anlage der Tabellen. — Allgemeiner Mittelwerth. — „Himálaya-Südabhang a) äussere Lage, b) innere Lage". (Landesregion I). — „Das westliche Stromgebiet von Tibet" nebst Einschluss „des Nordabhanges der Karakorúm-Kette". (Landesregion II. und Landesregion IIIa). — Die Süd- und Nord-Gehänge der „Künlún-Kette" in Ost-Turkistán. (Landesregion IIIb).

3. Temperaturvertheilung nach den Jahreszeiten. 1. Die Formen der periodischen Veränderung. — 2. Wärmeabnahme mit der Höhe.

1. Allgemeine Verhältnisse.

Bei der meteorologischen Beurtheilung grosser Gebirge ist nicht nur die geographische Lage und Gestaltung in Verbindung mit der Grösse und Form der Erhebungen und mit dem Auftreten trennender Höhenlinien zu berücksichtigen, sondern auch jene Begrenzung der klimatischen Gebiete als solcher, die abhängig ist in erster Reihe von den Wärme- und den Boden-Verhältnissen der Umgebungen, sowie in bedeutendem Antheile, auch von der Grösse und Form der Basis des Gebirges. Gerade in Hochasien, wie sogleich sich zeigen wird, tritt topographisch-anomaler Character des Klimas auf, welcher vorzüglich in der Vertheilung der Feuchtigkeit weit abweicht von dem, was aus der Gestaltung allein der auf die Längenachse rechtwinklig gedachten Profillinien des Gebirges, „seiner Querdurchschnitte", zu folgern wäre.

Ich werde desshalb, ehe ich auf die in Verbindung mit der Reliefform resultirenden Werthe übergehe, Besprechung der allgemeineren klimatischen Bedingungen, die für dieses Hochgebirge vorliegen, vorausschicken.

Mittlere Vertheilung der Lufttemperatur. — Schon die Ausdehnung Hochasiens von Süd nach Nord hat für die Breiten bei vergleichender Untersuchung der einzelnen Gebiete bedeutende Verschiedenheit in der Vertheilung der Luftwärme für jene Werthe erwarten lassen, welche sich ergeben, wenn die thermischen Daten directer Beobachtung mit Elimination des local bestimmten Einflusses der Höhe auf das gemeinsame Niveau der Meereshöhe reducirt werden; auch jene mehr oder weniger continentale Lage von West nach Ost, wie sie hier mit den Längen sich verbindet, zeigte sich auf diese Weise deutlich erkennbar.

Die basischen Jahresisothermen der Lufttemperatur, auf Meeresniveau bezogen, haben als characteristisch ergeben:

a) mässig rasche Temperaturabnahme quer von Süden nach Norden bei gleicher „Länge", vom indischen Tieflande bis gegen den Himálaya-Kamm, dann etwas raschere bis an den Nordfuss des Künlún;

b) eine bedeutende relative Steigerung der Wärme im Westen, Zunahme bei gleicher „nördlicher Breite".

Beides ist bedingt durch die Grösse und Gestaltung subtropischen und tropischen Tieflandes, das dem Fusse des Himálaya entlang gelegen ist und weit gegen Süden sich ausbreitet. Es bietet sich zur Beurtheilung, ganz dem Südrande folgend, die basische Isotherme von $23^{1}/_{3}{}^{0}$ C (74^{0} F. meiner graphischen Darstellungen, ebenfalls auf das Meeresniveau dort reducirt). Diese liess um so bestimmter die Art der Aenderung erkennen, weil sie sich unabhängig von den Himálaya-Stationen aus Assám- und Pănjáb-Stationen ebenfalls ergeben hatte. Das Resultat ist also:

„Obwohl die Differenz nördlicher Breite zwischen den beiden seitlichen Enden des Himálaya am Südrande mehr als 6 Grade beträgt, zeigt sich an beiden fast gleiche Jahreswärme [11]."

---

11) Ueber die Temperaturvertheilung in Indien, mit besonderer Erläuterung der „mehr als mittelgrossen Wärme im Nordwesten", habe ich in voller Ausführlichkeit berichtet, sobald meine Berechnung der einzelnen Stationen durchgeführt war, in den Transactions der Royal Soc., London 1863, p. 525—542 mit 5 Karten.

In rein süd-nördlicher Richtung ist aber für entsprechenden Breitenunterschied von 6 Grad die Temperaturabnahme zwischen den basischen Isothermen nahezu 4° C. Den mittleren Werthen der Abnahme der Wärme gegen Norden im Gürtel solchen Abstandes vom Aequator rings um die Erde schliesst diess sehr gut sich an. Die absolute Wärme jedoch, wie sie sich aus der Berechnung der basischen Isothermen für Hochasien im nördlichen Theile desselben ergeben hat, zeigt noch immer auch dort entschieden den erwärmenden Einfluss ausgedehnter Bodenhebung. Es würde aus den etwas entfernten Umgebungen östlich sowie westlich von Turkistán selbst im Jahresmittel die Wärme um mehr als 2° C geringer sich ergeben als aus den vorliegenden Daten für die Lage der Basis von Yárkand zu schliessen ist.

Die Höhenisothermen zeigen die Luftwärme direct in ihrer Verbindung mit der Bodengestaltung des Gebirges, welches auf solcher Basis sich erhebt; sie lassen die sich ergebende Wärme-Abnahme mit der Höhe sowie die Ursachen der Modification derselben beurtheilen. Veränderud wirken ein: das Klima der Nachbarländer sowie, innerhalb des Gebirgskörpers selbst, vor allem die relative Menge gehobener Masse.

Auf Hochasien macht sich klimatischer Einfluss der Nachbarländer am meisten am Südrande und in den Mittelstufen auf der Himálaya-Südseite bemerkbar; in den Temperatur-Verhältnissen durch das Vorherrschen ansteigender erwärmender Winde.

Die Wirkung der Massenerhebung lässt sich durch Verminderung der Temperaturabnahme mit der Höhe erkennen, am deutlichsten in den centralen Theilen, wo die Einwirkung südlichen Tieflandes schon aufgehört hat.

Ein Querprofil in süd-nördlicher Richtung durch Hochasien gelegt und mit den resultirenden Höhenisothermen durchzogen zeigt demnach Abweichung in doppelter Weise von jener Form gerader gegen Norden sich senkender Wärmelinien, die sich ergeben würde, wenn Unterschiede der Breite und der Höhe allein die bedingenden Elemente wären:

Es bietet sich sehr deutlich „locale Hebung der Isothermen in den südlichen Theilen“, weit stärkere, als solche der Breite allein entspräche; und

es tritt „eine zweite — und zwar central gelegene und nach beiden Seiten begrenzte — Hebung der Höhen-Isothermen" ein, also wieder locale Vermehrung der Wärme bei gleicher Höhe, nemlich in jenen Theilen Hochasiens, in welchen die gehobene Masse die grösste ist.

Letzteres macht demnach schon hier, ungeachtet der im Verhältnisse zur Erdoberfläche noch immer sehr geringen Ausdehnung des Gebirges, den resultirenden Effekt in ähnlicher Weise bemerkbar, wie solches von einem Verlängern des Erdradius um die betreffende Grösse für die ganze Erde zu erwarten wäre, wenn dasselbe gedacht wird unter dem Einflusse verdünnter Atmosphäre zwar, aber unter sonst gleichen allgemeinen thermischen Bedingungen. Berücksichtigt man, dass 20,000 engl. Fuss Höhe z. B. noch etwas kleiner ist als $^1/_{1000}$ des Erdradius, so tritt sogleich entgegen, dass nicht durch eine „um Bergeshöhe" grössere Entfernung vom Innern der Erde — in der stetigen Wärmeausgleichung von dort — der Effect auf die Oberfläche des Bodens oder gar auf die Luft messbar sich verändern könnte, sondern dass vielmehr jene directe Wirkung der Insolation, die abhängig ist von Breite und gleichzeitiger Beschaffenheit der Atmosphäre, zur Ursache der Modificationen in centraler Lage wird.

In ausgedehnten Plateaux, deren Erhebung eine mittelgrosse nur ist, tritt solches am deutlichsten hervor; doch lässt sich auch auf sehr hoch gelegenen flachen Terrainstufen gegenüber den Verhältnissen in Gebirgen der gewöhnlichen Formen der Einfluss der gehobenen Masse in ähnlicher Weise erkennen.

Was in Hochgebirgen mit Kamm- und Thalbildung dieses Ergebniss der unmittelbaren Beobachtung entzieht und vor allem den Bewohnern in Vegetation und Feldbau leicht verbirgt, ist der Umstand, dass in solchen Gebirgen die Veränderung der Bodengestaltung keine so bedeutenden Gegensätze zeigt, und dass in den centralen Theilen auch die niedersten der Punkte verhältnissmässig hohe sind; es liess sich daher dieser Einfluss der Massenhebung erst durch Vergleichen ausgedehnter Gebiete mit genügender Bestimmtheit für die verschiedenen Theile Hochasiens beurtheilen.

Schon in den Alpen hatten wir Gelegenheit, als unerwartetes Er-

gebniss zu finden, dass in den centralen Theilen „gleiche Wärme der Luft, der oberen Bodenschichten und der Quellen höher ansteigt", und dass unter anderem selbst der kühlende Einfluss von Firn und Gletscher nur auf geringe Ausdehnung sich beschränkt[12]).

In den centralen Gebieten Hochasiens, wie die folgenden tabellarischen Daten der Temperaturabnahme es zeigen werden, war der Einfluss der Massenerhebung, weil Terrain-Verhältnisse und subtropische Lage dort zusammenwirken, um so deutlicher hervortretend.

Entsprechendes lässt sich auch für alle anderen Hochgebirge, veränderlich noch im Verhältnisse zu geographischer Breite und atmosphärischer Feuchtigkeit, erwarten. Abnahme der Breite steigert die relative Erwärmung in den Centren. Der resultirende Einfluss vermehrter Feuchtigkeit auf Gebirge ist ein abkühlender, weil durch Bewölkung, durch Schneeschmelzen und durch Verdunsten des Regens der Boden-Oberfläche und den Luftschichten in Berührung mit derselben stets Wärme entzogen wird, wogegen der Einfluss des Freiwerdens von Wärme bei Condensation vorzüglich auf die höheren Schichten der Atmosphäre einwirkt.

In den Vorbergen der Hochgebirge, dessgleichen an den Abhängen isolirter Erhebungen besonders der Inseln, und meist auch in kleinen Gebirgen [13]) ist Temperaturabnahme der Luft mit der Höhe eine raschere, zeigt sich ähnlicher jener in der freien Atmosphäre, als jener im Inneren der Gebirge, wenn nicht local aufsteigende Luftströme aus Niederungen sie verzögern.

Die Bodenwärme. Abnahme der Bodenwärme mit der Höhe ist, im resultirenden Jahresmittel, für alle Lagen eine langsamere als die Abnahme der Luftwärme. Diess gilt selbst für die Oberfläche in unmittelbarer Berührung mit der freien Luft und zeigt sich noch bestimmter in der Temperatur all jener Quellen, deren unterirdische

---

12) Phys. Geogr. der Alpen, Band I. 1850, S. 263; S. 375; Band II, 1854, S. 585; u. a.

13) Ist die Erhebung eine nur unbedeutende aber sehr undulirte bei grosser Ausbreitung, so kann die absolute Wärmeentwicklung in tropischer und subtropischer Lage, bis zu einer gewissen Höhe, selbst grösser sein, als sie bei sehr flacher Bodengestaltung im Niveau des Meeres sein würde, wie besonders die Untersuchung der Stationen im nordwestlichen Indien gezeigt hatte.

Reservoirs so tief hinabreichen, dass das zu Tage tretende Wasser in der Jahresperiode constante Temperatur oder nur geringe Veränderlichkeit derselben hat. Bei diesen, dessgleichen in den Schachten der Bergwerke, lässt sich „erwärmender Einfluss vom Innern der Erde ausgehend“ als die vorzüglich bedingende Ursache erkennen; in Tiefen, die geringer sind, und an der Oberfläche selbst wirkt dieser Einfluss zwar ebenfalls noch mit, aber verhältnissmässig wenig. Hier folgt aus der Grösse und der Vertheilung der Unterschiede der Wärme innerhalb der Jahresperiode, dass von jenen Bedingungen vor allem, welche auf die Luftwärme von aussen einwirken, auch die Bodenwärme abhängig ist.

Als modificirend speciell für Bodenwärme ergibt sich [14])

a) dass dieselbe local, und dabei an der Oberfläche vorzüglich, durch Umstände, welche häufiger und intensiver Besonnung günstig sind, in ganz extremer Weise sich steigern kann;

b) dass in centralen Lagen der erwärmende Einfluss gehobener Masse in der Wärme der Quellen und der Bodenschichten entsprechender Tiefe stets noch bestimmter auftritt, als in der mittleren Wärme der Atmosphäre daselbst.

Die Insolation. — Die Differenz, welche sich zwischen der Erwärmung durch die Sonne und dem Wärmeverluste durch Strahlung ergibt, ist in dem ausgedehnten Gebiete Hochasiens für die einzelnen Landesregionen, sowie für die Höhenlagen in denselben, eine sehr verschiedene. Zum Theil bedingt diess schon der Stand der Sonne nach geographischer Breite; damit verbindet sich sehr ungleiche Vertheilung der Beschattung durch Wolken, der deutlichen Nebelbildung und der schwächeren Trübung durch suspendirte Feuchtigkeit in flüssigem Zustande, sowie die Gasbeschaffenheit der Atmosphäre selbst.

Die der Besonnung ausgesetzten flüssigen und festen Körper sind, insoferne nicht Verdunsten und Schmelzen noch hinzukömmt, in ihrer Anfangstemperatur, sowie in ihrem gleichzeitigen Wärmeverluste bei resultirender Temperaturerhöhung von der Temperatur ihrer Unterlage und von der Temperatur und der Dichtigkeit der umgebenden Luft abhängig; Wind wirkt kühlend durch das Wechseln der Luftberührung.

14) Vergleichende Zahlendaten aus Ladák und aus Síkkim habe ich in „Reisen“ Bd. III S. 329 u. ff. gegeben.

Verdünnung der Luft begünstigt, bei geringerer Absorption, die Menge der eindringenden Wärmestrahlen, aber vermehrt auch den gleichzeitigen Wärmeverlust durch Strahlung dunkler Wärme; letzteres steigert sich bei erhöhtem Grade der Verdünnung, ähnlich aber nicht in gleichem Verhältnisse wie das Eindringen directer Wärme, und der resultirende Effect ist eine relativ stärkere Insolation an hohen Standpunkten.

Gasförmige Feuchtigkeit ist gleichfalls eine Bedingung der Absorption directer Wärmestrahlen, aber darin unterscheiden sich in ihrer Wirkung feuchte und trockene Luft, dass bei Vermehrung der Feuchtigkeit in der Atmosphäre (Trübung durch Nebelbläschen ganz ausgeschlossen gedacht) unter sonst gleichen Umständen des Druckes und der Temperatur der Effekt der Besonnung sich steigert. Schon die ersten Beobachtungen während unserer Reise durch das südliche Indien, 1854/55, zeigten, nicht nur dass durch das Entstehen von Nebelbläschen und Wolken Wärmestrahlen der Sonne von der Oberfläche der Erde abgehalten werden, sondern, ebenso bestimmt, dass der Wassergehalt der Atmosphäre in gasförmigem Zustande die resultirende Insolation sehr bedeutend erhöht[15]). Die extremen Verschiedenheiten zwischenden tiefen, feuchtwarmen Thälern des östlichen Himálaya und den trocknen Höhen des Karakorúm-Gebirges haben gleichfalls in ganz entsprechender Form diese Wirkung erkennen lassen[16]). Erklärung des Effektes liess sich finden in specificischer Verschiedenheit des Widerstandes gasförmigen Feuchtigkeit gegen directe und gegen dunkle Wärme, bei vermehrtem stande gegen dunkle Wärme.

Experimentelle Untersuchungen Tyndall's über den Widerstand

---

15) Details darüber, auch Beschreibung der angewandten Methoden der Beobachtung, habe ich in „Third Report upon the Progress of the Magnetic survey of India“ angegeben; gleichfalls abgedruckt im Journal der As. Soc. of Bengal 1856.

16) Zahlendaten verschiedener Art gab ich in „Beobachtungen über den Einfluss der Feuchtigkeit auf die Insolation“ in Sitz.-Ber. der k. b. Ak. der Wiss. 1864 II. S. 216 bis 246; allgemeine Zusammenstellung über die Verhältnisse der Insolation zu den klimatischen Erscheinungen folgt in den „Results“ Vol. V. Meteorology, second Part.

Erst die Bearbeitung der Einzelheiten der Insolationseffecte hat mir für diese Breiten genügende Erklärung für manche der unerwarteten meteorologischen Verhältnisse daselbst geboten.

verschiedener Körper gegen den Durchgang strahlender Wärme [17]) haben unabhängig von diesen meteorologischen Erscheinungen das gleiche Ergebniss geliefert.

Da mit wachsender Höhe die Wärme und die Dichtigkeit der freien Luft und aller Gase, die ihr beigemengt sind, so bedeutend abnimmt, sind — auf die Mittelhöhe des Gebirges bezogen — die Effekte der Insolation in ihrer Gesammtwirkung auch an den günstigen, klaren Tagen geringer, als sie es, auf die gleiche basische Fläche bezogen, im Meeresniveau wären. In dieser Beziehung gleichfalls ist ein Hochgebirge, ebenso wie durch das verhältnissmässige Freistehen, ein Element der Verminderung in der Vertheilung der Wärme für den entsprechenden Theil der Oberfläche der Erde.

Die Luftströmungen und der Luftdruck. — Thalwinde abströmender kalter Luft, auch Tag- und Nachtwinde mit Wechseln der Richtung, lassen sich wie in anderen Hochgebirgen, nemlich mit geringer Intensität, in allen Theilen Hochasiens beobachten. Stärker, und breiter in der Form, ist das Abströmen, welches längs des Südrandes von dem erwärmenden Einflusse des indischen Tieflandes auf die Stufen mittlerer Höhe, als Ausgleichung, bedingt ist. Es beschränkt sich jedoch auch dieses vorzüglich auf Thäler im Gebirge selbst. Messbarer Wärme-Effekt auf die zunächst vorliegenden Ebenen lässt sich am Südrande des Himálaya für das Jahresmittel durch Kühlung nur in der Strecke längs Nepál erkennen. Etwas ausgedehnter, besonders im Winter und im Frühling, ist solche Depression der Temperatur in der freien turkistanischen Ebene im Norden des Künlün.

Periodische Winde, und zwar die indischen Monsúns mit regelmässigem Wechsel in der Jahresperiode sind auf der Südseite des Himálaya, jenen im indischen Tieflande entsprechend, noch mit Bestimmtheit in ziemlich grosser Entfernung vom Rande des Gebirges zu beobachten; jenseits des Kammes verliert sich sehr bald dieser Charakter auch für den Monsún des Sommers. Aehnlich verhält es sich mit den Nordwinden des Sommers, die im Künlün vorherrschen, für die Hochthäler von Tíbet.

17) Tyndall, 1863; „Transact. Royal Soc.", „Philos. Magazine", etc. In Beziehung auf die Hitze, welche die Erde periodisch durch Strahlung verliert, kann man nach Tyndall's Versuchen annehmen, dass 16 Procent durch den Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre in der untersten Schichte von 10 Fuss Höhe absorbirt werden.

Wie sich bei meiner Special-Untersuchung der Windes-Verhältnisse für Band V der „Results", den ich gegenwärtig bearbeite, gezeigt hat, lassen die bedeutenden Höhendifferenzen längs der Richtung der Winde über die Hochgebirge und die damit verbundenen Hebungen und Senkungen der bewegten Luftmasse auch darin ihren Einfluss erkennen, dass mit der Hebung Ausdehnung bei vermindertem Luftdrucke und Latentwerden von Wärme sich verbindet, während die Senkung im entgegengesetzten Sinne wirkt.

Der Luftdruck ist in Hochasien, wegen der thermischen Verhältnisse in subtropischer Lage, für viele der Vegetationsformen, die sich bieten, schon innerhalb der Grenzen ihrer Verbreitung ein sehr ungleicher.

Luftdruck von ³/₄ der Atmospäre, Barometerstand von 570 Mm. oder 22·44 engl. Zoll, zeigte sich in Hochasien [18]) im Mittel vieler Beobachtungen meist bei 8000 engl. F. Höhe; Luftdruck der ¹/₂ Atmosphäre, 380 Mm. oder 14·96 engl. Zoll ergab sich für 19·100 Fuss [19]). Die höchsten phanerogamen Pflanzen fanden wir 700 Fuss höher noch, was einem Barometerstande von 368 Mm. oder 14·5 engl. Zoll entsprach.

Untersucht man die meteorologischen Verhältnisse an den oberen Vegetationsgrenzen in Hochasien oder in anderen Hochgebirgen und vergleicht man sie mit jenen Grenzen gleicher oder nahe verwandter Pflanzenformen, welche für wachsende Breiten sich bieten, so tritt sogleich entgegen, dass die Grenzen ungeachtet sehr verschiedenen Luftdruckes fast immer mit nahezu gleichen Wärmebedingungen coincidiren, und dass sie sich unabhängig zeigen von directem mechanischen Einflusse des Luftdruckes.

Ursache ist, dass im Organismus der Pflanzen nur Circulation von Flüssigkeit, nirgend von Luft in gasförmigem Zustande wie für das thierische Leben, das Bedingende ist.

---

18) Als genäherte Mittelwerthe können die hier vorliegenden Verhältnisse allgemein für die gleiche Erhebung über die Erdoberfläche gelten; Veränderlichkeit des Barometerstandes, Schwankung am gleichen Orte, zeigt ohnehin sowohl bei Zunehmen der geographischen Breite als auch bei zunehmender Höhe sehr rasche Verminderung.

19) Berechnet aus directen Beobachtungen am Íbi Gámin-Passe, Lager bei 19,094 F., am Gunshankăr-Peak, am Gipfel selbst bei 19,699 F., und am Karakorúm-Passe, Uebergangsstelle bei 18,345 F. Höhe. „Results", Vol. II. p. 336, p. 421 und p. 427.

Schon Thompson wurde speciell in Tíbet auf die eigenthümliche Widerstandsfähigkeit der Vegetation gegen verminderten Luftdruck aufmerksam, durch das hohe Auftreten von Myricarien als gut entwickelte Bäume, bei 15,500 Fuss Höhe noch, im Púga-Thale in Núbra. Dort wirkt allerdings ungewöhnliche locale Luft- und Bodenwärme mit; sie ist durch die Nähe heisser Borax-Quellen ausnahmsweise günstig verändert.[20])

In Strauchform hatten wir Myricaria germanica var. prostrata auf der Nordseite des Karakorúm-Passes in ganz freier Lage mehrmals in Höhen über 16,500 Fuss gefunden.

Als wärmeverändernd kann in grossen Höhen noch diess von Einfluss sein, dass, wie physicalisch zu erwarten ist, die Wärmeabnahme mit Verminderung der Dichtigkeit der Luft stetig etwas rascher werde. Für die freie Atmosphäre hatte schon Humboldt diess ausgesprochen [21]), und Biot hat darauf aus Beobachtungen, die in Ballonfahrten gemacht wurden, in positiver Weise ebenfalls hingewiesen. Ueber Meeren, Tiefländern und Mittelgebirgen war diess in verhältnissmässig geringer Höhe schon zu erkennen gewesen.

In Hochgebirgen aber ist der Einfluss der festen Masse und ihrer Gestaltung auf die Temperaturvertheilung so überwiegend, dass Antheil der Wirkung der Verdünnung der Luft, jedenfalls bis hinan zum Auftreten isolirter Gipfel und Kämme, ein verschwindend kleiner bleibt.

Indirect dagegen machte sich Einfluss verdünnter Luft auf Vegetation, wie sogleich sich zeigen wird, durch die damit verbundene Modification der Feuchtigkeit in sehr grossen Höhen wohl bemerkbar.

Atmosphärische Feuchtigkeit. — Die relative Feuchtigkeit, in Procenten der „Menge bei Sättigung der Luft" ausgedrückt, ist auf der Himálaya-Südseite vorherrschend gross, und zwar während der ganzen Jahresperiode. Für die Entwicklung der Vegetation in den höheren Theilen ist es jedoch selbst in jenen feuchten Gebieten ein beschränkendes Moment, dass die Spannkraft des Wasserdampfes, die absolute Menge in gegebenem Raume, in gleichem Verhältnisse wie der Luftdruck mit der Erhebung abnimmt.

---

20) Thompson, Western Himalaya and Tibet, p. 164.

21) A. v. Humboldt, Recueil d'Observations astronomiques. Vol. I. p. 138.

So geschieht es, dass in Hochgebirgen tropischer und subtropischer Breiten wegen der bedeutenden Höhe der Pflanzengrenzen, — mehr noch als in den Alpen — trockne Pflanzenformen vorherrschend als die letzten zu erkennen sind, die nicht nur gegen geringe Wärme, son-auch gegen geringe Feuchtigkeit der Luft sehr widerständsfähig sind[22]). Steigen Pflanzengrenzen bis in die Nähe der Schneegrenze an, (oder überschreiten sie dieselbe), so wäre wenigstens local vermehrte Bodenfeuchtigkeit an hohen Standorten nicht ganz ausgeschlossen. Doch finden sie sich auch dort meist in trockenen Lagen, da nur in solchen die oberen Bodenschichten genügend sich erwärmen.

Bewölkung und neblige Trübung der Atmosphäre sind auf der Südseite des Himálaya vom Beginne des Frühlings bis gegen den Herbst von grosser Häufigkeit; doch treten in den meisten Lagen selbst in der Regenzeit Unterbrechungen mit sehr starker Besonnung ein. Die zweite Hälfte des Herbstes und die Wintermonate sind auch in den feuchtesten Himálaya-Theilen im allgemeinen sehr klar; Wolkenbildung ist oft Tage lang eine ganz vereinzelte. Normales Auftreten der Nebelbildung wie in unseren Breiten beschränkt sich selbst in Síkkim sowohl in den Thälern als auf den Abhängen auf die Zeit der Frühlings- und der Sommer-Regen. Als Mittel für die Jahresperiode erhielt ich aus den Beobachtungen zu Darjíling in Síkkim, Höhe 7168 F., relative Feuchtigkeit von 84 Procent bei 12·4° C mittlerer Lufttemperatur.

In der Nähe des Himálaya-Kammes selbst finden sich schon auf der indischen Seite an zahlreichen Stellen lange Gürtel mit wechselnder Breite aber meist unter sich zusammenhängend, in welchen die relative Feuchtigkeit fast so gering wirdwie in Tíbet, mit Aehnlichkeit des ganzen Klimas; diess tritt ein, weil die von Indien ansteigenden Winde, auch solche, deren Richtung noch eine Strecke weiter fortbesteht, ihre Feuchtigkeit schon an hohen Parallel-Ketten verloren haben, welche hier dem Hauptkamme vorliegen. Dieses Uebergreifen tibetischer Trockenheit über die Kammlinie des Himálaya gegen Süden hat sich vor allem an

22) Auch an den polaren Grenzen ist trockne Vegetation sehr allgemein; dort aber sind es die ungleich grösseren Kältextreme im Winter, bei ähnlichen Jahresmitteln wie an den Höhengrenzen, welche die mehr saftreichen Pflanzen ausschliessen.

seinem grossen Einflusse auf die Vegetation erkennen lassen. Schmal zeigt sich dasselbe in Síkkim schon, und es wird sogar ziemlich breit in den nördlichen Theilen der britischen Provinzen Kămáon und Gărhvál.

Im centralen Theile Tíbets in Gnári Khórsum, sowie in Ladák und in Núbra, ist die relative Feuchtigkeit die geringste gewesen, die sich zur Beobachtung geboten hatte. Es waren uns 1855 und 1856 Minima relativer Feuchtigkeit von $1\frac{1}{2}$, selbst von 1 Procent nur, vorgekommen [23]).

In Bálti, das sich weit gegen Nordwesten vorschiebt, nimmt die relative Feuchtigkeit ziemlich stark wieder zu und es zeigt sich schon so bedeutende Vermehrung derselben dass auch die Vegetation in ihrer Menge und in ihrer Gestaltung sehr verschieden ist von jener der mehr centralen Theile Tíbets. Für den ferneren Südosten Tíbets, der bei geringerer nördlicher Breite überdiess weniger hoch gelegen ist, ist Aehnliches ebenfalls sehr wahrscheinlich; positive Anhaltspunkte zur Beurtheilung sind aber bis jetzt noch nicht bekannt.

Von Ladák gegen Norden, in jenem Hochlande Turkistáns, das zwischen der Karakorúm- und der Künlün-Kette liegt, ist jenseits des Karakorúm-Kammes, die extreme tibetische Trockenheit bald gebrochen; aber gross ist anfangs die Aenderung nicht, sie ist eine viel weniger rasche als z. B. gegen Nordwesten in Bálti. Beim Ansteigen auf der Südseite des Künlün war eine allmählig bemerkenswerthe stetige Zunahme atmosphärischer Feuchtigkeit am Auftreten von Vegetation, da wo auch Bodenfeuchtigkeit sie begünstigte, zu beobachten, wurde auch durch Messung von uns bestimmt. Bedeutend aber wurde die Aenderung im Vegetationscharakter erst jenseits des Kammes, auf der Nordseite des Künlün, ungeachtet der nicht sehr fernen Góbi-Wüste; in den Mittelstufen des Nordgehänges ist sie am grössten.

Auf der Südseite des Künlün zeigt sich die Vegetation höchstens

---

23) Bis dahin war die von Humboldt in der sibirischen Platowskaja-Steppe, südlich von Tobolsk beobachtete relative Feuchtigkeit „von 16%" das Minimum, das aus directer Bestimmung, mit Anwendung feuchten und trocknen Thermometers, sich ergeben hatte; allerdings in einem viel niedrigeren und auch viel weiter gegen Norden gelegenen Gebiete. Al. von Humboldt „Centralasien" Band II, Hygrometrische Tafel, S. 51.

oasenarsig; Flächen bildet sie, aber diese sind vereinzelt. Im ganzen landschaftlichen Bilde, das sich bietet, sind noch immer kahle Gesteine das Vorherrschende; hier tritt auch Einlagerung von Wüstensand, den die Stürme herüberwehen, hinzu. Auf der Nordseite dagegen gibt es gute Weidegründe bis hinan zur Schneegrenze und eine mittelgute Strauchregion; Baumvegetation ist nicht ganz in gleichem Grade entwickelt, doch die Höhengrenze, die sie erreicht, ist gleichfalls eine den mittleren Wärme-Verhältnissen sehr wohl entsprechende An jenen Kämmen der Karakorúm-Hauptkette, welche sich links vom oberen Yárkand-Thale direct in die Ebene Turkistáns hinabziehen, da sie schon westlich vom Ende der Künlünkette gelegen sind, lässt sich der hier erwähnte Vegetationscharakter in ganz ähnlicher Form ebenfalls erkennen.

Die Regenmenge auf der indischen, südlichen Seite des Himálaya ist im Verhältnisse zu anderen Gebieten gleicher Lufttemperatur längs des ganzen Höhenzuges eine mehr als mittelgrosse; dabei sind die Differenzen ebenfalls bedeutend. Das Maximum zeigte sich in den Mittelstufen des Síkkim-Himálaya, in Darjíling und Umgebungen zwischen 6000 und 8000 Fuss Höhe. Die Regenmenge erreicht dort 100 bis 130 engl. Zoll im Jahre. Gegen Osten, in Bhután, und, etwas rascher, noch gegen Westen und Nordwesten von Síkkim tritt starke Abnahme ein. Aber auch nordwestlich noch von Kashmír ist in Höhen bis zu 8000 Fuss Niederschlag im Jahre von 50 bis 60 Zoll nicht selten. Für grössere Höhen bei sonst gleicher Lage lässt sich, nach den vereinzelten Beobachtungen während der Märsche zu schliessen, überall ziemlich schnelle Verminderung des Niederschlages voraussetzen, der sich aber mehr quantitativ als in Häufigkeit und Dauer ändert.

Die allgemeine Abnahme der Regenmenge von Síkkim an gegen Nordwesten ist jener im indischen Tieflande in der Richtung vom Küstengebiete landeinwärts ähnlich. Im Tieflande aber ist in Bengalen und noch in Hindostán die Regenperiode in der Zeit ihres Beginnens und ihres Endens viel schärfer begrenzt.

Vergleicht man die einzelnen Stufen des Himálaya zwischen dem indischen Rande und dem Kamme längs ihres Ansteigens gegen Norden, so zeigt sich, dass nicht in den Vorbergen die Regenmengen die grössten

sind, sondern dass die Maxima erst in einiger Entfernung vom Tieflande eintreten — da, wo die regenbringenden Winde zugleich bis zu gewisser Höhe sich erheben mussten [24]). Von dort gegen das Innere ist die Regenmenge eine bedeutend geringere, und nimmt überall verhältnissmässig ziemlich rasch noch in den dem Kamme näheren Theilen ab.

In Tíbet, auch in der dem Himálaya-Kamme südlich vorliegenden schmalen Region grosser Trockenheit, ist die Niederschlagsmenge eine sehr geringe. Sie lässt sich zu 5 bis 6 Zoll annehmen; in vielen Theilen Tíbets erreicht sie im Jahre wenig über 2 Zoll.

Im Künlún-Gebirge sind leichte Schauer von Schnee und Regen verhältnissmässig ziemlich häufig zu nennen, wenigstens auf der Nordseite in Höhen von 7000 bis 10,000 Fuss; quantitativ ist der Niederschlag dessenungeachtet noch immer gering, kaum mehr als 12 bis 15 Zoll für das Jahr erreichend.

Als Jahres-Maxima des Regens in Europas gebirgigen Erhebungen und ihren nächsten Umgebungen [25]) sind anzuführen die Stationen Coimbra in Portugal mit Regenmenge von 118·9 engl. Zoll, Bergen in Norwegen mit 88·7 engl. Zoll, und Tolmezzo am Südfusse der Alpen mit 96·0 engl. Zoll. Mittelwerth für die ganzen Alpen ist eine Niederschlagsmenge von 42·6 engl. Zoll, für das südliche Deutschland 26·65, für Nord- und Mittel-Deutschland 21·23 engl. Zoll.

Die Vertheilung der Niederschläge in der Jahresperiode ist gleichfalls in Hochasien, auch im regenreichen Gebiete der Südgehänge des Himálaya, von jener in den meisten Lagen mittlerer Breite sehr verschieden, und zwar in einer Weise abweichend, welche gerade auf die Entwicklung der Vegetation von unmittelbarem Einflusse ist.

Im Himálaya sind nemlich die Winter von Bhután bis Kashmír milde und feucht, sind aber doch ungeachtet einer mehr als mittelgrossen „relativen Feuchtigkeit der Luft“ fast ganz ohne Niederschlag, und die Besonnung ist durch andauernd schönes Wetter begünstigt.

Für die Vegetation ersetzt sich der Regenmangel zum Theil durch starke Thaumenge; noch grösseren Einfluss hat die Bodenfeuchtigkeit,

---

24) Aehnlich gelegen sind die Maxima von Regenmenge an der Westküste des südlichen Amerika; dort aber ist der Küstenrand sogar nahezu regenlos.

25) Khássia-Gebirge und absolute Maxima s. o. S. 203.

weil diese wegen ihrer sehr beschränkten Veränderlichkeit in den regenreichen Gebieten des Himálaya während der ganzen Jahresperiode eine sehr grosse ist.

Im Frühlinge treten in den meisten Lagen Regen ein, und diese sind es auch, mit denen sich in den höheren Regionen vorzüglich der Schneefall verbindet; dann folgt häufig wieder Wochen lang vorherrschend klare Luft mit vereinzelten Wolken.

Jene indischen Monsúns, von denen das Eintreten der eigentlichen Sommer-Regenzeit bedingt ist, machen im Himálaya meist etwas früher als südlich davon den Regen beginnen, da in diesem Gebirge mit der Aenderung des Windes die Luft rascher mit Feuchtigkeit sich sättigt, als über den Ebenen, wo die heisse trockne Jahreszeit voranging. Der Herbst aber ist wieder sonnig, auch der ganzen Ausdehnung des Himálaya entlang, und es sind selbst bei den bisweilen eintretenden Stürmen Niederschläge sehr selten. Die Niederschläge in Tíbet und nördlich davon im Gebirge sind quantitativ vorzüglich auf den Sommer und den ersten Theil des Herbstes beschränkt, verbunden mit localem Auftreten isolirter Gewitter. Aehnlich scheinen auch die Verhältnisse für die Ebenen Turkistáns zu sein in jenen den Gebirgsrand bildenden Theilen, in denen der Wüstencharakter noch nicht ausschliesslich vorherrscht.

Niederschlag im Winter, auch als Schneefall kömmt in Tíbet ausnahmsweise vor, ist aber stets sehr gering. In den Thälern bildet Schnee, selbst für kurze Zeit, nur selten eine cohärente Decke.

In den Alpen dagegen und in Nord- und Mittel-Deutschland ist die Vertheilung der Niederschläge nach den Jahreszeiten eine ganz andere. Setzt man die Regenmenge des ganzen Jahres = 100, so sind die procentischen Verhältnisse [26]) die folgenden.
Für das Alpengebiet ergibt sich:

Winter 19·7 % Frühling 22·0 % Sommer 25·7 % Herbst 32·7 %;

für Nord- und Mitteldeutschland:

Winter 20 % Frühling 23 % Sommer 37 % Herbst 24 %.

---

26) Entnommen unseren „Untersuchungen über die phys. Geogr. der Alpen", Leipzig 1850, Band I. S. 413.

2. Tabellen der Temperaturabnahme mit der Höhe im Jahresmittel.

Zu der directen Bestimmung der Lufttemperatur konnte ich für Hochasien 44 Beobachtungsstationen zusammenstellen. Was ich hier folgen lasse sind aber nicht ausgewählte einzelne Stationen, wie ich für Indien sie gab, sondern Mittelwerthe, berechnet für die klimatisch zu trennenden Gebirgsregionen und innerhalb dieser für Höhenstufen von gleicher Grösse oder von möglichst einfachen gegenseitigen Verhältnissen. Wegen der so bedeutenden Verschiedenheit der Höhen, die hier thermisch zu vergleichen sind, liessen sich nur auf diese Weise Zahlendaten in allgemeiner Form zusammenfassen.

Schon im betreffenden Bande der „Results“[27]) habe ich versucht, mit sorgfältiger Berücksichtigung alles positiven Materiales unmittelbarer Beobachtung, Tabellen für Jahr und Jahreszeiten und Tafeln des Gebirgsprofiles mit den entsprechenden Höhenisothermen zu geben. Dort aber ist in den Zahlentabellen und in den graphischen Darstellungen Differenz der Temperatur — von 5° F. oder 2·8° C — zu Grunde gelegt.

Hier sind die entsprechenden Werthe für die Differenz der Höhe als Constante berechnet, um die Temperatur auch für die einzelnen Standorte, wo stets Provinz und Höhen angegeben sind, leichter beurtheilen zu können.

Bei der Berechnung der Temperaturtabellen, dem klimatischen Charakter der Gebirgsregionen entsprechend, war von dem Zusammenfassen der Provinzen der „Landesregionen“ nach topographischer Gestaltung nur wenig abzuweichen nöthig. Als solches Aendern der Begrenzung ist zu nennen für die Himálaya-Südseite Ausschliessen der trocknen schmalen Hochregionen, die sich dort streckenweise dem Kamme entlang zeigen (erl. S. 222) und Verbinden dieser mit Tíbet. Dessgleichen sind in der Berechnung der Mittelwerthe für das centrale

27) Vol. IV. Meteorology, First Part. „The thermal stations of High Asia“ p. 465—534. Die ersten Zahlendaten hatte ich für Hochasien gegeben in dem k. b. ak. Sitzungsbericht vom 11. März 1865, und mit Tafeln für Jahr und Jahreszeiten in den Berichten der Berliner Ak.-Sitzung vom 1. Juni 1865.

Hochasien aus der III. Landesregion auch die Nordgehänge der Karakorúm-Seite miteingeschlossen worden, und die beiden Seiten der Künlün-Kette sind im Gebiete von Ost-Turkistán für sich allein zusammengefasst. —

Die Zahlenwerthe der Jahresmittel sind gegeben für Höhenstufen von je 6000 Fuss, oder für Theile derselben, wo die localen Verhältnisse der Hebung solches bedingten.

Die „Temperaturabnahme" zwischen der oberen und unteren Grenze je einer Höhenstufe ist dabei nicht einfach aus dem Verhältnisse der Höhendifferenz zur Temperaturdifferenz in so grossen Abständen wie sie hier vorliegen entnommen, sondern es ist dieselbe basirt auf die unmittelbaren Beobachtungen an den einzelnen Stationen und auf die resultirenden Curven, wie in Band IV der „Results" erläutert. Doch sind in den meisten Stufen die Zahlenwerthe der Abnahme, mit 5 englischen Fuss als Differenzgrösse, davon noch nicht verändert. —

Für das ganze Gebiet Hochasiens hat sich als Jahres-Mittelwerth eine Erhebung von 702 engl. F. für 1° C Temperaturabnahme ergeben. Für die einzelnen Theile desselben sind die Zahlenwerthe die folgenden.

„Himálaya-Südabhang; a) äussere, b) innere Lage" (Landesregion I.)

In dieser Landesregion war bei der Angabe der verticalen Wärmevertheilung eine „äussere Lage" und eine „innere Lage" getrennt zu halten. Bedingt ist diess durch unmittelbaren Einfluss des indischen Tieflandes sowohl auf das mechanische Sichvertheilen erwärmter Luftmassen als auch auf die Menge und die Art des Auftretens atmosphärischer Feuchtigkeit.

Als Maxima der Erhebung sind in der äusseren Lage Gipfel von nahezu 16,000 Fuss anzuführen; die „Basis" ist hier in beiden Lagen auf das Meeresniveau bezogen und ist der Mittelwerth der basischen Isothermen für je 1 der Lagen.

a) „äussere Lage".

Höhe ü. M., engl. F.	Lufttemperatur, Jahresmittel	Erhebung für 1° C Abnahme
(0', Basis	24·2° C)	
		715 engl. F.
2000'	21·4	
		720 „
8000'	13·1	
		665 „
14,000'	4·0	
		650 „
15,500'	1·7	

b) „innere Lage".

Höhe ü. M., engl. F.	Lufttemperatur, Jahresmittel	Erhebung für 1° C Abnahme
(0', Basis:	21·1° C)	
		715 engl. F.
2000'	18·3	
		715 „
8000'	9·9	
		755 „
14,000'	1.9	
		740 „
20,000'	— 6·2	
		720 „
26,000'	—14·5	

Aus diesen beiden Zahlentabellen ist zu ersehen:

1) Es ist die „äussere Lage" mit der „inneren" verglichen in ihren niederen Stufen, mit mehr, als der sehr geringen Breiten-Differenz allein entspräche, die wärmere; die verticale Wärmeabnahme ist in der „äusseren Lage" die raschere.

2) In beiden Lagen zeigt sich die Temperaturabnahme mit der Höhe für solche Mittelstufen als die langsamste, in welchen die Massenerhebung ebenfalls noch verhältnissmässig sehr langsam sich ändert.

3) In der „äusseren Lage" ist von 8000 Fuss aufwärts die Temperaturabnahme bedeutend rascher als in der „inneren", indem bei Vorherrschen isolirter Erhebungen die Wärmeveränderung immer mehr jener in der freien Atmosphäre sich anschliesst.

„Das westliche Stromgebiet von Tíbet", nebst Einschluss des „Nordabhanges der Karakorúm-Kette". (Landesregion II und Landesregion III a.)

Höhe ü. M., engl. F.	Lufttemperatur, Jahresmittel	Erhebung für 1° C Abnahme
5000'	15·2° C	
		780 engl. F.
8000'	11·4	
		720 „
14,000'	3·1	
		700 „
20,000'	— 5·5	
		670 „
26,000'	—14·5	

Die Berechnungen reichen nicht unter 5000 F. herab, weil diess sehr wohl den niedersten Lagen entspricht, die überhaupt in Tíbet vorkommen.

Diese Temperaturverhältnisse lassen sich wie folgt beurtheilen:

1) Verglichen mit „Südabhang des Himálaya, innere Lage" zeigt sich für das ganze Gebiet der centralen Erhebung Hochasiens bis hinan in die Region, wo isolirte Kammrücken und Gipfel allein noch vorkommen, im Mittel die Wärme grösser, ungeachtet der Breitenzunahme und der nur theilweise gleich günstigen südlichen Exposition der Abhänge.

Die einzelnen Beobachtungsdaten ergeben innerhalb dieses Gebietes gleichfalls einen verhältnissmässig etwas geringen Einfluss der Breite. In den südlichen Theilen, auf der Nordseite des Himálaya, ist nördliche Exposition der Abhänge die vorherrschende, es ist dadurch die Wirkung der Besonnung eine local schwächere; auf dem Nordabhange der Karakorúmkette ist die Temperatur, bei dem geringen Gefälle des Terrains, durch Massenerhebung relativ etwas vermehrt.

2) In den tiefsten Lagen Tíbets, für welche die Massenhebung die allgemeinste ist und in deren Terraingestaltung auch der Charakter muldenförmigen Abgeschlossenseins sehr häufig ist, ist die Abnahme der Wärme mit der Höhe die langsamste.

3) Bei 14,000 Fuss beginnend und von dort bis nahe an 20,000 Fuss ist das Verhältniss der Wärmeveränderung mit der Höhe, das sich dabei ergeben hat, 700 F. für 1° C, ist demnach als identisch mit jenem von 702 F. für Hochasien im Allgemeinen zu betrachten.

4) Für die Erhebungen, die noch höher hinanreichen, lässt sich aus den letzten Veränderungen innerhalb der vorhergehenden Gruppe und, vereinzelt, auch aus Beobachtungen bei Bergbesteigungen ein etwas rascheres Abnehmen der Wärme folgern, ähnlich jenem im Himálaya in der „äusseren Lage".

„Die Süd- und Nord-Gehänge der Künlün-Kette", in Ost-Turkistán (Landesregion III b).

Höhe ü. M., engl. F.	Lufttemperatur, Jahresmittel	Erhebung für 1° C Abnahme
3500'	12·6° C	
		615
8000'	5·3	
		720
14,000	—3·0	
		700
18,500	—9·4	

Die Temperaturverhältnisse sind in der obigen Tabelle, wegen mangelnder Daten für die centralen Theile Ost-Turkistáns, nur bis zu 3500 F. Höhe berechnet, bezogen auf genäherte Werthe für Yárkand [28]).

Für das Gebirge selbst, wo Süd- und Nord-Abhang sich vergleichen liessen, ergab sich, aus den Temperatur-Beobachtungen während unserer Märsche sowie, bestätigend, aus den Höhengrenzen von Pflanzen, die sich boten, dass der Unterschied zwischen den beiden Gehängen ein verhältnissmässig grosser ist. Hier trägt die Stellung der Kette als solche dazu bei, die Wärme auf der Südseite mehr als gewöhnlich zu mehren; denn die Kammlinie hat jene ost-westliche Richtung, bei welcher der Exposition entsprechend Besonnung, auch die Ungleichheit der Wärme zwischen nördlichen und südlichen Winden, als Bedingungen der Temperatur am mächtigsten wirken können.

Es wäre noch grösserer Unterschied in der Wärmevertheilung,

28) Zu vergl. die Angaben über die basischen Isothermen, o. S. 214.

selbst für die Hochregionen der Südseite, in Analogie mit anderen Gebirgen zu erwarten, wenn nicht hier im Künlün die Südseite überhaupt so wenig tief nur herabreichte; hier ist demnach das Element aufsteigender warmer Winde ein sehr beschränktes.

Auf der Nordseite des Künlün ist die Wärmeabnahme mit der Höhe bis hinan gegen 8000 Fuss eine verhältnissmässig ziemlich rasche. Es sind dabei nicht nur die Mittelstufen des Künlün „relativ zu kühl", weil mit der Vorebene hier in der betreffenden Höhe nur Werthe aus einem, aus dem nördlichen Gehänge, zum Vergleiche sich bieten, sondern noch grösseren Antheil daran hat der Umstand, dass auch in Turkistán ungeachtet der Breite erwärmender Einfluss der Massenerhebung, vor allem im Sommer, noch stark sich geltend macht, und zwar eben der niedrigeren Lage wegen mit um so grösserem Effecte.

3. Temperaturvertheilung nach den Jahreszeiten.

A. Die Formen der periodischen Veränderung. Im Gange der Temperatur innerhalb der Jahresperiode zeigte sich, abgesehen von der Ungleichheit der Wirkung der Höhe, zwischen den einzelnen Regionen und den Theilen derselben weit grössere Verschiedenheit als in der Vertheilung der mittleren Temperatur des Jahres.

Am meisten sind dabei von Einfluss die schon erwähnten Verhältnisse der atmosphärischen Feuchtigkeit und des Niederschlages von Regen.

So geschieht es, dass in Bhután und in Síkkim des östlichen Himálaya, und noch bis gegen die mittleren Theile des Himálaya in Nepál, in den meisten Lagen die drei Monatsmittel für Juni, für Juli und für August, die sonst mit deutlich grösster Wärme im Juli — einer nördlichen Breite von 27 bis 28 Grad entsprechend — sich unterscheiden würden, nahezu die gleichen bleiben.

Weiter westlich und nordwestlich, bis gegen Kashmír, ist ebenso wie in Hindostán Juni der wärmste Monat des Jahres, aber mit einem bedeutend geringeren Unterschiede vom Juli-Mittel im Gebirge als in den Ebenen. In Tíbet und nördlich davon ist Juli der wärmste Monat und zwar der subtropischen Lage wegen mit etwas grösserem Unterschiede vom August-Mittel als in höheren Breiten.

Weniger warm als Juli ist August im ganzen Gebiete Hochasiens, auch da wo die Regenmenge vorzüglich auf den Monat Juli sich concentrirt; aber in den von Tíbet südlichen Lagen ist die Differenz weniger gross.

Als der kälteste Monat ist allgemein der Januar[29]) zu nennen; in höheren Breiten ist dagegen Wechsel des Minimums der Monatstemperatur zwischen December und Januar, sowie, wenn grosse Hebung des Terrains damit sich verbindet, auch zwischen Januar und Februar nicht selten.

Turkistán wird im Winter schon von jener Depression der Temperatur erreicht, welche, etwas weiter nördlich, in Centralasien sehr bedeutend und sehr allgemein wird.

B. Wärmeabnahme mit der Höhe. In den „Results"[30]) habe ich die Zahlendaten und deren Erläuterung für die Jahreszeiten in Hochasien, in meteorologische Gruppen getrennt, in gleicher Weise wie für die Jahresmittel gegeben. Hier sei nur der Mittelwerthe und der Ergebnisse noch erwähnt.

Die Mittel der Höhenunterschiede für 1° C Temperaturabnahme sind

im Winter,	im Frühling,
December, Januar, Februar = 684 F.;	März, April, Mai = 648 F.;
im Sommer,	im Herbst,
Juni, Juli, August = 756 F.;	September, October, November = 702 F.

Der allgemeine Gang der Veränderung der Temperaturabnahme innerhalb der Jahresperiode lässt sich characterisiren wie folgt.

In den meisten Lagen ist für Hochgebirge und für die freie Atmospäre die Abnahme der Wärme mit der Höhe im Winter am langsamsten, wird rascher mit dem Steigen der Temperatur an der Oberfläche bis gegen Ende des Sommers und verlangsamt sich wieder im Uebergange zum Winter, wobei der Herbst am wenigsten unter den 4 Jahreszeiten vom Jahresmittel abweicht.

„Uebereinstimmend" mit jenen allgemeinen Verhältnissen ist hier:

---

29) Nur für das Spíti-Thal z. B., im westlichen Tíbet, Höhe 13,000 (Cunningham, „Ladak" p. 182) ergab sich Abweichung davon, nemlich Dec. — 9·8°C, Jan. — 7·1°C, Febr. — 7·4°C. Doch liegt nur 1 Jahr Beobachtung vor, und es wurden auch die Beobachtungspunkte im Thale etwas gewechselt.

30) Vol. IV. S. 546 bis 564.

Beschleunigung vom Winter bis gegen Ende des Frühlings, sowie eine Annäherung der Temperaturabnahme im Herbste an den Mittelwerth für das Jahr, welche hier sogar zur Coincidenz mit dem Jahresmittel wird.

„Abweichend" aber von den allgemeinen Verhältnissen sind jene Modificationen der Temperaturabnahme, welche in Hochasien im Winter und im Sommer eintreten.

Während des Winters nemlich dauert Verkleinerung des Quotienten, also Beschleunigung der Temperaturabnahme noch fort; die Abnahme wird im Mittel eine bedeutend raschere als während des Herbstes und die Art der Aenderung liegt darin, wie die Analyse der einzelnen Daten es erkennen lässt, dass in dieser Periode des Jahres eine relativ grössere Abkühlung in den mittleren und oberen Theilen, auch im centralen Tíbet noch, eintritt, als in den tieferen Thalsenkungen, in den Vorstufen und in den indischen Ebenen.

Für den Sommer Hochasiens zeigt sich als das Anomale, dass die Temperaturabnahme hier langsamer ist als in jeder der 3 anderen Jahreszeiten. Bedingt ist diess durch zwei an sich ungleichartige Ursachen, welche aber in ihrer Wirkung gleiche Richtung haben.

Die eine Ursache ist Beschränkung fortschreitender Erwärmung (durch Regenzeit tropischen Characters) auf der Südseite des Himálaya, wovon am meisten berührt werden die Tiefen und die Mittelstufen, — die andere ist die Vermehrung der Erwärmung in Verbindung mit Massenerhebung, wobei der Effect am grössten ist gerade während der Zeit des höchsten Sommerstandes in den hochgelegenen centralen Theilen, wo nicht nur die Regenzeit nicht mehr vertreten ist, sondern wo auch Bewölkung während der ganzen Sommerperiode eine auffallend geringe ist.

Die Einzelheiten der Abweichungen, bezogen auf den Mittelwerth der entsprechenden Jahreszeit, sind dabei noch ziemlich vielfacher Art.

„Im Winter" macht sich im Süden erwärmender Einfluss der tropischen Ebenen in Luftströmen oberhalb der Thalwinde local noch ziemlich weit gegen das Innere bemerkbar; er reicht bis gegen die Kammlinie des Himálaya hinan, aber überschreitet sie nicht. Die kühlende Einwirkung der Temperaturdepression in Centralasien scheint

auf den Künlün ihren Einfluss erst in Höhen von 8000 bis 9000 Fuss ganz zu verlieren; obwohl nämlich die Wüste und deren bewohnte Vorstufen, die hier die Basis bilden, an sich schon „relativ zu kalt" sind, ergibt sich doch die Abnahme mit der Höhe noch bis gegen 7000 Fuss entschieden viel rascher als der Mittelwerth dieser Jahreszeit, und wird = 650 Fuss für 1° C.

„Im Frühling", findet im äusseren Himálaya, wegen der heissen trockenen Jahreszeit in Indien, frühe ein rasches Steigen der Temperatur statt, während in Tíbet die grösste Wärmeveränderung gegen das Ende des Frühjahres fällt.

Das resultirende mittlere Verhältniss in dieser Jahreszeit für das ganze Hochgebirge ist, wie die obigen Zahlen zeigen, dass der Wärmeunterschied zwischen Tiefe und Höhe ganz allgemein am grössten ist, indem „die Temperaturabnahme mit der Höhe als die rascheste sich ergibt".

Innerhalb der verschiedenen Gruppen zeigen einzelne, in Thälern gelegene Stationen durch Herabsinken und Anhäufung kalter Luft vielfach noch locale Depressionen; dasselbe gilt auch von der turkistanischen Ebene im Norden des Künlün.

„Im Sommer" zeigt sich in der ganzen oberen Atmosphäre, welcher in dieser Jahreszeit durch die indischen Monsúns, sowie von den tibetischen Hochländern durch unmittelbar aufsteigende Luftströmung, so viel Wärme zugeführt ist, Verlangsamung der Temperaturabnahme mit der Höhe, die sich bis Turkistán erstreckt.

Locale Wärmeverminderung während des Sommers tritt im Himálaya in allen Lagen ein, wo die Regenmenge ungewöhnlich gross ist, so in Darjíling, in Nainitál.

Die tibetischen Hochlande, besonders jene von Ladák in Höhen von nicht über 12,000 Fuss, bieten eine ganz ungewöhnlich starke locale Vermehrung der Wärme.

Von den niedersten Stationen Tíbets, allerdings erst zwischen 5000 bis 6000 Fuss daselbst beginnend, bis hinan zu 12,000 Fuss ist im Sommer ungeachtet dieser keineswegs geringen Höhendifferenz die Temperaturabnahme mit der Höhe, die sich ergibt, nahezu unverändert, und zwar ist der Werth derselben = 1220 Fuss für 1° C. Es ist diess demnach

bei weitem die langsamste Wärmeabnahme während des Jahres für das ganze Gebiet Hochasiens. Bis zu Höhen gegen 9000 F., bei Búshia, hat sich ähnlicher Einfluss im Sommer selbst für Turkistán noch erkennen lassen.

Erst in bedeutend grösseren Höhen wurde — bei centraler Lage und an schönen Tagen nicht vor 13,000 bis 14,000 Fuss beginnend — stärkere Einwirkung der freien Atmosphäre deutlich bemerkbar. Es zeigte sich, nach Beobachtungen an isolirten Kämmen und Gipfeln in ihrem Verhältnisse zu den correspondirenden Beobachtungen zu Le, für welche der Hindú Hărkíshen dort zurückgelassen war[31]), die Abnahme nun beschleunigt, aber nur scheinbar, da auf die Mittelwerthe Hochasiens bezogen, nicht die obere Region die relativ kältere, sondern die Mittelstufe die relativ wärmere ist.

„Im Herbste" sind die centralen Theile ebenfalls noch „relativ wärmer". Gleiches gilt allgemein für die Luftschichten in sehr grossen Höhen im Gegensatze zu jenen Regionen, welchen in dieser Jahreszeit allmählig die Schneegrenze sich nähert. Die Schneebildung selbst ist zwar mit Freiwerden einer nicht unbedeutenden Wärmemenge verbunden. Doch es verschwindet viel davon, auch nach oben, meist sehr rasch durch Stürmen bei Schneefall; die Schneelagen bleiben. Mit allmähliger Ausdehnung derselben verbindet sich sehr bald stetige Vermehrung des Abfliessens kalter Luft.

Wegen ihres unmittelbaren Zusammenhanges mit den Höhengrenzen und mit den Entwicklungsperioden der dort auftretenden Vegetationsverhältnisse sind für die Hochregionen, des Himálaya sowie des Karakorúm, noch folgende Ergebnisse anzuführen.

Im Winter und im Frühling noch ist Tibet mit Einschluss dabei des Nordabfalles des Karakorúm in allen Höhen kälter als die gleich hohen Mittel- und Hoch-Regionen von 6000 Fuss aufwärts im „Himálaya, äussere Lage". Im Winter ist der Unterschied sehr bedeutend für die ganze Ausdehnung der Gebiete; im Frühling wird zwischen 8900 und 14,300 Fuss, bei rascherer Wärmezunahme Tíbets in seinen

31) Details „Results" Vol. IV. S. 530.

unteren Theilen, eine Strecke weit der Unterschied zwischen beiden Gebieten verschwindend klein.

Im Sommer dagegen ist Tíbet wärmer selbst als die südlichen Theile des Himálaya in gleicher Höhe, und, nach Beobachtungen bei Bergbesteigungen und auf den hohen Pässen zu schliessen, verschwindet diese Temperaturdifferenz, mit Uebergang in Abnahme der Temperatur von Süden gegen Norden, in Tíbet erst in der Nähe der höchsten Gipfel. In der Sommerwärme-Region zwischen den Grenzen von 10,000 und von 13,500 F. ist dabei der Unterschied am grössten.

Es ergab sich

Sommermittel von 7·2°	in Himálaya „b“	bei 10,000 F.	in Tíbet	bei 11,500 F.
„ „ 4·4°		„ 12,000 „		„ 13,500 „

Auch im Herbste — wobei gleichfalls directe Beobachtungen bei wiederholten Passübergängen, die allgemeinen Bedingungen der Gestaltung der Isothermen bestätigend, vorliegen — ist Tíbet noch etwas wärmer als „Himálaya b“; Abnahme der Temperatur mit der Breite beginnt in Tíbet, „zwischen dem Himálaya- und dem Karakorúm-Kamme“, im Herbste erst in Höhen von nahezu 20,000 Fuss als solche erkennbar zu werden.

III.

Zahlenangaben über Temperaturverhältnisse in den Andes und in den Alpen.

Einfluss der Breite auf Temperaturabnahme mit Höhe; Beschleunigung mit wachsender Breite. — Mittelwerthe für die Andes. — Mittelwerthe für die Alpen.

Die Wärmevertheilung in Hochgebirgen, die sehr verschieden sind in ihrer geographischen Breite, zeigt, dass bei gleicher Bodengestaltung für das Jahresmittel die Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe mit zunehmender Breite etwas rascher wird. Doch bei geringerer Entfernung als etwa 30 Grade vom Aequator tritt diese Aenderung mit der Breite noch nicht hervor. Diess gilt auch für Hochasien noch, obwohl dort Unterschied der Breite innerhalb der Gebirgszüge selbst schon sehr bedeutend ist; so liegen dort vor, zu unmittelbarer Berechnung der Abnahmequotienten aus Monatsmitteln und mit sehr ähnlichen Höhendifferenzen unter sich, als die südlichste Gruppe, in Síkkim: „Pănkabári und Darjíling“, Breiten 26° 49′ N. und 27° 3·0′ N., Höhen 1790 F. und 7168 F.; als die nördlichste: „Srinăgar in Kashmír und Le in Tíbet“, Breiten 34° 4·6′ N. und 34° 8·3′ N., Höhen 5146 F. und 11,532 F.

Die Andes bieten noch bessere Anhaltspunkte zur Beurtheilung des Einflusses der Breite, durch ihre vorherrschend nord-südliche Ausdehnung bei grosser Hebung und gleicher Bodengestaltung innerhalb und ausserhalb der Tropengrenzen. Auch dort beginnt das Wachsen der Breite und die Verminderung der Insolation, die sich damit verbindet, erst ausserhalb der Wendekreise von merklichem Einflusse auf die Temperaturabnahme mit der Höhe zu werden.

In den Andes des tropischen Amerika haben sich nach Humboldt's Untersuchungen die Werthe der Wärmeabnahme mit der Höhe, berechnet für die Lufttemperatur im Jahresmittel, wie folgt ergeben.

In den Gebirgsregionen mit Bodengestaltung in Kamm- und Thal-Formen:
Erhebung für 1° C . . . . 191 Meter = 626·5 engl. F.

In den centralen Höhenstufen mit vorherrschenden Plateaux-Formen:
Erhebung für 1° C . . . . 243·5 Meter = 799 engl. F.

Das Mittel dieser Zahlenwerthe ist $712^3/_4$ engl. F.; es ist aber das wahre Mittel der Abnahme der Lufttemperatur, wegen der relativen Grösse der verschiedenen Terrainformen in den Andes, dem Mittelwerthe von 702 F. für Hochasien noch ähnlicher, wenn man bedenkt, dass die Gesammtfläche mit ausgesprochenen, schon hoch gelegenen Plateaux in den Andes, ungeachtet der grossen Ausdehnung einzelner derselben, geringer ist als die Basis der in Kamm- und Thal-Formen sich zeigenden Bodengestaltung.

Von einzelnen Beobachtungspunkten, welche den Einfluss der Plateaugestaltung sehr deutlich erkennen lassen, sei aus den neueren meteorologischen Daten vergleichende Zusammenstellung noch von Mexico und Vera Cruz, sowie von Santa Fé de Bogota und Caracas gegeben[32]).

Die beiden ersteren Stationen differiren in geographischer Breite sehr wenig nur, und durch die Ungleichheit der Länge würde sogar, wenn überhaupt Einfluss der Länge deutlich wäre bei so geringer Differenz, die Abnahme mit der Höhe eher beschleunigt als verlangsamt erscheinen, da — wie die allgemeine Construction von Jahresisothermen im Meeresniveau es zeigt — die betreffende Isotherme von der östlichen Küste Amerikas zur westlichen etwas gegen Süden sich senkt[33]).

---

32) Die Zahlen sind entnommen aus „Cours complet de Météorologie de L. F. Kämptz traduit et „annoté par Ch. Martins. Paris, 1858"; Vera Cruz war auch in „Kämptz' Lehrbuch, Halle 1832", enthalten.

33) Die Erläuterung der Isothermen bezieht sich speciell auf jene meiner Tafel I. der „Illustrations of the Meteorology of India and High Asia", in Atlas zu „Results Vol. IV", welche dort mit

Die Zahlenangaben der geographischen Coordinaten und der Temperatur-Mittel sind:

Mexico. Breite 19° 26′ N. Länge 99° 5′ W. von Greenwich Höhe 7451 engl. F.

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
13·0° C	18·1° C	19·1° C	16·2° C	16·6° C

Vera Cruz. Breite 19° 12′ N. Länge 96° 8′ W. von Greenw. Höhe (=).

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
21·5° C	25·0° C	26·0° C	27·5 C	25·0° C

Es ergibt sich demnach für die mittlere Temperaturabnahme von 1° C als Werth für das Jahr 887 engl. F.

Bei dem Vergleiche der Stationen der anderen Gruppe, bei Verbindung von Santa Fé de Bogota mit Caracas, ist zwar der Breitenunterschied, als ein sehr bedeutender, nicht unberücksichtigt zu lassen. Aber bei Beurtheilung der allgemeinen isothermen Verhältnisse dieses Gebietes zeigt sich sogleich, dass er dessenungeachtet nicht von grossem Einflusse sein kann, und dass mit demselben eventuell, in ähnlicher Weise wie bei Vera Cruz mit der Längendifferenz, Vermehrung der Temperatur an der unteren Station also gleichfalls Beschleunigung der resultirenden Temperaturabnahme sich verbinden muss.

Es befinden sich nemlich Santa Fé de Bogota sowie Caracas in dem Raume der lang gezogenen doppelten Bifurcation der Jahresisotherme von 26½° C, dessen kleine Achse mit verhältnissmässig langsamer Aenderung mehr als 15 Breitengrade im Centrum beträgt; dabei liegen beide Stationen südlich von der Mittellinie, welche hier als thermischer Aequator den abgeschlossenen Raum durchzieht, liegen also in jenem Theile, in welchem die Lufttemperatur von Süden nach Norden zunimmt.

Berücksichtigung des neuen (bis 1863) vorliegenden Materiales aus anderen Gebieten gleichfalls graphisch gegeben sind.

Die Temperaturscala für die Tabellen und die Isothermen ist dort Fahrenheit; aber als Linien sind solche Werthe dargestellt, mit Ausnahme local nöthigen Details, welche in Abständen von 4·5° F. = 2·5° C = 2° R. sich folgen, und es wurden dabei die Ausgangspunkte in Fahrenheit-Graden so gewählt, dass bei der Reduction nur ganze und halbe Grade auch für die beiden anderen Scalen sich ergeben.

Santa Fé de Bogota, obwohl bedeutend niedrer als die höchsten Stationen zwischen Indien und Centralasien, für welche fortgesetzte Beobachtungen vorhanden sind, zeigt dessenungeachtet schon viel geringere Aenderungen der Temperatur innerhalb der Jahresperiode[34]).

Die entsprechenden Zahlenwerthe sind:

Santa Fé de Bogota. Breite 4° 36′ N. Länge 74° 13′ W. von Gr. Höhe 8632 engl. F.

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
15·1° C	15·3° C	15·3° C	14·5° C	15·1° C

Caracas. Breite 10° 31′ N. Länge 67° 4′ W. von Greenwich Höhe 2910 engl. F.

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
20·9° C	21·8° C	23·4° C	22·2° C	22·1° C

Die mittlere Temperaturabnahme von 1° C ist demnach hier als Werth für das Jahr 817 engl. F. —

Für die Alpen hatte ich mit meinem Bruder Adolph als Mittelwerth der Höhe für Abnahme der Jahrestemperatur der Luft um 1° C 540 par. F. = 575½ engl. F. erhalten[35]).

Für die Centralalpen ergeben sich nach Stufen, — um auch Detail zum unmittelbaren Vergleiche noch beizufügen — die hier folgenden Werthe. Da die ganze Erhebung des Gebirges eine geringere ist als jene von Hochasien, wurden auch die Höhenstufen, für welche die entsprechenden Temperaturen angegeben sind, kleiner gewählt.

---

34) Als Beispiel ganz characteristisch für den grössten Theil von Tíbet, und von besonderer Wichtigkeit auch für die Vegetationsverhältnisse, folge zum Vergleiche, aus Vol. IV:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Le, in Ladák, Höhe 11,532 F.	— 5·4° C	6·3° C	17·0° C	6·3° C	6·1° C

Auch auf der Südseite des Himálaya sind in grossen Höhen nahe dem Kamme die Verhältnisse ziemlich ähnliche. Es hatte sich ergeben für

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Kárdong, in Lahól, Höhe 10,242 F.	— 1·7	8·1	15·0	7·2	7·2

35) Die Details der resultirenden Verhältnisse, und zwar mit Berechnung der Höhen für die gleichen Differenzen der Lufttemperatur und mit Trennung der verschiedenen topographisch zu unterscheidenden Gruppen der Alpen, hatten wir 1850 in Band I. der „Phys. Geogr. der Alpen" gegeben; für die Jahresmittel S. 345, für die Monatsmittel S. 353 bis 357.

Dort sind auch die Bedingungen der Wärmeabnahme mit der Höhe eingehender erläutert worden.

Tabelle der Zahlenwerthe für die Centralalpen:

Höhe ü. M., engl. F.	Lufttemperatur, Jahresmittel	Erhebung für 1° C Abnahme
(0', Basis . .	11·8° C)	
		. . . . . . 645'
2000	8·7	
		 590
5000	3·6	
		 500
8000	— 2·4	
		 515
11,000	— 8·2	
		 545
14,000	— 13·7	

Als Mittel der Erhebungsquotienten in dieser Gruppe ergibt sich für 1° C Abnahme 553 F. Erhebung, eine etwas raschere Abnahme als in den Alpen für das ganze Gebiet, weil bei dem Mittelwerthe für das Ganze auch der erwärmende Einfluss der südlichen Vorebene und der Mittelstufen auf der italienischen Seite sich bemerkbar macht, in ähnlicher Weise wie jener der indischen Tiefländer auf der südlichen Himálaya-Seite.

In Europa zeigt sich nördlich von den Alpen, ungeachtet der bedeutenden Unterschiede der Breite, für die Temperaturabnahme mit der Höhe selbst in den Gebirgen Norwegens noch nur geringe Beschleunigung.

In den Gebirgen südlich von den Alpen tritt das entsprechende Verlangsamen der Abnahme mit der Höhe in den meisten Lagen etwas regelmässiger auf.

Uebersicht.


NATURAL HISTORY.

Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

